



МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР \_\_\_\_\_

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа  $a, b, c$  являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа  $a, b, c$  не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения  $ax^2 + 2bx + c = 0$ . Найдите третий член прогрессии.
2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.
3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике  $ABC$  на катете  $AC$  и гипотенузе  $AB$  отмечены точки  $D$  и  $E$  соответственно, такие что  $AD : AC = 3 : 5$  и  $DE \perp AB$ . Найдите тангенс угла  $BAC$ , если известно, что  $\angle CED = 45^\circ$ .  
б) Пусть дополнительно известно, что  $AC = \sqrt{29}$ . Найдите площадь треугольника  $CED$ .
5. [5 баллов] Окружности  $\Omega$  и  $\omega$  касаются в точке  $A$  внутренним образом. Отрезок  $AB$  – диаметр большей окружности  $\Omega$ , а хорда  $BC$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $D$ . Луч  $AD$  повторно пересекает  $\Omega$  в точке  $E$ . Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника  $BACE$ , если известно, что  $CD = 1, BD = 3$ .
6. [5 баллов] Найдите все пары чисел  $(a; b)$  такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leq ax + b \leq x + |2x - 1|$$

выполнено для всех  $x$  на промежутке  $[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}]$ .

7. [5 баллов] Функция  $f$  определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел  $a$  и  $b$  из этого множества выполнено равенство  $f(ab) = f(a) + f(b)$ , и при этом  $f(p) = [p/2]$  для любого простого числа  $p$  ( $[x]$  обозначает наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ ). Найдите количество пар натуральных чисел  $(x; y)$  таких, что  $1 \leq x \leq 21, 1 \leq y \leq 21$  и  $f(x/y) < 0$ .



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

n1

т.к.  $a$  и  $bz$  — члены арифметической

прогрессии

$$bz = ka$$

$$cz = k^2 a$$

 $d = k^3 a$  ( $d$  — член арифметической)

$$ax^2 + 2kax + k^2a = 0$$

$$x^2 + 2kx + k^2 = 0$$

$$(x+k)^2 = 0$$

$$x = -k = d$$

$$d = -k = k^3 a \Rightarrow k^2 a = -1 \Rightarrow C = -1$$

Ответ:  $-1$ .



# №2 №6

Построим графики функций

①  $y = 2x^2 - x - 1$

②  $y = x + |2x - 1|$

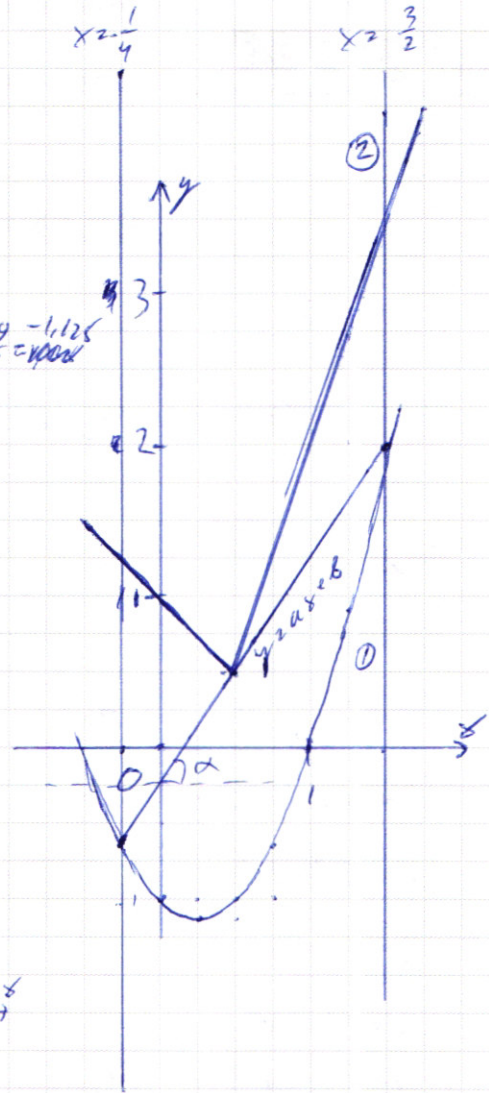
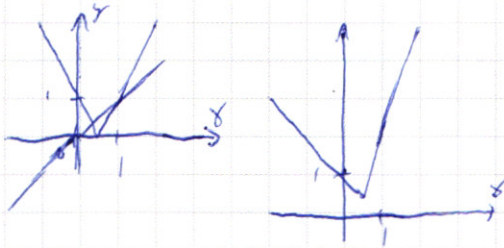
① вершина параболы  $x = -\frac{b}{2a} = 0,25$ ;  $y = 2 \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{9}{8} = -1,125$

можно найти вершину точки параболы  
подставив в формулу (формулу симметрии)  
относительно  $x = -\frac{b}{2a}$

$x$	0,6	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$
$y$	-1	$-\frac{5}{8}$	0	$\frac{11}{8}$	2

② нарисуем график функции  $y = x + |2x - 1|$

$y = |2x - 1|$



найти на ~~какой~~ графике функция  $y = x + |2x - 1|$

чтобы выразить условие необходимо чтобы функция

$y = ax + b$  находилась ~~внутри~~ на графике между ① и ②

в диапазоне  $x \in [-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}]$  то

Заметим, что обратимся по  $x$  и  $y$  выделенным крайним

значениям  $\Rightarrow$  ф-ция  $y = ax + b$  может касаться функций

① и ②

ф-ция  $y = ax + b$  на графике выделит или ~~на~~ прямая линия

эквивалентная такая линия показана на графике

$$a = k_{y2} = \frac{0,5 + 0,25}{0,6} = \frac{3}{2}$$

$$b = -\frac{1}{4} = -0,25$$

ответ:  $a = \frac{3}{2}; b = -\frac{1}{4}$ .



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

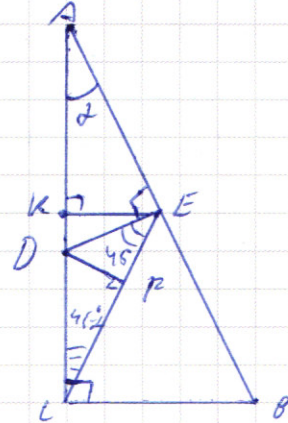
№4

Треугольник  $\triangle ABC$

$\angle CDE = 2 \cdot 50^\circ$  (внешний)

$\angle DCE = 180^\circ - (90^\circ + 45^\circ) = 45^\circ - \alpha$

Треугольник  $\triangle DPK$  и  $CE$



$$\begin{cases} DK = DE \cdot \sin 45^\circ = \frac{DE}{\sqrt{2}} \\ DK = DC \cdot \sin(45^\circ - \alpha) = DC \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \alpha - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \alpha \right) = \frac{DC}{\sqrt{2}} (\cos \alpha - \sin \alpha) \\ DE = AD \sin \alpha \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{AD}{AC} = \frac{3}{5} \\ AD + DC = AC \end{array} \right. \Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{AD \sin \alpha}{\sqrt{2}} = \frac{DC}{\sqrt{2}} (\cos \alpha - \sin \alpha)$$

$$3 \sin \alpha = 2 (\cos \alpha - \sin \alpha)$$

$$5 \sin \alpha = 2 \cos \alpha$$

$$\tan \alpha = \frac{2}{5} = 0,4$$

Треугольник  $\triangle ECK \perp AC$

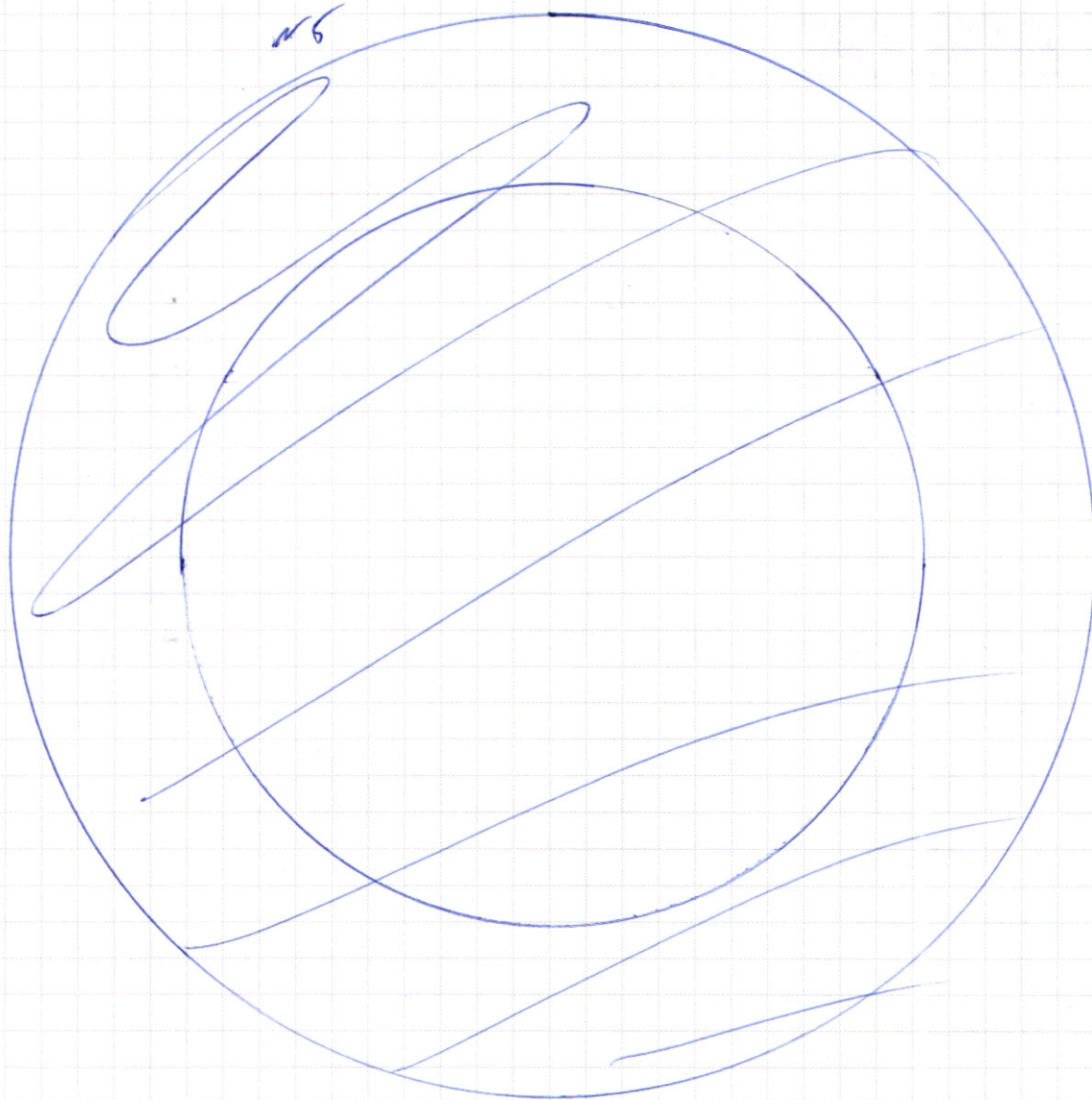
$$\begin{cases} EK = AE \sin \alpha \\ KE = AD \cos \alpha \\ AD = \frac{3}{5} AC \\ \frac{1}{\cos \alpha} = \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} = \sqrt{1 + 0,16} = \sqrt{1,16} = \frac{5}{4} \\ \sin \alpha = \tan \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{25} \end{cases}$$

$$EK = \frac{2}{\sqrt{25}} \cdot \frac{5}{\sqrt{25}} \cdot \frac{3}{5} \cdot \sqrt{25} = \frac{6}{\sqrt{25}}$$

$$DC = \frac{2}{5} AC = \frac{2}{5} \sqrt{25}$$

$$S = \frac{EK \cdot DC}{2} = \frac{6 \cdot 2 \cdot \sqrt{25}}{5 \cdot 2 \cdot \sqrt{25}} = \frac{6}{5} = 1,2$$

Ответ:  $\tan \angle OAC = 0,4$ ;  $S = 1,2$



черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 26  
(Нумеровать только чистовики)



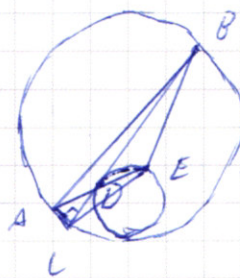
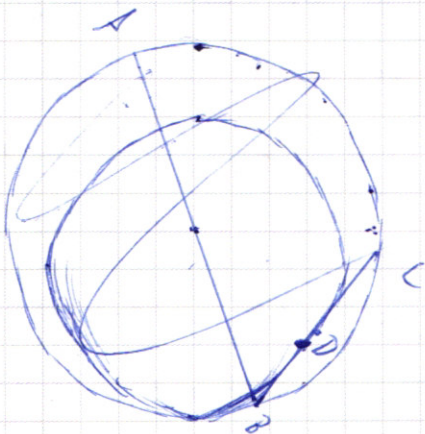
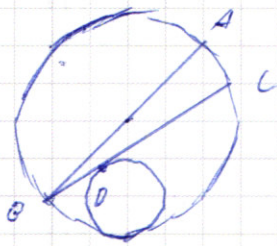






черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)





### ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$kx^2 + 2kx + k^2 = 0$$

$$x^2 + 2kx + k^2 = 0$$

$$(x+k)^2 = 0$$

$$x+k = 0$$

$$\text{Вд } a \cdot k^2 = -k$$

$$a k^2 = -1$$

1) дискриминант

$$x^2 + 2kx + k^2 = 0$$

$$(x+k)^2 = 0$$

$$(x+k)^2 = 0$$

$$x^2 + 2kx + k^2 = 0$$

$$(x+k)^2 = 0$$

$$(x+k)^2 = 0$$

$$x^2 + 2kx + k^2 = 0$$

16

$$x^2 + 2kx + k^2 = 0$$

$$2(x+k)^2 = 0$$

$$x^2 + 2kx + k^2 = 0$$

$$x^2 + 2kx + k^2 = 0$$

$$2x^2 + y^2 - 2x - 2y + 3 = 0$$

$$2x(x-1) + y(y-2) - 2x - 2y + 3 = 0$$

$$x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 2xy - 4x - 2y + 3 = 0$$

$$(x+y)^2 + (x-2y) - 4x - 2y + 3 = 0$$

$$x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 2xy - 4x - 2y + 3 = 0$$

$$2x^2 + y^2 - 4x - 2y + 3 = 0$$

$$2x^2 + y^2 - 4x - 2y + 3 = 0$$

$$x^2 + y^2 + (x-3)(y-1) = 0$$

$$2x^2 + y^2 - 4x - 2y + 3 = 0$$

$$2x(x-2) + y(y-1) - 3(y-1) = 0$$

$$2x(x-2) + (y-3)(y-1) = 0$$

1	4	9	16	25	36	49	64	100	144
-14	-10	-6	-2	2	6	10	14	18	22

$$2x^2 + y^2 - 4x - 2y + 3 = 0$$

$$2(x^2 - 2x + 1) + y^2 - 2y + 1 = 0$$



$$y^2 - 4x + x^2 = 2xy - 2x - y + 2$$

$$2x^2 - 4y + 3 + xy - 2x - y + 2 + 4xy = 0$$

$$6x^2 + xy$$

$$4x^2 + y^2 + 2x + y - 5xy - 2 = 0$$

$$2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 2 = 9$$

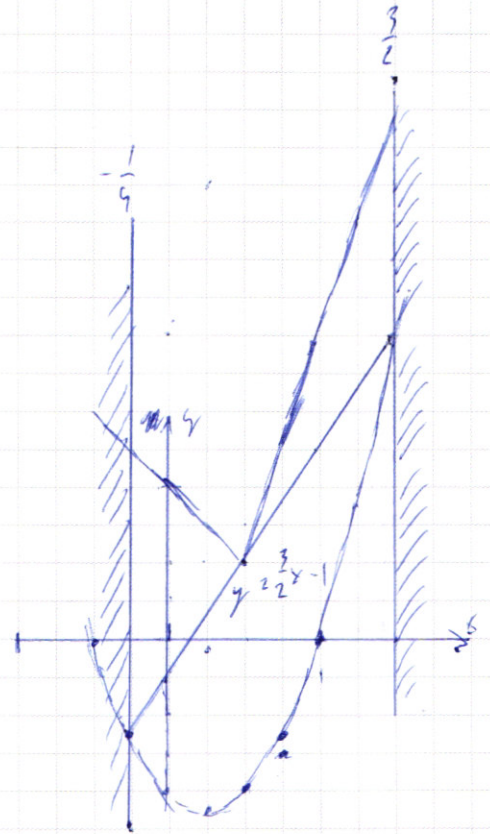
$$x = \frac{1 \pm 3}{4}$$

$$\frac{1}{8} - \frac{1}{4} - 1 = \frac{1-2-8}{8} = -\frac{9}{8}$$

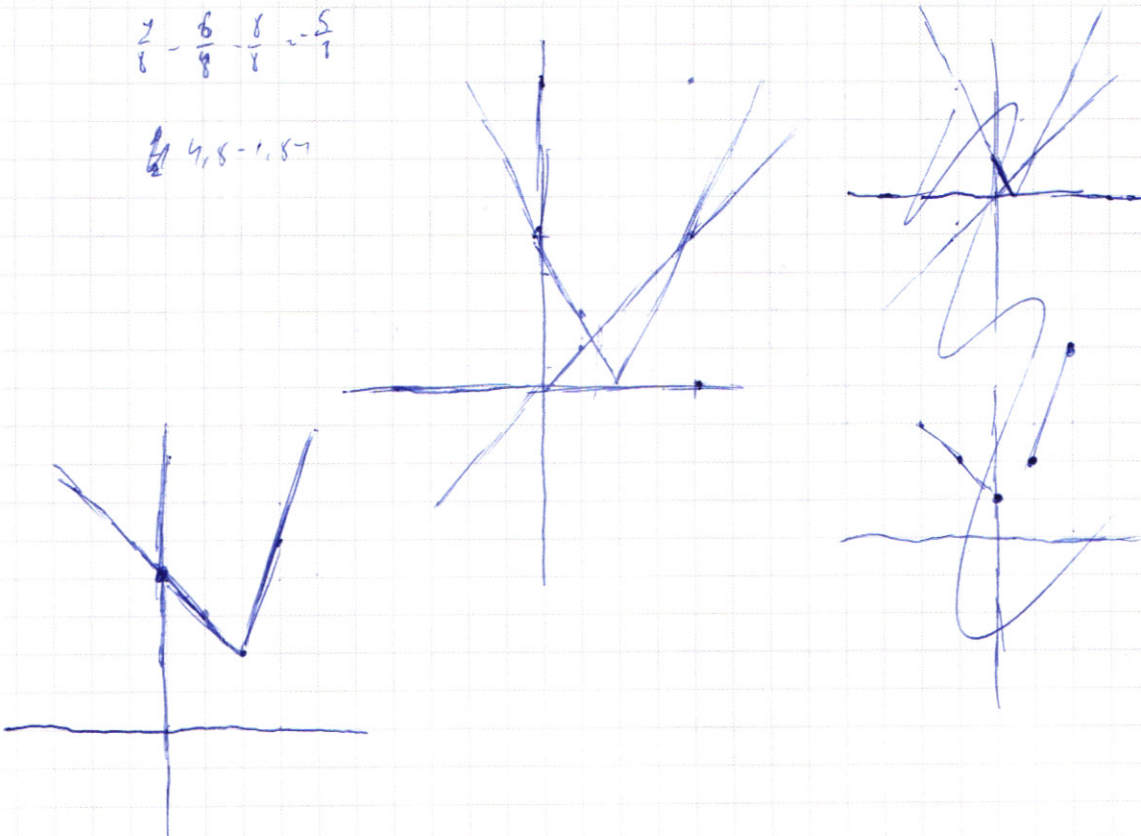
$$0,5 - 0,5 = 1$$

$$\frac{2}{8} - \frac{6}{8} - \frac{8}{8} = -\frac{5}{4}$$

$$\frac{1}{2} \cdot 4,5 - 1,5 = 1$$



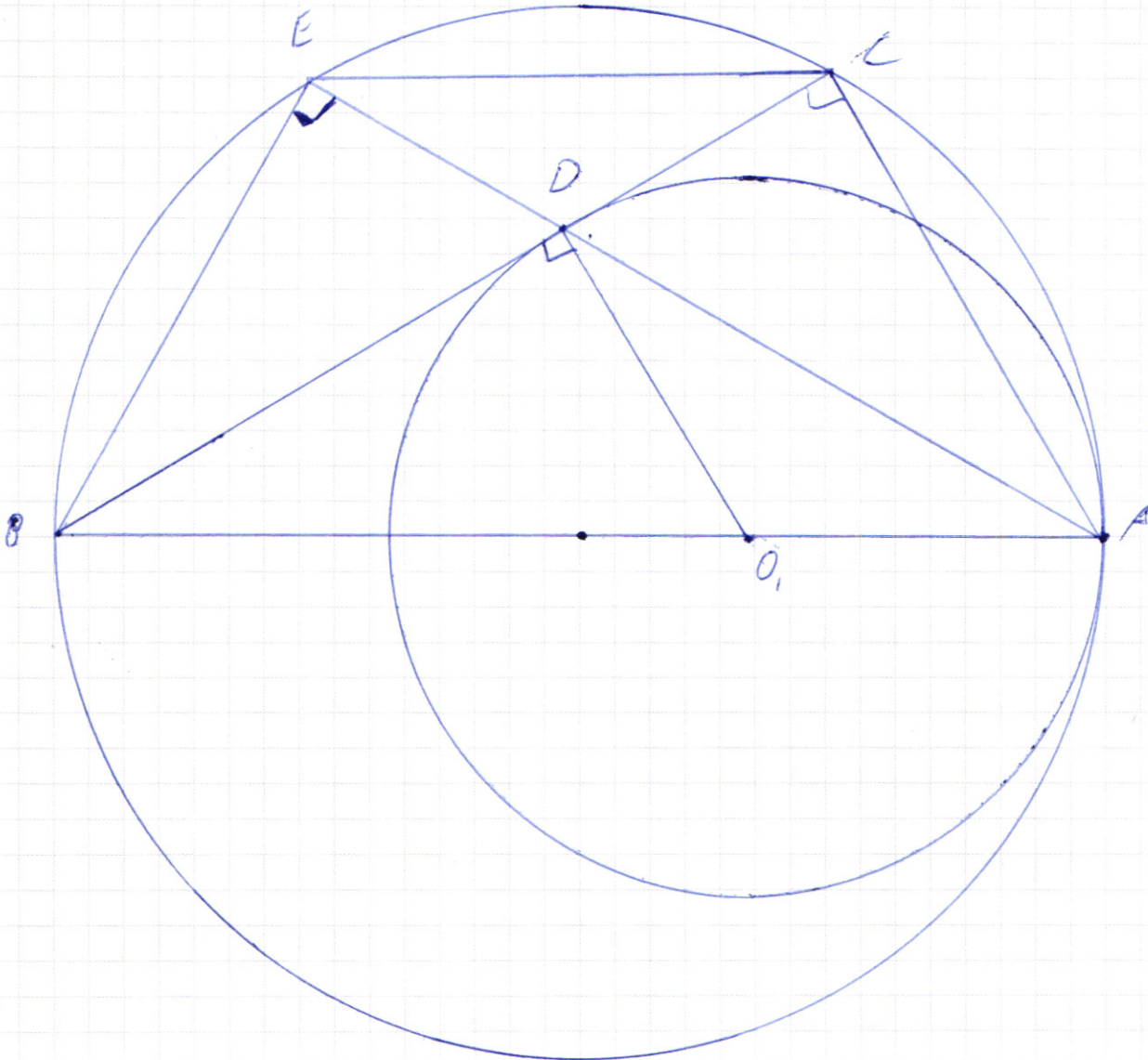
$$a) \quad a = \frac{3}{2} \quad b = 0,24$$







## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$2R = 4r$$

$$\frac{2R-r}{2R} = \frac{2R}{BD+CD} \Rightarrow 8R-4r = 6R$$

$$2R = 4r$$

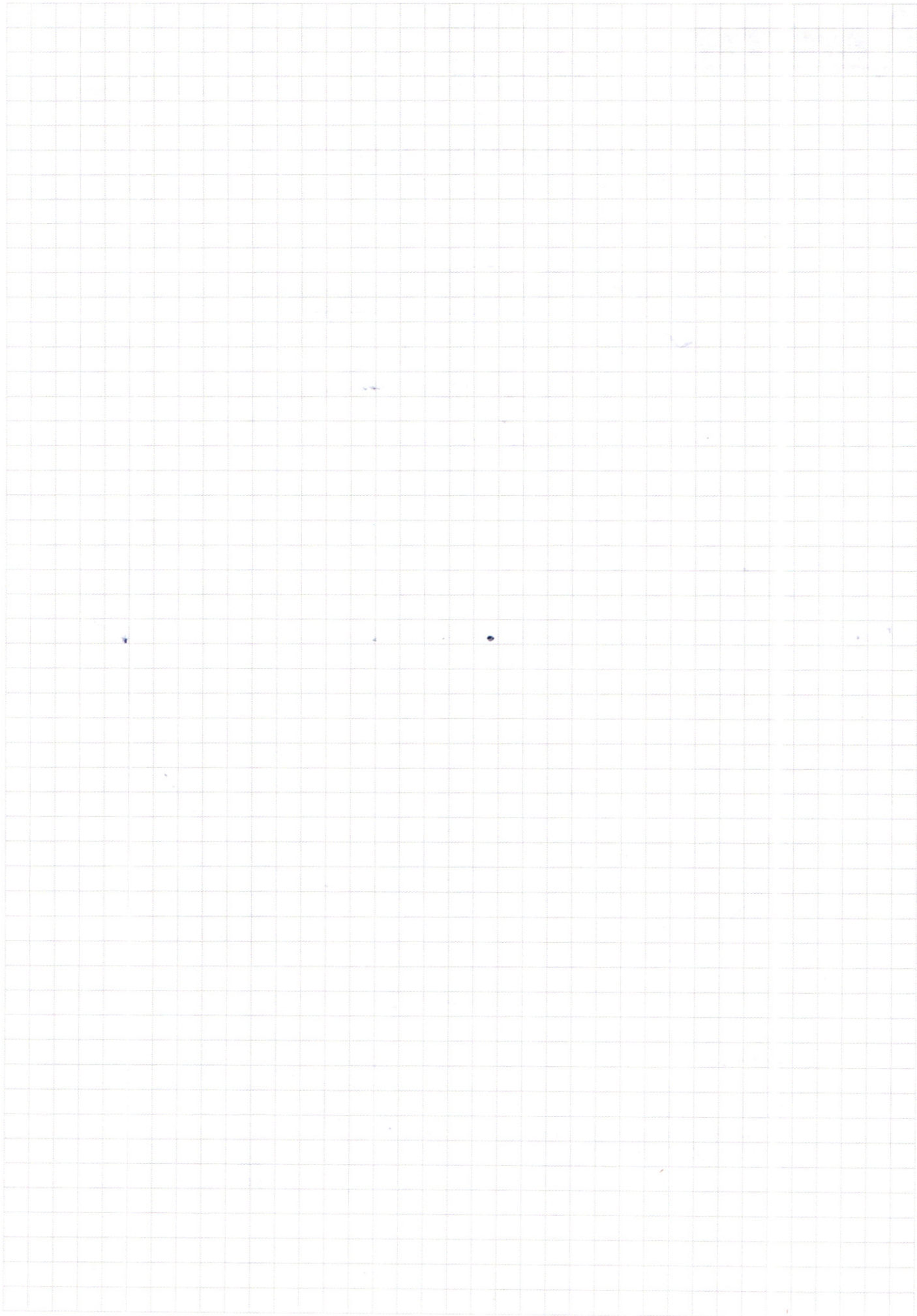
$$R = 2r$$

$$BD^2 = (2R-r)^2 - r^2 = (4r-r)^2 - r^2 = 3r^2$$

$$r = \frac{BD}{\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}}$$

$$R = \frac{BD}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$$





черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)