# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

## 10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа $a$, $b$, $c$ являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа $a$, $b$, $c$ не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике $ABC$ на катете $AC$ и гипотенузе $AB$ отмечены точки $D$ и $E$ соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла $BAC$, если известно, что $\angle CED = 45°$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника $CED$.

5. [5 баллов] Окружности $\Omega$ и $\omega$ касаются в точке $A$ внутренним образом. Отрезок $AB$ – диаметр большей окружности $\Omega$, а хорда $BC$ окружности $\Omega$ касается $\omega$ в точке $D$. Луч $AD$ повторно пересекает $\Omega$ в точке $E$. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

   выполнено для всех $x$ на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция $f$ определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел $a$ и $b$ из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа $p$ ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее $x$). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1.

Решение:

Пусть $d$ - четвёртый элемент геометричекой прогрессии. Так как $a, b, c, d$ - геометрическа прогрессия, то $b = aq$, $c = aq^2$, $d = aq^3$.

Решим уравнение $ax^2 + 2bx + c = 0$

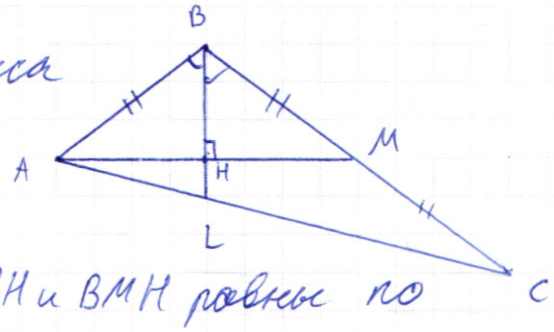
$D = 4b^2 - 4ac = 4\cdot(aq)^2 - 4a\cdot(aq^2) = 4a^2q^2 - 4a^2q^2 = 0$

$x = \frac{-2b}{2a} = \frac{-2aq}{2a} = -q$. Так как $d$ равно корню уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$, то $d = x = -q$. Тогда 3-ий член прогрессии $c = \frac{d}{q} = \frac{-q}{q} = -1$

Ответ: $-1$

2.

Решение:




Пусть есть $\triangle ABC$ и его биссектриса $BL$ пересекла медиану $AM$ в точке $H$ так, что $\angle AHB = 90°$. Тогда прямоугольные треугольники $ABH$ и $BMH$ равны по катету и острому углу ($BH$ - общий катет, $\angle ABH = \angle HBM$, $BH$ - биссектриса)

Так как $\triangle ABH = \triangle BMH$, то из равенства соответствующих сторон получаем, что $AB = BM$. Пусть $AB = x$, тогда $BC = 2x$.

Таким образом получаем, что если в треугольнике какая-то биссектриса перпендикулярна какой-то медиане, то одна из сторон треугольника в 2 раза боль-

ие другой. То есть под условие подходят треуголь-
ники со сторонами $x, 2x, y$. В них мы всегда мо-
жем провести медиану к стороне $2x$ и биссектри-
су к стороне $y$, и они будут перпендикулярны.

~~Пери~~ $P = 2x + x + y = 3x + y = 1200 \Rightarrow y = \cancel{40}\ 1200 - 3x$

По основному неравенству сторон треугольника:

$$\begin{cases} x < 2x + y \text{ всегда выполняется, так как } x>0, y>0 \\ 2x < x + y \\ y < 2x + x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < y \\ y < 3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 1200 - 3x \\ 1200 - 3x < 3x \end{cases} \begin{cases} x < 300 \\ x > 200 \end{cases}$$

Сторона $y$ однозначно определяется, если известен $x \Rightarrow$ количество различных треугольников равно количеству различных ~~иксов~~ чисел, удовлетворяющих неравенствам $x > 200$ $x < 300$. Таких чисел 99: 201, 202, 203, ..., 299.

Ответ: 99

7.

Решение: Известно, что $f(p) = \left[\frac{p}{2}\right]$ для всех $p$, где $p$ - простое число. ~~До~~ Посчитаем $f$ для всех простых чисел до 21.

$f(2) = 1$, $f(3) = 1$, $f(5) = 2$, $f(7) = 3$, $f(11) = 5$, $f(13) = 6$, $f(17) = 8$, $f(19) = 9$. Зная $f$ для всех простых чисел, мы можем посчитать $f(x)$ для всех $x$ таких, что $1 \le x \le 21$. Заметим, что $f(x) = f(y) + f(x/y)$

| x | f(x) |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 2 | 1 |
| 3 | 1 |
| 4 | 2 |
| 5 | 2 |
| 6 | 2 |
| 7 | 3 |
| 8 | 3 |
| 9 | 2 |
| 10 | 3 |
| 11 | 5 |
| 12 | 3 |
| 13 | 6 |
| 14 | 4 |

| x | f(x) |
|---|---|
| 15 | 3 |
| 16 | 4 |
| 17 | 8 |
| 18 | 3 |
| 19 | 9 |
| 20 | 4 |
| 21 | 4 |

$f(x/y) = f(x) - f(y)$, то есть $f(x/y) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(y)$

То есть нам нужно найти ~~в~~ количество пар $(x; y)$ таких, что $f(x) < f(y)$. Перепишем все найденные $f(x)$ в формате $(a, C(a))$, где $a$ - какое-то значение функции $f$, ~~а~~ $C(a)$ - количество таких значений ~~на~~ $f$ на отрезке $[1; 21]$:

$(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 4)$, $(3, 6)$, $(4, 4)$, $(5, 1)$, $(6, 1)$, $(7, 0)$, $(8, 1)$, $(9, 1)$.

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7. (продолжение)

Таким образом, количество таких пар можно посчитать так: $C(9)\cdot(C(8)+C(7)+C(6)+\ldots+C(0))+C(8)\cdot(C(7)+C(6)+\ldots+C(0))+\ldots+C(1)\cdot C(0)=$

$= 1\cdot 20+1\cdot 19+0\cdot 19+1\cdot 18+1\cdot 17+4\cdot 13+6\cdot 7+4\cdot 3+2\cdot 1=20+19+18+17+52+$

$+42+12+2=182$

Ответ: 182

3.

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

ОДЗ: $y-2x\geq 0 \Rightarrow y\geq 2x \quad xy-2x-y+2\geq 0$

Возведём первое в квадрат: $y^2-4xy+4x^2=xy-2x-y+2$

$y^2+(1-5x)y+4x^2+2x-2=0$

$D=25x^2-10x+1-16x^2-8x+8=9x^2-18x+9=(3x-3)^2$

$y=\dfrac{5x-1\pm\sqrt{(3x-3)^2}}{2}=\dfrac{5x-1\pm|3x-3|}{2}$

1) $y=\dfrac{5x-1-(3x-3)}{2}=\dfrac{2x+2}{2}=x+1$

$2x^2+(x+1)^2-4x-4(x+1)+3=0$

$2x^2+x^2+2x+1-4x-4x-4+3=0$

$3x^2-6x=0$

$3x(x-2)=0$

$x=0;2 \Rightarrow y=1;3$

2) $y=\dfrac{5x-1+(3x-3)}{2}=\dfrac{8x-4}{2}=4x-2$

$2x^2+(4x-2)^2-4x-4(4x-2)+3=0$

$2x^2+16x^2-16x+4-4x-16x+8+3=0$

$18x^2-36x+15=0$

$~~Д=~~ 6x^2-12x+5=0$

$D=144-120=24$

$x=\frac{12\pm2\sqrt6}{12}=\frac{6\pm\sqrt6}{6} \Rightarrow y=\frac{12\pm4\sqrt6}{6}$

Проверка:

1) $x=\frac{6-\sqrt6}{6}$ $y=\frac{12-4\sqrt6}{6}$

$y\geq2x$ $\frac{12-4\sqrt6}{6}\geq\frac{12-2\sqrt6}{6}$

$12-4\sqrt6\geq12-2\sqrt6$

$-2\sqrt6\geq0$, противоречие $\Rightarrow$ не подходит

2) $x=\frac{6+\sqrt6}{6}$ $y=\frac{12+4\sqrt6}{6}$

$\frac{12+4\sqrt6}{6}\geq\frac{12+2\sqrt6}{6}$ $\left(\frac{6+\sqrt6}{6}\right)\left(\frac{12+4\sqrt6}{6}\right)-\left(\frac{12+2\sqrt6}{6}\right)-\left(\frac{12+4\sqrt6}{6}\right)+2\geq0$

$2\sqrt6\geq0$ $\frac{72+24+36\sqrt6}{36}-\frac{24+6\sqrt6}{6}+\frac{12}{6}\geq0$

$\frac{96+36\sqrt6-24\cdot6-6\sqrt6\cdot6+12\cdot6}{36}\geq0$

$96-144+72+\cancel{36\sqrt6}-\cancel{36\sqrt6}\geq0$

$168-144\geq0$ подходит

3) $x=2$ $y=3$

$y-2x\geq0$

$3-4\geq0$ противоречие $\Rightarrow$ не подходит

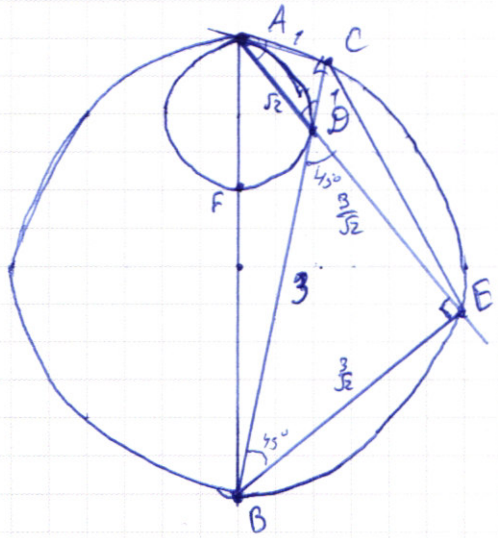
4) $x=0$ $y=1$

$\begin{cases}1=\sqrt{-1+2}\\1-4+3=0\end{cases}$ $\begin{cases}1=1\\0=0\end{cases}$ $\Rightarrow$ подходит

Ответ: $\left(\frac{6+\sqrt6}{6};\frac{12+4\sqrt6}{6}\right)\cup(0;1)$

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5.




$CD = CA = 1$ как отрезки касательных

$\angle ACB = \angle AEB = 90°$, так как опираются на диаметр.

$\triangle ACD$: $AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = \sqrt{2}$

$\angle CAD = \angle ADC = \frac{90°}{2} = 45°$ ($\triangle ACD$ ~~[illegible]~~ $AC = CD$)

$DE = BE = \cancel{\ }BD \cdot \sin 45° = \frac{3}{\sqrt{2}}$

$BC = CD + DB = 1 + 3 = 4$

$R = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{AC^2 + BC^2}}{2} = \frac{\sqrt{1^2 + 4^2}}{2} = \frac{\sqrt{17}}{2}$ $R$ – радиус $\Omega$, $r$ – радиус $\omega$

$S_{BACE} = S_{\triangle ACB} + S_{\triangle BDE} + S_{\triangle DCE} = \frac{AC \cdot CB}{2} + \frac{BE \cdot DE}{2} + \frac{1}{2} CD \cdot DE \cdot \sin 135° =$

$= \frac{1 \cdot 4}{2} + \frac{\frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}}}{2} + \frac{1 \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = 2 + \frac{9}{4} + \frac{3}{4} = 2 + \frac{12}{4} = 5$

$AB \cdot BF = BD^2$

$BF = \frac{BD^2}{AB} = \frac{9}{\sqrt{17}}$

$r = \frac{AF}{2} = \frac{AB - BF}{2} = \frac{\sqrt{17} - \frac{9}{\sqrt{17}}}{2} = \frac{8}{2\sqrt{17}} = \frac{4}{\sqrt{17}}$

Ответ: ~~$\frac{\sqrt{17}}{2}, \frac{8}{2\sqrt{17}}, 5$~~ $R = \frac{\sqrt{17}}{2}$; $r = \frac{4}{\sqrt{17}}$; $S_{BACE} = 5$

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

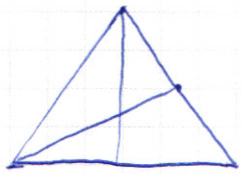
(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

12:23 → 16:23

$a, b, c$

$b = aq \quad c = aq^2 \quad d = aq^3$



$ax^2 + 2bx + c = 0$

$D = 4b^2 - 4ac = 4a^2q^2 - 4a^2q^2 = 0$

$x = \frac{-2b+0}{2a} = \frac{-2aq}{2a} = -q$

$d = -q$

$c = \frac{d}{q} = -1$

$a = -\frac{1}{q^2} \quad b = -\frac{1}{q} \quad c = -1 \quad d = -q$

$y = 1200 - 3x$

$x, 2x, y$

$x < 1200 - 3x$

$3x + y = 1200$

$x < 300$

$1200 - 3x < 3x$

$x > 200$

$2x < x + y$

$y < 3x$

$\begin{cases} x < y \\ y < 3x \end{cases}$

$\begin{cases} x > 200 \\ x < 300 \end{cases}$

$f(2) = 1 \quad f(2{,}5) = 1$

$f(3) = 1$

$f(5) = 2$

$f(7) = 3$

$f(11) = 5$

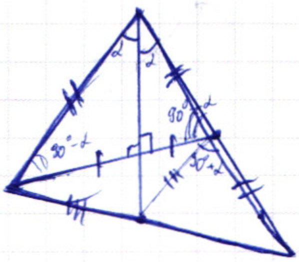
$f(13) = 6$

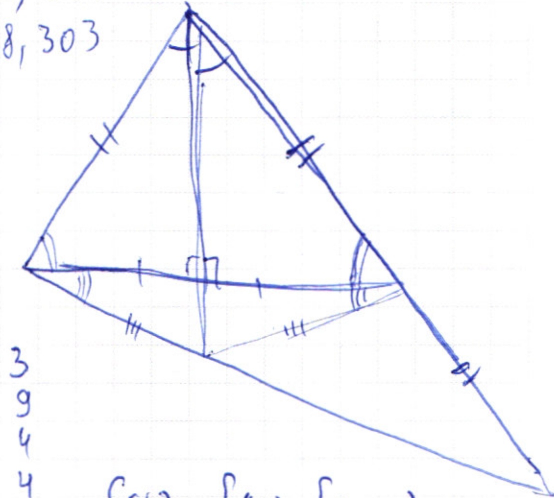
$f(17) = 8$

$f(19) = 9$

201, 402, 597

299, 598, 303





$f(11) = f(11) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$

$f(4) = 2$

$f(6) = 2$

$f(8) = 3$

$f(9) = 2$

$f(10) = 3$

$f(12) = 3$

$f(14) = 4$

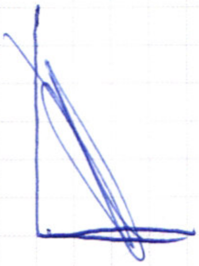
$f(15) = 3$

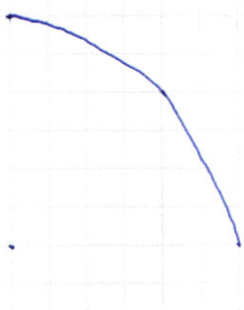
$f(16) = 4$

$f(18) = 3$

$f(20) = 4$

$f(21) = 4$

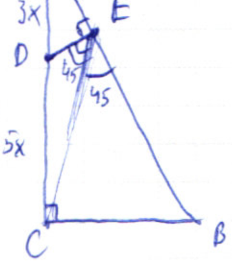




| | |
|---|---|
| 0 | 3 |
| 1 | 9 |
| 1 | 4 |
| 2 | 4 |
| 2 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 3 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 5 | |
| 3 | |
| 6 | |
| 4 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 8 | |

$f(x) = f(y) + f(x/y)$

$f(x/y) = f(x) - f(y)$




☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-2x\geq 0 \\ y\geq 2x \end{cases}$$

$xy-2x-y+2\geq 0$

$\cancel{(y-3)(y-1)+2x(x-2)}=0$

$y^2-4y+2x^2-4x+3=0$

$D=16-8x^2+16x-12=0$

$=-(8x^2-16x-4)$

$y^2-4xy+4x^2=xy-2x-y+2$

$y^2+4x^2-5xy+2x+y-2=0$

$(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)=0$

$(a_1x+y+2)(a_2x+y-1)=0$

$(2x+y+2)(2x+y-1)=0$

$-a_1+2a_2=2$

$a_1a_2=4$

$a_1=2a_2+2$

$2a_2^2-2a_2-4=0$

$a_2^2-a_2-2=0$

$a_2=-1;2$

$y^2+(1-5x)y+4x^2+2x-2=0$

$D=25x^2-10x+1-16x^2-8x+8=9x^2-18x+9=(3(x-1))^2=(3x-3)^2$

$y=\dfrac{5x-1\pm(3x-3)}{2}$

1) $y=\dfrac{5x-1-3x+3}{2}=\dfrac{2x+2}{2}=x+1$

$2x^2+x^2+2x+1-4x-4x-4+3=0$

$3x^2-6x=0$

$3x(x-2)=0$ $x=0$ $\cancel{x=2}$

$y=1$

2) $y=\dfrac{5x-1+3x-3}{2}=\dfrac{8x-4}{2}=4x-2$

$2x^2+16x^2-16x+4-4x-16x+8+3=0$

$18x^2-30x+15=0$

$6x^2-12x+5=0$

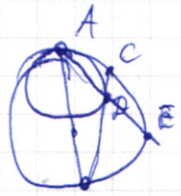
$D=144-120=24$

$x=\dfrac{12\pm2\sqrt6}{12}=\dfrac{6\pm\sqrt6}{6}$

1) $x=\dfrac{6-\sqrt6}{6}$ $\cancel{y=\dfrac{6-2\sqrt6}{3}}$ $y=\dfrac{12-4\sqrt6}{6}$

2) $x=$

81, 49+25+16, 9+4+1



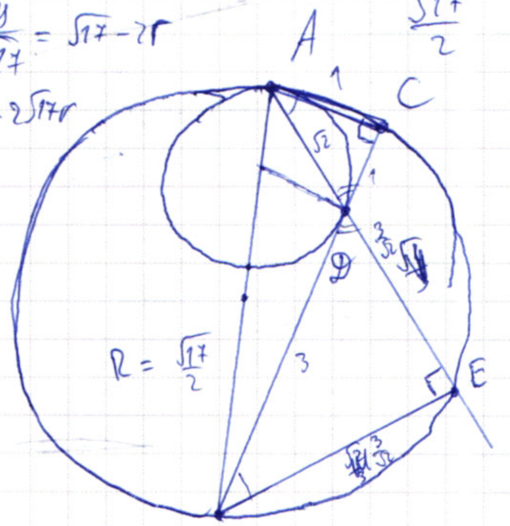

$\dfrac{DE}{CD}=\dfrac{AD}{BD}$

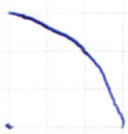
$2\sqrt{17}r=$

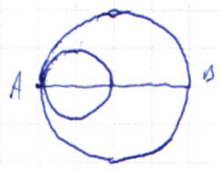
$\dfrac{9}{\sqrt{17}}=\sqrt{17}-2r$

$9=17-2\sqrt{17}r$

$\dfrac{\sqrt{17}}{2}$






☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)