МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача номер 1.

Т.к. a, в и c - первые, вторые и третьи члены геометрической прогрессии, можно записать, что:

$b = a \cdot q$ (Предположим, что $a \neq 0$).

$c = b \cdot q = a \cdot q^2$

Тогда, уравнение $ax^2 - 2bx + c = 0$ приобретает вид

$ax^2 - 2aqx + aq^2 = 0$, где X - четвёртый член геом. прогрессии,

т.е. $X = a \cdot q^3$.

$ax^2 - 2aqx + aq^2 = 0$

$a(x^2 - 2qx + q^2) = 0$

$a(x - q)^2 = 0$

Т.к. $a \neq 0$, то $x = q. \Rightarrow a \cdot q^3 = q \Rightarrow a \cdot q^2 = 1. \Rightarrow c = 1.$

Ответ: при $a \neq 0$, $c = 1$

$a \cancel{\neq} = 0$, $c = 0$

Задача 7.

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = \left[\frac{p}{2}\right]$ - p-простое.

Заметим, что $f(a) = f(1 \cdot a) = f(1) + f(a)$

$f(a) = f(1) + f(a)$

$f(1) = 0.$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

Заметим, что $f(1) = f\left(\frac{a}{a}\right)$ $a \neq 0$.

$$f\left(\frac{a}{a}\right) = f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) = f(1)$$

$$f(1) = 0$$

$$f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) = 0$$

$$f\left(\frac{1}{a}\right) = -f(a)$$

Следовательно, $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y)$

Составим таблицу $f(a)$, $a \in [2; 22]$.

$f(a)$	1	1	2	2	2	3	3	2	3	5	3	6	4	3	4	8	3	9	4	4	6
a	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22

$f(a) = 1$ при $a = 2; 3$ (2 шт) 2

$f(a) = 2$ при $a = 4; 5; 6; 9;$ (4 шт) 6

$f(a) = 3$ при $a = 7; 8; 10; 12; 15; 18$ (6 шт) 12

$f(a) = 4$ при $a = 14; 16; 20; 21$ (4 шт) 16

$f(a) = 5$ при $a = 11;$ (1 шт) 17

$f(a) = 6$ при $a = 13; 22$ (2 шт) 19

$f(a) = 7$ ни при каких $a \in [2; 22]$

$f(a) = 8$ при $a = 17$ 1 шт 20

$f(a) = 9$ при $a = 9$. 1 шт 21

Чтобы $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$, необходимо, чтобы $f(x) < f(y)$

Тогда ANS - кол-во пар x и y, равно: ~~4·2+6·6+4·16+1·17+2·19+~~
~~+1·20~~ $4 \cdot 2 + 6 \cdot 6 + 4 \cdot 12 + 1 \cdot 16 + 2 \cdot 17 + 1 \cdot 19 + 1 \cdot 20 =$

$= 8 + 36 + 48 + 16 + 34 + 19 + 20 = 181$. Ответ: кол-во пар $(x; y)$ – 181 шт.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

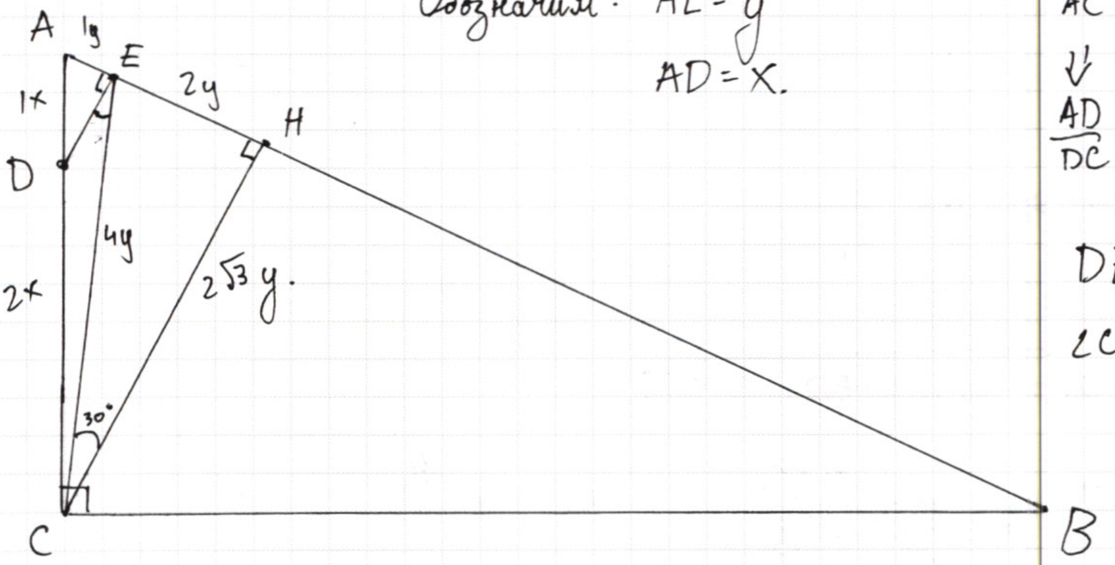
Задача 4.

Обозначим: $AE = y$
$AD = x$.

$\frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$
$\Downarrow$
$\frac{AD}{DC} = \frac{1}{2}$.

$DE \perp AB$
$\angle CED = 30^\circ$
$\operatorname{tg} BAC = ?$

+:
$AC = \sqrt{7}$
$S_{CED} = ?$



1) Постр. $CH \perp AB$.

$DE \parallel CH \Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{AE}{EH} = \frac{1}{2}$

$\angle DEH = 90^\circ$ $(DE \perp AB)$

$\angle CEH = \angle DEH - \angle CED = 90 - 30 = 60^\circ$

$\angle ECH = 90 - 60 = 30^\circ = \angle DEH$.

$\triangle EHC$ – прямоугольный, $\angle ECH = 30^\circ \Rightarrow EC = 2EH = 4y$

$CH = \sqrt{16y^2 - 4y^2} = 2\sqrt{3} \cdot y$.

$\triangle CAH \overset{k}{\sim} \triangle DAE$ ($\angle CAH$ – общий, $DE \parallel CH$)

$k = \frac{AC}{AD} = \frac{3}{1}$. $\frac{AC}{AD} = \frac{CH}{DE}$ $\frac{3}{1} = \frac{2\sqrt{3}}{DE}$ $DE = \frac{2}{\sqrt{3}} y$

$AD = \sqrt{DE^2 + AE^2} = \sqrt{\frac{4}{3}y^2 + y^2} = y\sqrt{\frac{7}{3}}.$

$tg\, BAC = \frac{DE}{AE} = \frac{2}{\sqrt{3}}y : 1y = \frac{2}{\sqrt{3}}$

Ответ: $tg\, BAC = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$AC = \sqrt{7}$

$AD = \frac{\sqrt{7}}{3}$

$AD = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} \cdot y \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$S_{CED} = \sqrt{p(p - CE)(p - ED)(p - CD)}$

$p = \frac{CE + ED + CD}{2} = \cancel{4y = \frac{4}{\sqrt{3}}}.$

$CE = 4y = \frac{4}{\sqrt{3}}$

$DE = \frac{2}{\sqrt{3}}y = \frac{2}{3}$

$CD = 2AD = \frac{2\sqrt{7}}{3}$

$p = \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{7}}{3} = \frac{1 + 2\sqrt{3} + \sqrt{7}}{3}$

$S_{CED} = \sqrt{\left(\frac{1+2\sqrt{3}+\sqrt{7}}{3}\right)\left(\frac{1+2\sqrt{3}+\sqrt{7} - 4\sqrt{3}}{3}\right)\left(\frac{1+2\sqrt{3}+\sqrt{7} - 2}{3}\right)\left(\frac{1+2\sqrt{3} - \sqrt{7}}{3}\right)} =$

$= \sqrt{(2\sqrt{7} - 4)(2\sqrt{7} + 4)} = \sqrt{4 \cdot 7 - 4 \cdot 4} = 2\sqrt{3}.$

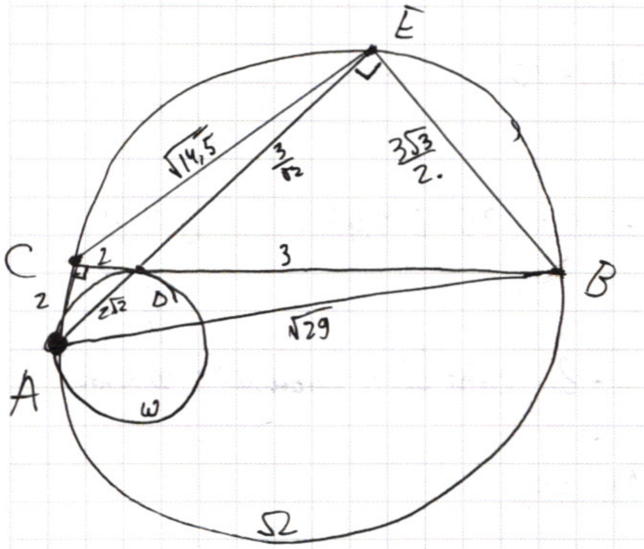
Ответ: $S_{CED} = 2\sqrt{3}.$

Задача №2.

Рассмотрим $\triangle ABC$, в котором бис-са перпендикулярна медиане:

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$CD=2$

$DB=3$.

CD и CA – кас. к ω из одной точки => $AC=2$.

$\angle ACB$ опир. на AB, AB – диаметр => $\angle ACB=90^\circ$ => $AD=\sqrt{4+4}=2\sqrt2$.

Т.к. ACEB – впис, то $\angle AEB=90^\circ$

$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{4+25}=\sqrt{29}$.

$R=\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{29}}{2}$.

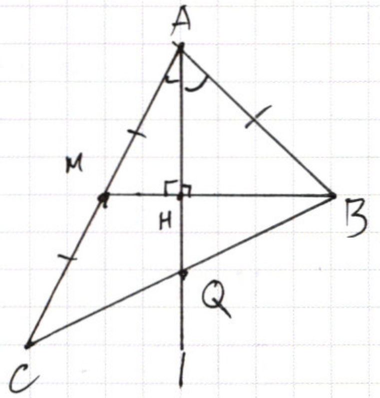
Т.к. ACEB – впис, $AD\cdot DE=CD\cdot DB$.

$DE=\frac{CD\cdot DB}{AD}=\frac{3}{\sqrt2}$.

Заметим, что $\triangle ADB \overset{k}{\sim} \triangle CDE$ ($\angle CBA=\angle CEA$ – на одну дугу,

$\angle CDE=\angle ADB$ – верт) => $\frac{CE}{AB}=\frac{CD}{AD}$. $CE=\frac{\sqrt{29}}{\sqrt2}=\sqrt{14,5}$

$EB=\sqrt{DB^2-DE^2}=\frac{3\sqrt3}{2}$. Теперь, когда мы знаем все стороны, нам не составит труда вычислить площадь:



AQ-бис-са

BM-медиана.

$AQ \cap MB = H$

$AM = MC$.

$\angle MHA = \angle AHB = 90^\circ$.

AH-общ.

$\angle AMH = \angle ABH = 90 - \angle MAH$.

$\Rightarrow \triangle MAH = \triangle HAB$

$\Downarrow$

по р-ву соответствующих элементов:

$AM = AB$.

Обозначим AB за X.

$P = AC + AB + CB = 3x + CB = 900$.

$$\begin{cases} AC + CB > AB \\ AC + AB > CB \\ AB + CB > AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + CB > x \\ 2x + x > CB \\ x + CB > 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 900 > 4x \\ 900 < 6x \end{cases}$$

неравенства сторон треугольника

Тогда, $x < \frac{900}{4} \Rightarrow x < 225$

$x > \frac{150}{1} \Rightarrow x > 150$; $x > \frac{900}{6}$.

Тогда $x \in [151; 226]$; $x \in N$

Ответ: 74 треугольника.

Задача 5.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$S_{ACEB} = S_{ACE} + S_{AEB}$.

$S_{ACE} = \sqrt{p(p-AC)(p-CE)(p-AE)}$, $p = \dfrac{AC+CE+AE}{2}$

$S_{AEB} = \sqrt{p(p-AE)(p-EB)(p-AB)}$, $p = \dfrac{AE+EB+AB}{2}$.

Все величины известны, вычисление возможно.

Задача 3.

$$\begin{cases} x-6y = \sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$$

$x^2-12x+2(y^2-2y)+20=0.$

$x^2-2\cdot6\cdot x+6\cdot6-6\cdot6+2(y^2-2y+1)-2+20=0$

$(x-6)^2+2(y-1)^2=36+2-20$

$(x-6)^2+2(y-1)^2=18.$

$xy-6y-x+6=+y(x-6)-(x-6)=(x-6)(y-1)$

$x-6y=(x-6)-6(y-1)$

$(x-6)-6(y-1)=\sqrt{(x-6)(y-1)}.$

$(x-6)^2-12(x-6)(y-1)+36(y-1)^2=(x-6)(y-1)$

$(x-6)^2-13(x-6)(y-1)+36(y-1)^2=0.$

Заменим $x-6$ на a

$y-1$ на b.

$$\begin{cases} a^2+2b^2=18. \\ a-6b=\sqrt{ab} \end{cases}$$

$a^2-12ab+36b^2=ab.$

$a^2-13ab+36b^2=0.$

$a=\dfrac{13\pm\sqrt{13^2-36\cdot4}}{2}\cdot b=\dfrac{13\pm5}{2}\cdot b$

$$\begin{cases} \left[\begin{aligned} &a=9b; \\ &a=4b; \end{aligned}\right. \\ \cancel{a=\sqrt{\dfrac{18}{2b^2}}=\dfrac{9}{b}.} \quad a=\sqrt{18-2b^2} \end{cases}$$

Если $9b=\sqrt{18-2b^2}$

$81b^2=18-2b^2$

$83b^2=18.$

$b=\pm\sqrt{\dfrac{18}{83}}$

Проверка: $a=9b.$

$ab>0.$

$a-6b>0.$

$9b-6b>0$

$3b>0$

$\Downarrow$

$b>0.$ $b=\sqrt{\dfrac{18}{83}}.$

Если $4b=\sqrt{18-2b^2}$

$16b^2=18-2b^2$

$b=\pm1.$

Проверка: $a=4b.$

$ab>0.$

$a-6b>0.$

$4b-6b>0$

$-2b>0$

$b<0.$

$b=-1.$

Ответ: $y=\sqrt{\dfrac{18}{83}}+1$, $x=9\cdot\sqrt{\dfrac{18}{83}}+6.$ $y=0$, $x=2.$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №6.

$8x - 6|2x-1| \leq ax + b \leq -8x^2 + 6x + 7.$

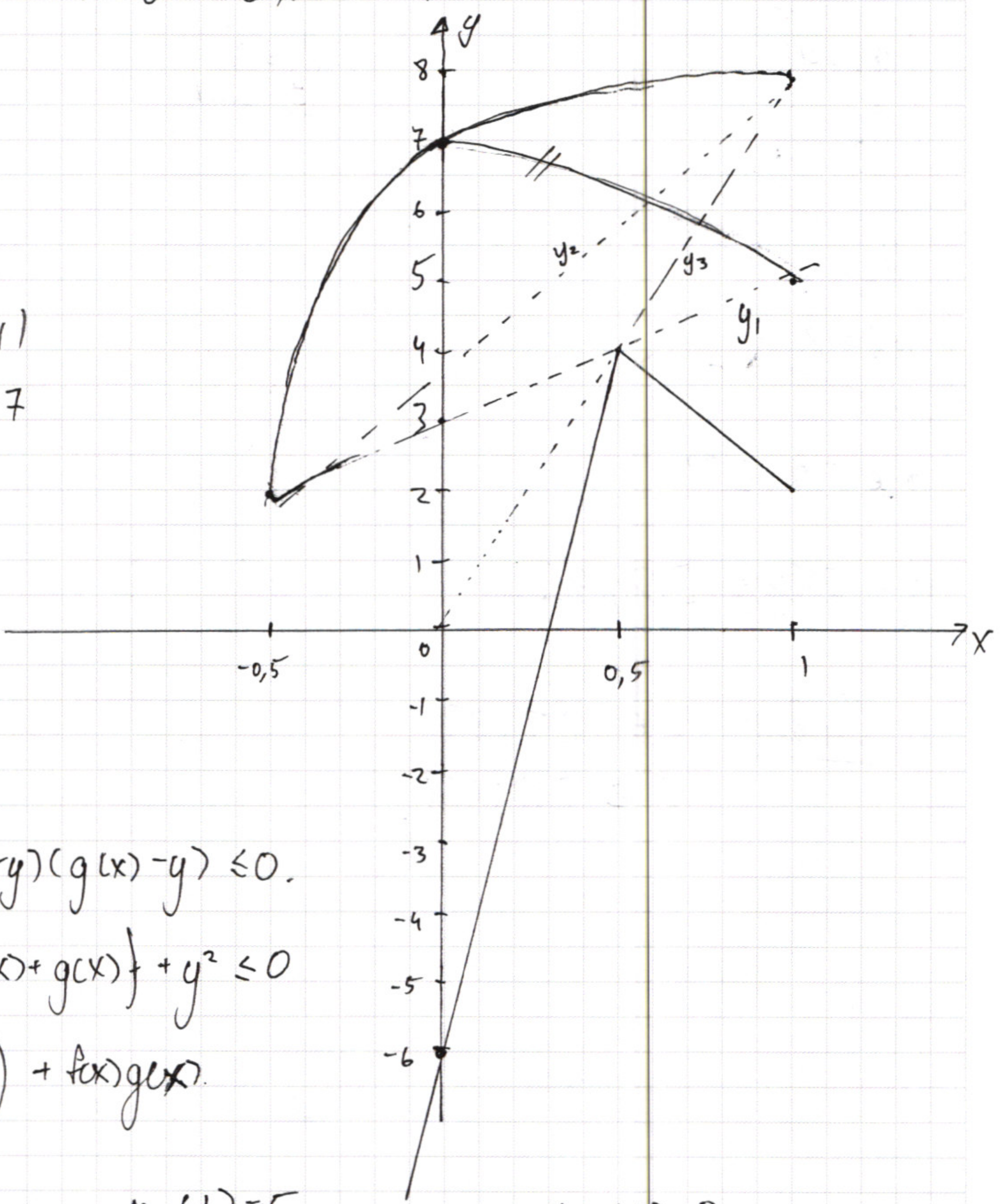
$x \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right].$

обозначим за:

$f(x) = 8x - 6|2x-1|$

$g(x) = -8x^2 + 6x + 7$

$y = ax + b.$



$f(x) - y \leq 0$

$g(x) - y \geq 0$

$\Downarrow$

$(f(x) - y)(g(x) - y) \leq 0.$

$f(x)g(x) - y\left(f(x) + g(x)\right) + y^2 \leq 0$

$y^2 - y\left(f(x) + g(x)\right) + f(x)g(x)$

$y_2(-0,5) = 2$ $\quad$ $y_1(1) = 5$ $\quad$ $y_3(0) = 0$

$y_2(1) = 8.$ $\quad$ $y_1(-0,5) = 7.$ $\quad$ $y_3(1) = 8.$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 9
(Нумеровать только чистовики)

$a_2 x + b_2 = 2 \quad x = -0{,}5$

$$-\begin{cases} -0{,}5a_2 + b_2 = 2 \\ a_2 + b_2 = 8 \end{cases}$$

$-1{,}5a_2 = -6$

$a_2 = \frac{6}{1{,}5}$

$\boxed{\begin{matrix} a_2 = 4 \\ b_2 = 4 \end{matrix}}$

$$-\begin{cases} a_1 \cdot 1 + b_1 = 5 \\ +a_1 \cdot 0{,}5 + b_1 = 2 \end{cases}$$

$+1{,}5a_1 = 3$

$a_1 = \frac{3}{+1{,}5}$

$\boxed{\begin{matrix} a_1 = 42 \\ b_1 = 3 \end{matrix}}$

$\boxed{\begin{matrix} b_3 = 0 \\ a_3 = 8 \end{matrix}}$

$a \in [8; 2]$.

$b \in$ ~~[illegible]~~ $[0; 4]$.

<u>**Ответ:**</u> $a \in [2; 8]$

$b \in [0; 4]$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~6~~

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0. \end{cases}$$

$(x-6)^2+2(y+1)^2=18$

$$\boxed{x^2-12xy+36y^2=6-x-6y+xy.}$$

$x^2-12x+20=2y^2+4y.$

$(x-6)^2+16=2y^2+4y$

$\cancel{(x-6-4)(x-6+4)=2y^2+4y}$

$\cancel{(x-10)(x+2)}$

$(x-6)^2+16=2y^2+4y.$

$x-6=\sqrt{2y^2+4y-16}$

$x=6+\sqrt{2(y^2+2y-8)}$

$x^2-12xy+36y^2=6-x-6y+xy.$

$x^2+36y^2-13xy-6+x+6y=0.$

$9xy+4xy$ $\qquad 2\cdot 3\cdot y.$

$(x^2\pm 2\cdot 2xy+4y^2)=x^2+16y^2+4xy.=(x-2y)^2+$

$\cancel{x^2-x+6y}$

$x^2-12xy+36y^2-6+x+6y-xy=0.$

$\cancel{x^2}-12xy+36y^2-6+x+6y-xy$

$+$

$\cancel{x^2}+2y^2-12x-4y+20$

$34y^2+10y-13xy+13x-26=0.$

34 $\qquad$ 3^2

$25+9.$ $\qquad$ $16+6$

$25y^2+9y^2+10y-13xy-13x-26=0.$

$(25y^2+10y+1)-13xy-13x-27=0.$

$(25y^2+10y+1)-27=x(13y-13)$

$x=\dfrac{(5y+1)^2-27}{13(y-1)}$ $\qquad 4$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$8x+6(2x-1)$

$8x+12x-6=20x-6.$

$8x-6(2x+1)$

$8x-12x+6=6-4x$

$25+24.$

$\cancel{8x+12x=}$

$8x-12x+6$

$\cancel{8x}\ \ 6-4x$

$8x+12x-6=20x-6$

$-8\cdot 0{,}25-6\cdot 0{,}5+7=$

$=-2-3+7=2.$

$f(3)=1$

$f(4)=f(2\cdot 2)=f(2)+f(2)=2.$

$f(5)=f(5)+f(1)=\left[\frac{5}{2}\right]=2\left[\frac{5}{2}\right]+f(1)$

$f(1)=0.$

$f(6)=f(2)+f(3)=1+1=2.$

$f(7)=3$

$f(8)=f(4)+f(2)=2+1=3$

$f(9)=f(3)\cdot 2=\boxed{2}$

$f\left(\frac{x}{y}\right)<0=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)$

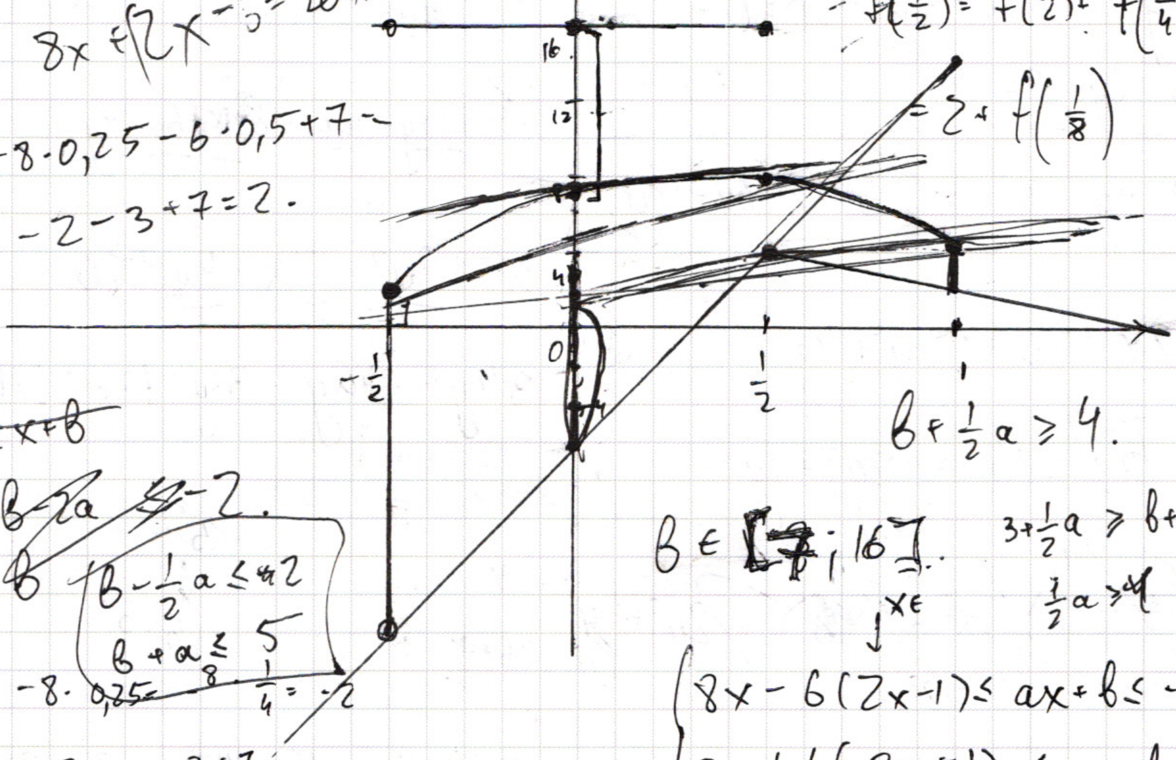
$f(1)=0\Rightarrow f(2)+f\left(\frac{1}{2}\right)=$

$1+f\left(\frac{1}{2}\right)=0.$

$=0\cdot f\left(\frac{1}{2}\right)=-1$

$-f\left(\frac{1}{2}\right)=f(2)+f\left(\frac{1}{4}\right)=1+f\left(\frac{1}{4}\right)=$

$=2+f\left(\frac{1}{8}\right)$



$\cancel{ax+b}$

$\cancel{b-2a\le -2.}$

$b-\frac{1}{2}a\le 2$

$b+a\le 5$

$-8\cdot 0{,}25=-8\cdot\frac{1}{4}=-2$

$-2\ \ \pm 3+7$

$-2-3+7=2$

$-2+3+7=8$

$-8+6+7=$

$b+\frac{1}{2}a\ge 4.$

$b\in[7;16].$

$3+\frac{1}{2}a\ge b+\frac{1}{2}a\ge 4$

$\frac{1}{2}a\ge 1\quad \boxed{a\ge 2}$

$x\in$

$$\begin{cases}8x-6(2x-1)\le ax+b\le -8x^2+6x+7.\\ 8x+6(2x-1)\le ax+b\le -8x^2+6x+7.\end{cases}$$

$2b-a\le 4$

$b+a\le 5$

$3b\le 9$

$\boxed{b\le 3}$

$\boxed{\begin{matrix}a\ge 2\\ b\le 3\end{matrix}}.$

$x^2+2y^2-12x+4y+20=0.$

$(x-6)^2=x^2-12x+36-36.$

$2y^2+4y=2(y^2+2y)=2(y^2+2y+1)-2$

$x^2-12x+36-36+2(y^2+2y+1)-2+20=0.$

$(x-6)^2+2(y+1)^2=18.$

$18=(3\sqrt{2})^2$

-38
$+20$

$8+36$

$\underbrace{6+4}_{10}+8+6+9+8$

10, 18, 24, 33, 41

$\underbrace{6+4}_{10}+\underbrace{2+2+4}_{8}$

$12+12$

4
36
34
48
6
9
20
8

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6}$

Пусть $t = x-xy+6y$.

$(x-6y)=\sqrt{6-t}$.

$x^2-12xy+36y^2=6-t$.

$x^2-12xy+36y^2= 6+xy-x-6y$

$(6-x) - y(6-x)$

$\sqrt{(6-x)(1-y)}$

$x-6y=$

$\sqrt{ab}$.

$13 \cdot 13 = 39$, 13

12^2: $36 \cdot 4 = 144$

$(x-6)-6b$.

$169-144=25$

добить!

~~1~~ ~~2~~ ~~3~~ ~~4~~ 5 6 ~~7~~

$$-8\cdot\frac{1}{4}+6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+7.$$

$$-2-3+7=2.$$

$$-8\cdot\frac{1}{4}+6\cdot\frac{1}{2}+7=$$

$$=-2+3+7=8.$$

$$\frac{6}{1,5}\qquad\frac{3}{2}.$$

$$\frac{6\cdot 2}{3}=4.$$

$$\frac{3\cdot 2}{3}=2.$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y = 900 - 3x$

$151 \times 3 = 453$

$900 -$

224×3

$y + x > 2x$

$900 - 2x > 2x \to 900 > 4x$

$3x > 900 - 3x \to 900 < 6x$

$900 - x > x$ $\quad 900 > 2x.$

$\cancel{900}$

$x < \frac{900}{4}$

$\frac{9}{4} = 2\frac{1}{4} = 2{,}25$

$x > \frac{900}{6}$ 150

$\boxed{\begin{matrix} x > 150 \\ x < 225 \end{matrix}}$

151

$224.$

$\boxed{50 + 24 = 74}$

$8x - 12x + 6 \le ax + b \le -8x^2 + 6x + 7.$

$F(x) = (8x - 12x + 6 - ax - b)(-8x^2 + 6x + 7 - ax + b) \le 0.$

$\cancel{(-8x^3 + 48x + 56x - 8ax^2 + 8xb}$

1	2	3	4	5	6	7
2	4	4	5	5	5	5
↓	↓		↓	↓		↓
2	2/4		5	2		5

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$x^2-12xy+36y^2= xy-6y-x+6$

$x^2-13xy+36y^2+6y+x-6=0$

x^2-12x

$x^2+2y^2-12x-4y+20=0.$

$(x-6)^2+2(y+1)^2=18$

$x^2-9xy-4xy+36y^2+6y+x-6=0.$

$\cancel{x^2-12xy}$

$36y^2+6y$

$3y^2+6y+9$

$35y^2$

$9y^2+6y+1$

$25y^2$

$\cancel{x^2-18\,2\cdot4{,}5xy}$

$xy-6y-x+6=x^2+36y^2-12xy.$

$6-(x-xy+6y)$

$x^2-9xy-4xy+36y^2+6y+x-6.$

$6y(1+6y+2x$

$-t^2 = t\cdot(-t)=$

$xy-6y-x=-t.$

$=$

$t=6y+4-xy.$

$t^2 = (6y-xy+x)(6y-xy+x)=36y^2-6xy^2+6xy-6xy^2+x^2y^2-\cancel{x^2y^4}$

$+6xy+\cancel{x^2y}+x^2$

$\cancel{x^2=36y^2+12xy}$

$36y^2-12xy^2+12xy+x^2y^2+x^2$

$9-\frac{9}{4}=9-2\cdot\frac{1}{4}=9-2{,}25=$

$\frac{36-9}{4}=\frac{27}{4}=\frac{3\sqrt{3}}{2}.$

$\frac{7}{\sqrt{2}}.$

$\frac{49}{2}+\frac{27}{4}=\frac{98+27}{4}$

$\frac{49}{8}+$

$=$

$98+27=$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(1+2\sqrt{3}+\sqrt{7})(1-2\sqrt{3}+\sqrt{7})$.

$1-\cancel{2\sqrt{3}}+\sqrt{7}+\cancel{2\sqrt{3}}-4\cdot 3+\cancel{2\sqrt{21}}+\sqrt{7}-\cancel{2\sqrt{21}}+7$.

-4

$\boxed{2\sqrt{7}-4}$.

$(2\sqrt{3}-1+\sqrt{7})(1+2\sqrt{3}-\sqrt{7})=$

$=\cancel{2\sqrt{3}}+4\cdot 3-\cancel{2\sqrt{21}}-1-\cancel{2\sqrt{3}}+\sqrt{7}+\sqrt{7}+\cancel{2\sqrt{21}}-7$

-8

4

$y+x>2x$

$2x+x>y$

$3x>y$.

$2x+y>x$

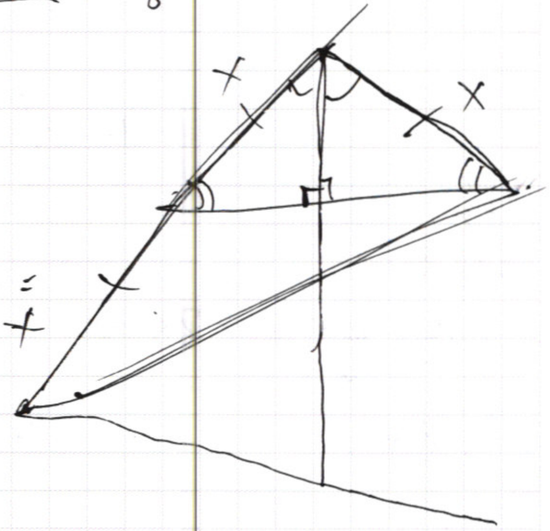
$4\sqrt{7}$.

$(2\sqrt{7}-4)(2\sqrt{7}+4)=4\cdot 7-16=$

$4\cdot 7=28$

-16

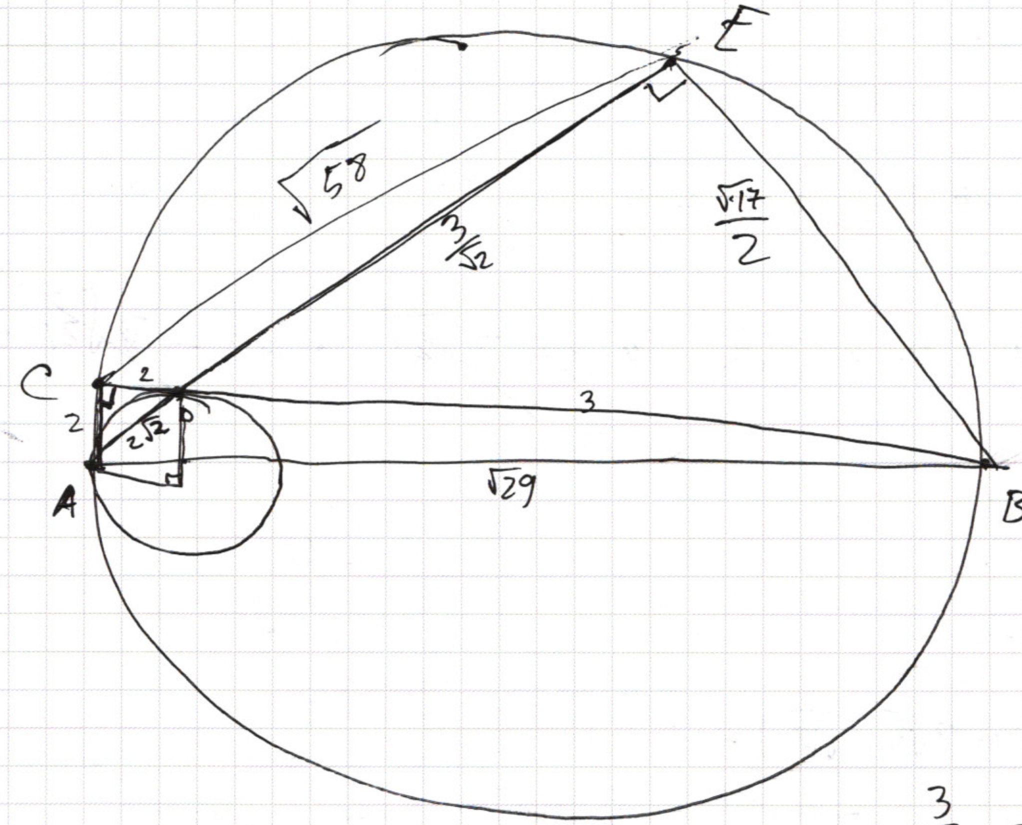
$4(7-4)=$



$P=3x+y=900$ ~~1~~ 2 3 4 ~~5~~ 6 ~~7~~

$y=900-3x$ ~~2~~ 4 4 ~~5~~ 8 5 ~~3~~

2.



$\frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$

AB - диаметр.

$AB = \sqrt{25+4}$

$\sqrt{4+4}$

$6 = 2\sqrt{2} \cdot x$

$x = \frac{2 \cdot 3}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$

$9 - \frac{9}{4} = \frac{26-9}{4} = \frac{17}{4}.$

$\frac{29}{2}$

$\sqrt{58}$

$xy - 6y + x \quad -2x + 6.$

$x^2 +$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

ЧЕРНОВИК.

$2+4+4+5+5+5+5=$

2, 8, 20

10, 20.

Итого 30.

Надо набрать 20. + 5. −0.

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)$

0.

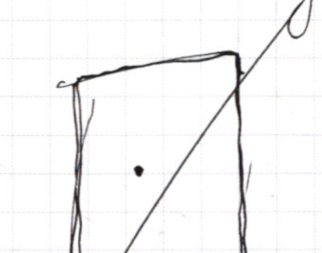
$\boxed{x}$.

$f\left(\frac{2}{2}\right)=f(1)$

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0. \end{cases}$$

$f(1)=f(2)\cdot f\left(\frac{1}{2}\right)$

$(x-6y)^2=x^2-12xy+36y^2=xy-6y-x+6$



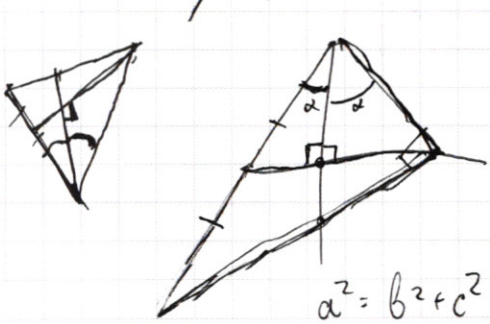
a, b, c

a, aq, aq^2

$$aq^3=\frac{2b\pm\sqrt{4b^2-4ac}}{2a}$$

$$aq^3=\frac{2aq\pm\sqrt{4\cdot a^2\cdot q^2-4\cdot a\cdot aq^2}}{2a}$$

$aq^3=q \Rightarrow$ $aq^2=1$ $c=1$

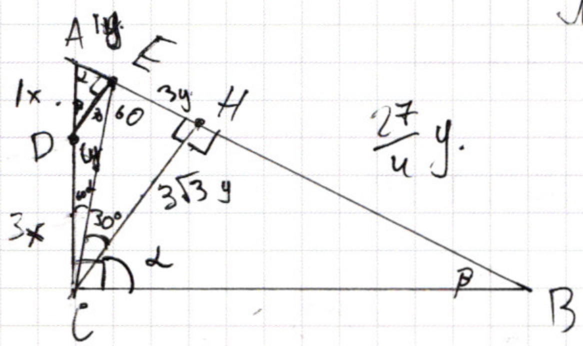


$a^2=b^2+c^2$.

$a+b+c=900$.

$1x^2+1y^2=\left(\frac{3\sqrt3}{4}\right)^2y^2$

№4 – решабельно.



$\frac{27}{4}y.$

$\sin\alpha=\frac{DE}{AD}$

$tg\alpha=\frac{DE}{AD}\cdot\frac{AD}{AE}=\boxed{\frac{DE}{AE}}.$

$\cos\alpha=\frac{AE}{AD}$

$3AD=AC$

$CH^2=AH\cdot HB$

$60+\beta>90.$

$\alpha+\beta=90.$

$90-30-\alpha=60-\alpha.$

$\alpha<60.$

$180-(60-\alpha)-30=120+\alpha-30=90+\alpha.$

$\sqrt{36y^2-9y^2}=y3\sqrt3$

$\frac{60}{4}=1,5.$

$27=4\cdot\cancel{x}HB$

$HB=\frac{27}{4}=$

$\sqrt{12}=2\sqrt3$

$8x-6\sqrt{2x-11}\le ax+b.$

$\frac{4}{3}+1=\sqrt{\frac{7}{3}}.$

$-8x^2+6x+7\geqslant ax+b.$

$x^2-12xy+36y^2=6-x-6y-xy.$

$x^2+2y^2-12x+4y+20=0.$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

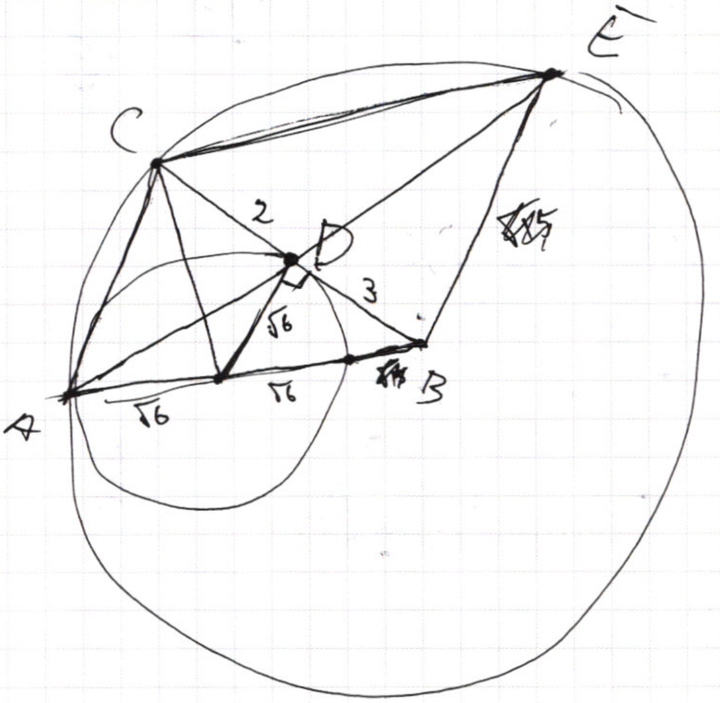
$x^2+36y^2-9xy-4xy-6+x+6y=0.$

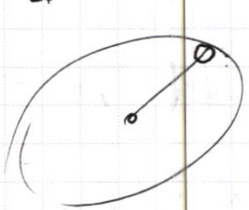
$\cancel{6y(6y+1)}$

$\sqrt{6}$ $9+6=16$

$\underbrace{x^2-4xy+4y^2}+16y^2+16y^2-9xy-6+x+6y=0.$

$x^2+36y^2-13xy-6+x+6y=0$





$2+4=6$

$+5+5+5=15$

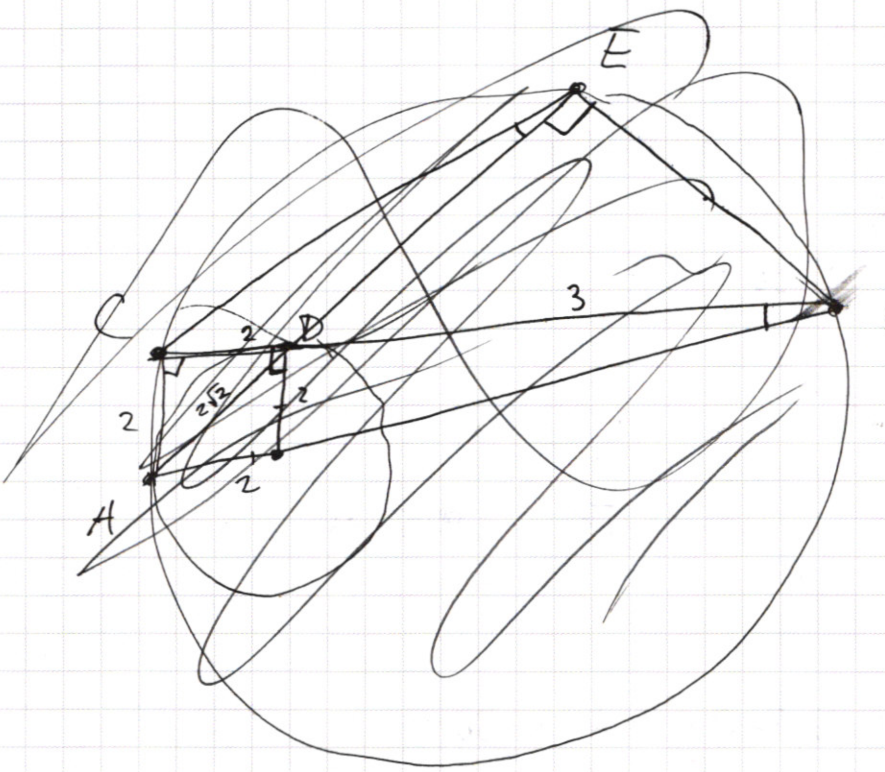
$21.$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$+\frac{2}{5}$

$+5$

$8x-6(2x-1)\le ax+b.$

$8x+6(2x-1)\le ax+b.$

$-8x^2+6x+7\ge ax+b.$

$f\left(\frac{1}{y}\right)=f(1)+f\left(\frac{1}{y}\right)=f($

$-8x^2+x(6-a)+7+b\ge 0$

$8x^2+x(a-6)+b-7\le 0.$

$f(1)=f\left(\frac{1}{y}\right)+f(y)$

$x_{12}=\dfrac{6-a\pm\sqrt{(a-6)^2-4\cdot 8\cdot(b-7)}}{16}$

$f(y)+f(1)=f(y).$

$\Downarrow$

$f(1)=0,\quad f\left(\frac{1}{y}\right)=-f(y).$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y).$

$f(4)=f(2)+f(2)$ $\qquad \frac{5}{2}$