МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$b^2 = ac$ d – четвертый член г.п.

$c^2 = bd$

$ax^2 + 2bx + c = 0$

$D = 4b^2 - 4ac$ $\sqrt{D} = 2\sqrt{b^2 - \underset{b^2}{ac}} = 0$

$d = -\frac{\cancel{2}b}{2a} = -\frac{b}{2a}$

$c^2 = -\frac{b^2}{2a} = -\frac{\cancel{a}c}{2\cancel{a}} \Rightarrow 2c^2 + c = 0$

$c(2c+1) = 0$ $\left[\begin{array}{l} c = 0 \\ c = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$

Ответ. $0; -\frac{1}{2}$

№3.

$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0; \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} y - 2 - 2(x-1) = \sqrt{-(y-2) + x(y-2)}, \\ y^2 - 4y + 4 + 2(x^2 - 2x + 1) - 3 = 0; \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} y - 2 - 2(x-1) = \sqrt{(y-2)(x-1)}, \\ (y-2)^2 + 2(x-1)^2 = 3; \end{cases}$ $y - 2 = a$, $x - 1 = b$

$a \geq 2b$

$\begin{cases} a - 2b = \sqrt{ab}, \\ a^2 + 2b^2 = 3; \end{cases} \Rightarrow$ $a^2 - 4ab + 4b^2 = ab$

$a^2 - 5ab + 4b^2 = 0$

$D = 25b^2 - 16b^2 = 9b^2$ $\sqrt{D} = 3b$

$a_1 = \frac{5b - 3b}{2} = b$ $a_2 = \frac{5b + 3b}{2} = 4b$

$$\left[\begin{array}{l} a_1 = b, \text{ – по усл-ю } a \geqslant 2b \Rightarrow \text{не подходит} \\ a_2 = 4b; \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 4b, \\ a^2 + 2b^2 = 3; \end{cases} \qquad \begin{array}{l} 16b^2 + 2b^2 = 3 \\ b^2 = \frac{1}{6} \\ b = \pm\frac{\sqrt{6}}{6} \end{array}$$

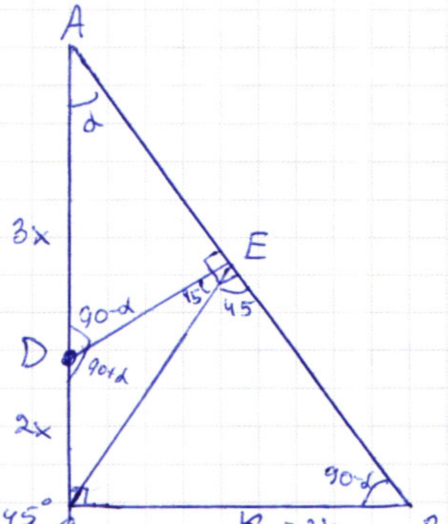
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = \frac{2\sqrt{6}}{3}, \\ b = \frac{\sqrt{6}}{6}; \end{cases} \text{ (1)} \\ \begin{cases} a = -\frac{2\sqrt{6}}{3}, \\ b = -\frac{2\sqrt{6}}{3}; \end{cases} \text{ (2)} \end{array}\right.$$

(1) $\begin{cases} y - 2 = \frac{2\sqrt{6}}{3} \\ x - 1 = \frac{\sqrt{6}}{6}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 + \frac{2\sqrt{6}}{3}, \\ x = 1 + \frac{\sqrt{6}}{6}. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} y - 2 = -\frac{2\sqrt{6}}{3}, \\ x - 1 = -\frac{\sqrt{6}}{6}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 - \frac{2\sqrt{6}}{3} \\ x = 1 - \frac{\sqrt{6}}{6} \end{cases}$

Ответ. $\left(1 + \frac{\sqrt{6}}{6}; 2 + \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$; $\left(1 - \frac{\sqrt{6}}{6}; 2 - \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$

№4



~~Дано:~~

$\triangle ABC$; $\frac{AD}{AC} = \frac{3}{5}$; $DE \perp AB$;

$\angle CED = 45°$

Найти: $tg(\angle BAC)$ – ?

Р-е:

а) Пусть $tg(\angle BAC) = tg\,\alpha$

т.к $\angle CED = 45° \Rightarrow \angle CEB = 90 - 45 = 45°$

Рассмотрим $\triangle DEC$ и $\triangle CEB$:

По т. синусов: $\frac{DC}{\sin 45°} = \frac{EC}{\sin(90+\alpha)}$; $\frac{BC}{\sin 45°} = \frac{EC}{\sin(90-\alpha)}$

$EC = \frac{\sin(90+\alpha)\,DC}{\sin 45°}$; $EC = \frac{\sin(90-\alpha)\,BC}{\sin 45°}$

$\sin(90+\alpha)\,2x = \sin(90-\alpha)\,k$ $\qquad$ $BC = k$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \sin\frac{\pi}{2}\cos\alpha + \cos\frac{\pi}{2}\sin\alpha = \cos\alpha$

$\cancel{\cos\alpha} \cdot 2x = \cancel{\cos\alpha}\, k$

$k = 2x \Rightarrow BC = 2x$ $\qquad$ $tg\,\alpha = \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

б) $AC=\sqrt{29}$ $\quad S_{CDE}$ — ?

Р-е:

1) $AC = 5x = \sqrt{29} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{29}}{5} \Rightarrow BC = \frac{2}{5}\sqrt{29}$

$AB^2 = AC^2 + BC^2$ (по т. Пифагора)

$25x^2 + 4x^2 = AB^2 \Rightarrow AB = x\sqrt{29}$

$AB = \frac{\sqrt{29}\cdot\sqrt{29}}{5} = \frac{29}{5}$

2) $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ (по 3 углам)

$\frac{AD}{DE} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{3x}{DE} = \frac{\cancel{x}\sqrt{29}}{2\cancel{x}}$; $DE = \frac{6}{\sqrt{29}}x = \frac{6}{\cancel{\sqrt{29}}}\cdot\frac{\cancel{\sqrt{29}}}{5} = \frac{6}{5}$

3) Рассмотрим $\triangle CDE$:

По т. косинусов: $DC^2 = DE^2 + CE^2 - 2DE\cdot CE\cos 45^\circ$

$\frac{4\cdot 29}{25} = \frac{36}{25} + CE^2 - \cancel{2}\frac{6}{5}CE\cdot\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}$ $\qquad CE = f$

$\cancel{CD}$ $\quad f^2 - f\frac{6}{5}\sqrt{2} - \frac{80}{25} = 0$

$D = \frac{36}{25}\cdot 2 + \frac{80\cdot 4}{25} = \frac{392}{25}$ $\qquad \sqrt{D} = \frac{14}{5}\sqrt{2}$

$$\left[\begin{array}{l} f_1 = \dfrac{\frac{6}{5}\sqrt{2} - \frac{14}{5}\sqrt{2}}{2} < 0 \\ f_2 = \dfrac{\frac{6}{5}\sqrt{2} + \frac{14}{5}\sqrt{2}}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \end{array}\right.$$

$S_{CED} = \frac{1}{2}\sin 45\cdot DE\cdot CE = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{6}^{3}}{5}\cdot\cancel{2}\sqrt{2} = \frac{3\cdot 2}{5} = \frac{6}{5}$

Ответ: а) $tg(\angle BAC) = \frac{2}{5}$; б) $S_{CDE} = \frac{6}{5}$

№2.

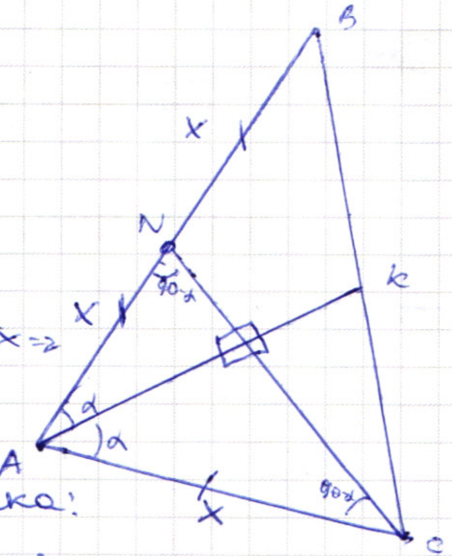
$P = 1200$; $l \perp m$

Р-е:

ΔANC – р/б (по $\frac{\text{углам}}{\text{бисс.}}$)

Пусть $AB = 2x$; $AC = x$ =>

=> $BC = 1200 - 3x$



По св-ву треугольника:

$$\begin{cases} AB + BC > AC, \\ BC + AC > AB, \\ AC + AB > BC; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 1200 - 3x > x, \\ 1200 - 3x + x > 2x, \\ x + 2x > 1200 - 3x; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x < 600, \\ x < 300, \\ x > 200; \end{cases} \Rightarrow x \in (200; 300)$$

Кол-во тр-ов: $101 - 2 = 99$.

Ответ. 99.

№7.

$f(ab) = f(a) + f(b)$; $f(p) = [p/2]$

f – определена на мн-ве положит. чисел.

Найти: Кол-во пар, при $1 \le x \le 21$

$1 \le y \le 21$ и $f(x/y) < 0$

Р-е:

$f(1) = f(1) + f(1)$

$f(1) = 0$

$f(2 \cdot \frac{1}{2}) = f(2) + f(\frac{1}{2})$

$0 = 1 + f(\frac{1}{2})$ $f(\frac{1}{2}) = -1$ $f(2) = [\frac{2}{2}] = 1$

Аналогично: $f(\frac{1}{3}) \dots f(\frac{1}{21}) < 0$ Пар – 20

$f(\frac{2}{3}) = f(2) + f(\frac{1}{3}) = 1 - 1 = 0$; $f(\frac{2}{4}) = f(\frac{1}{2})$ =>

=> $f(\frac{2}{4}) \dots f(\frac{2}{21}) < 0$ Пар – 18

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Аналогично: $f\left(\frac{3}{6}\right) \ldots f\left(\frac{3}{21}\right) < 0$ пар - 16

$S_n = \frac{2+20}{2} \cdot 10 = 22 \cdot 5 = 110$

Ответ. 110

№6.

$2x^2 - x - 1 \leq ax + b \leq x + |2x-1|$

$$\begin{cases} ax+b \geq 2x^2 - x - 1, \\ x + |2x-1| \geq ax + b, \\ x + |2x-1| \geq 2x^2 - x - 1; \end{cases}$$

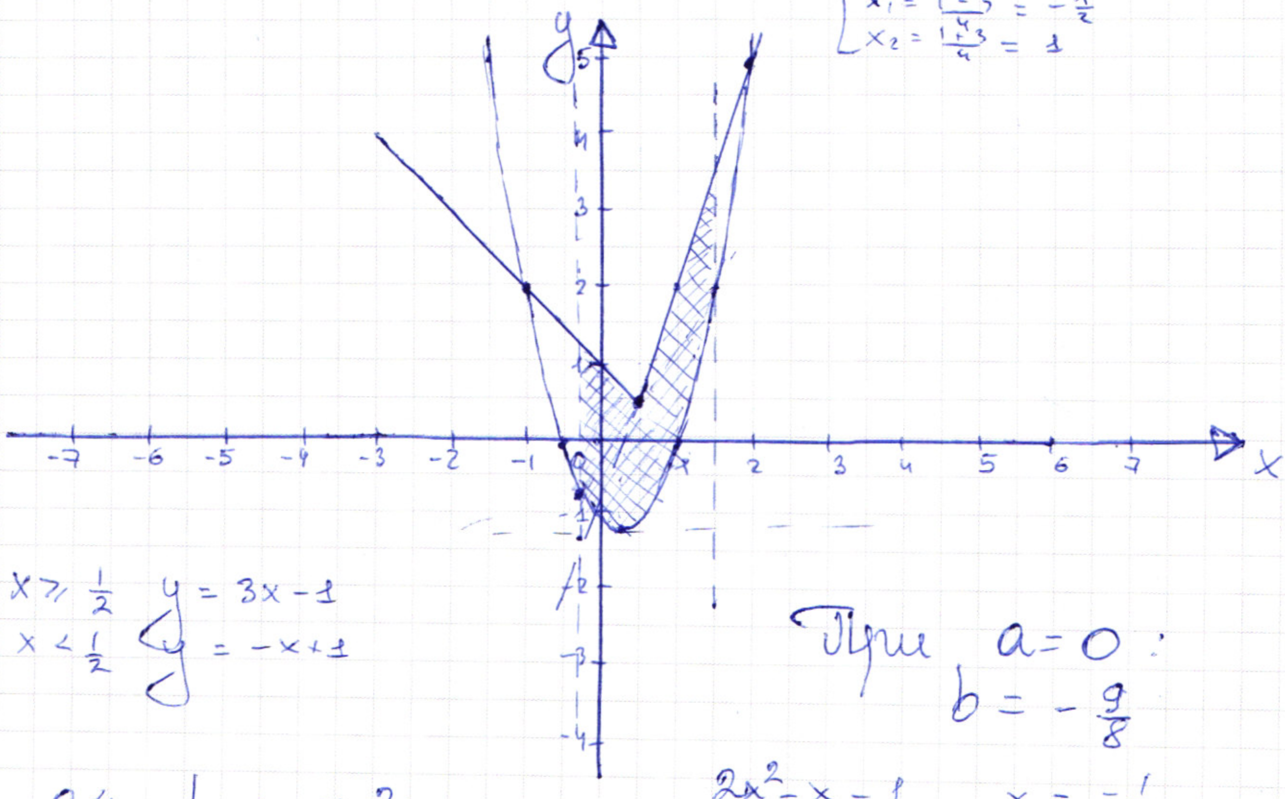
$x \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$

$2x^2 - x - 1 = 0$

$x_в = \frac{1}{4}$ $y_в = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{9}{8}$

$D = 1 + 8 = 9$ $\sqrt{D} = 3$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2} \\ x_2 = \frac{1+3}{4} = 1 \end{array}\right.$$



$x \geq \frac{1}{2}$ $y = 3x - 1$

$x < \frac{1}{2}$ $y = -x + 1$

При $a = 0$:

$b = -\frac{9}{8}$

~~$ax + b = 2x^2 - x - 1$~~

$2x^2 - x - 1$, $x = -\frac{1}{4}$

$y = 2 \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{4} - 1 = \frac{3}{8} - \frac{8}{8} = -\frac{5}{8}$

$t_1 = \left(-\frac{1}{4}; -\frac{5}{8}\right)$ $t_2 = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \qquad \frac{x + \frac{1}{4}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = \frac{y + \frac{5}{8}}{\frac{1}{2} + \frac{5}{8}}$$

$$\frac{4\left(x + \frac{1}{4}\right)}{3} = \frac{8\left(y + \frac{5}{8}\right)}{9}$$

$$12x + 3 = 8y + 5 \Rightarrow 8y = 12x - 2$$

$$y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{4} \Rightarrow a = \frac{3}{2} \quad b = -\frac{1}{4}$$

Ответ. $\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{4}\right)$

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 6

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

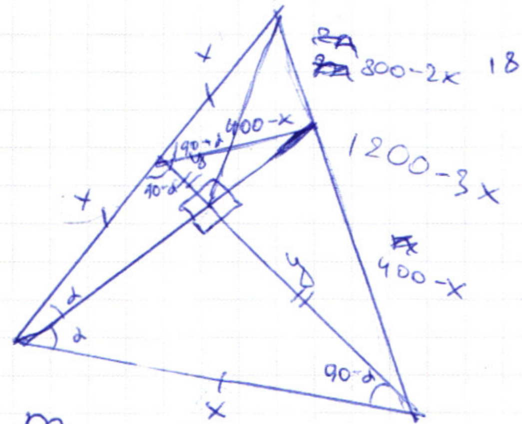
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

I



$180-(90-\alpha)=90+\alpha$

$P=1200$

$\frac{2x}{x}=\frac{m}{n}=2 \quad m=2n$

№3.

$-(y-2)+x(y-2)=$
$=(y-2)(x-1)$

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

$y-2=a$
$x-1=b$

$y^2-4y+4+2(x^2-2x+1)-3=0$

$(y-2)^2+2(x-1)^2=\cancel{0}\,3$

$y-2-2x+2=y-2-2(x-1)$

$$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ a^2+2b^2=3 \end{cases}$$

ОДЗ
$a-2b\geqslant 0$
$a\geqslant 2b$

$\cancel{ab=a}$ $\quad a^2-4ab+4b^2=ab$

$a^2+2b^2=3$

$3+2b^2-5ab=0$

$2b^2-5ab+3=0 \quad\quad 5ab=2b^2+3$

$\cancel{...=25a^2}$ $\quad\quad a=\frac{2b^2+3}{5b}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

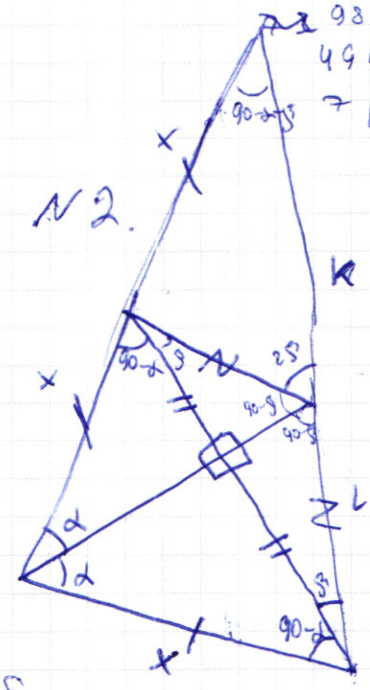
(Нумеровать только чистовики)

$5x = \sqrt{29}$ $\qquad$ $x\sqrt{29} = \frac{29}{5}$ $\qquad$ $\begin{array}{r} 29 \\ \times\ 4 \\ \hline 116 \end{array}$

$x = \frac{\sqrt{29}}{5}$ $\qquad$ $392 \,|\, \cancel{168}$

$$\begin{array}{r|l} 392 & 2 \\ 196 & 2 \\ 98 & 2 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \end{array}$$

$2^3 \cdot 7^2$



N 2.

$180-(180-2\beta)=$

$180-(2\alpha+90-\alpha+\beta)=$

$1200-3x = 90-\alpha-\beta$

$\frac{2x}{x} = \frac{k}{l}$

$$\begin{cases} 2x+1200-3x \geqslant x, \\ 2x+x \geqslant 1200-3x, \\ x+1200-3x \geqslant 2x; \end{cases}$$

$2x \leq 1200 \quad x \leq 600$

$6x \geqslant 1200 \quad x \geqslant 200$

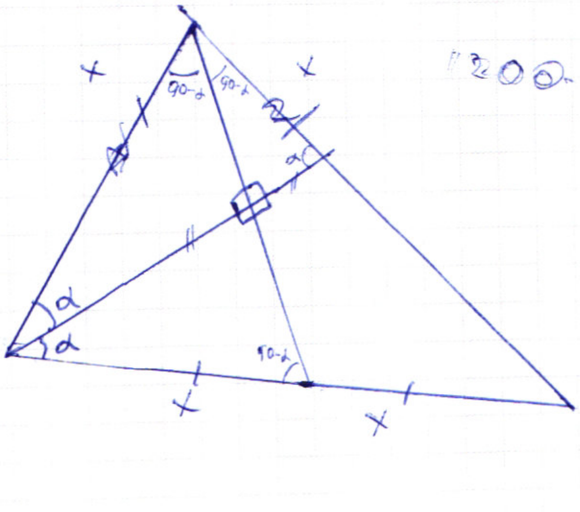
$4x \leq 1200 \quad x \leq 300$

$\boxed{x \in [200;300]}$

101

200 ; 400 ; 600

201 ; 399 ; 600



1200 - 3x

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

a, b, c $\quad b^2 = ac \quad$ $c - ?$

$ax^2 + 2bx + c = 0$ $\quad$ ~~x − z~~

d − четвертой

$D = 4b^2 - 4ac$ $\quad c^2 = bd$

$\sqrt{D} = 2\sqrt{b^2 - \underset{b^2}{ac}} = 0$

$\begin{cases} x = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a} \end{cases}$ $\quad d = -\frac{b}{a} \quad b = -ad$

$c^2 = -\frac{b^2}{a} = -\frac{\cancel{a}c}{\cancel{a}}$

$\begin{cases} c^2 = bd \\ d = -\frac{b}{a} \end{cases}$ $\quad c^2 = -\frac{b^2}{a} = -\frac{\cancel{a}c}{\cancel{a}}$

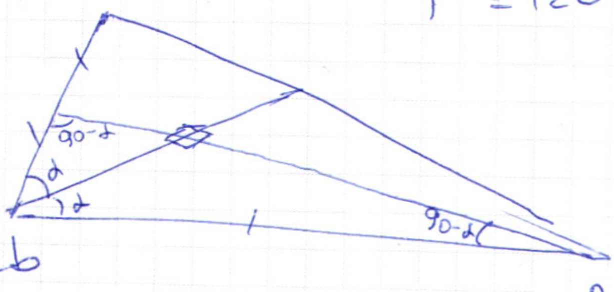
$c^2 + c = 0$

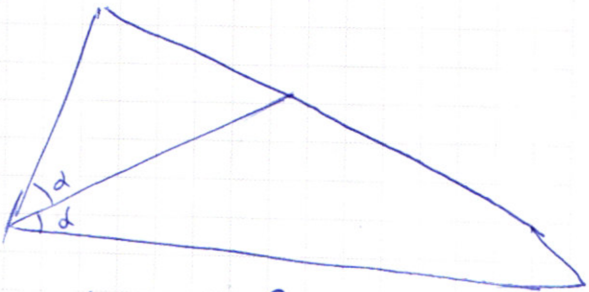
$c(c+1) = 0$ $\quad \left[\begin{array}{l} c = 0 \\ c = -1 \end{array}\right.$ $\quad$ Ответ $0; -1.$

№2.

$P = 1200$

I





$a \geq 2b$

$a^2 - 4ab + 4b^2 = ab$ $\quad a^2 - 5ab + 4b^2 = 0$

$D = 25b^2 - 16b^2 = 9b^2$

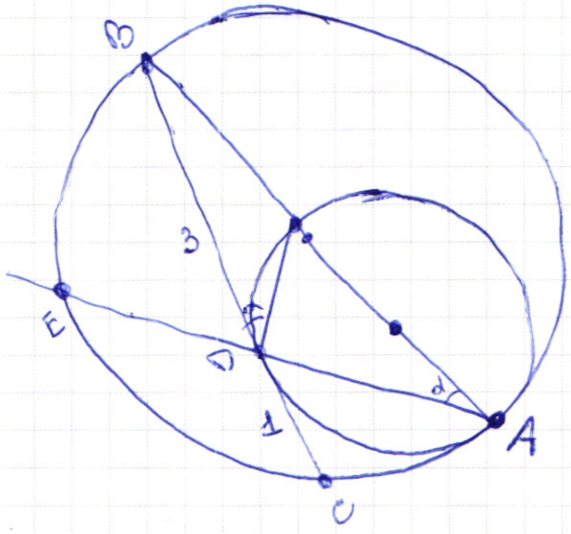
$\left[\begin{array}{l} a_1 = \frac{5b - 3b}{2} = b \\ a_2 = \frac{5b + 3b}{2} = 4b \end{array}\right.$ $\quad \sqrt{D} = 3b$

$(a-b)(a-4b) = 0$

$\left[\begin{array}{l} a = b \ (-) \\ a = 4b \ (\vee) \end{array}\right.$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



Ω - б.о.

ω - м.о.

$9 = (2r+2d)(4r+2d)$

$8r^2 + 12dr + 4d^2 - 9 = 0$

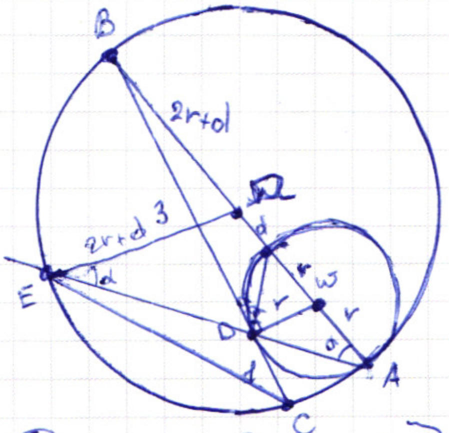
$D = 144d^2 - 32(4d^2-9) =$

$= 144d^2 - 128d^2 + 32\cdot 9 =$

$= 16d^2 - 32\cdot 9$

$\sqrt{D} = 4\sqrt{d^2-18}$

$r_1 = -12d + 4\sqrt{d^2-18}$



(I) $x \in \left[\frac{1}{2} ; \frac{3}{2}\right]$

$$\begin{cases} ax+b \geqslant (x+1)(x-2) < 0 \\ 3x-1 \geqslant ax+6 \end{cases}$$

$ax+b$

$2x^2 - x - 1 = 0$

$D = 1+8 = 9 \quad \sqrt{D} = 3$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{1-3}{2} = -1 \\ x_2 = \frac{1+3}{2} = 2 \end{array}\right.$$

$(x+1)(x-2) = 0$

$+ \quad - \quad +$

$-1 \quad 2$

< 0

$f\left(\frac{x}{y}\right) =$

$f\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{9}\right) = f\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}\right) = 2f\left(\frac{2}{3}\right)$

$2f(2) = f(4) = \quad f(2) = \frac{f(4)}{2}$

$f(1) = 0$

$f(2) = 2f(\sqrt{2}), \quad f(\sqrt{2}) = \frac{f(2)}{2}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7.

$f(ab) = f(a) + f(b)$ $\qquad f(p) = [p/2]$

$f(x/y) < 0$

$f\left(\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{y}\right) = f\left(\frac{x}{y}\right) + f(1)$ $\qquad f(1) = 0$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(\frac{x}{y}\right) + f(1)$ $\qquad f\left(\frac{1}{2}\right) =$

$f(2) = f(1) + f(2)$ $\qquad$ ~~$f(0) = f(1) + f(0)$~~

$f(2) = \left[2/2\right]^{б} = 1$ $\qquad$ ~~$f(0) =$~~

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\frac{\pi}{2}\cos\alpha + \cos\frac{\pi}{2}\sin\alpha = \cos\alpha$

$\sin\left(\alpha - \frac{3}{2}\pi\right) = -\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$

$25x^2 + 4x^2 = 29x^2$

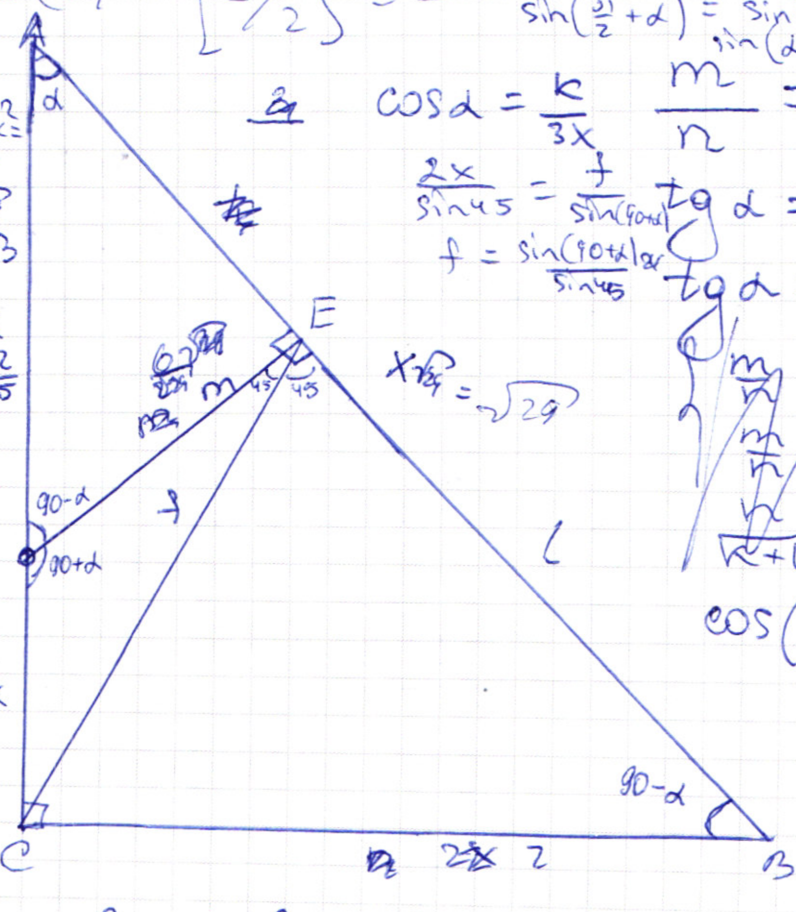
$AB = x\sqrt{29}$

$\frac{3x}{x\sqrt{29}}$ 3

$tg\alpha = 3x$

$\frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}$

$x = 1$



$\cos\alpha = \frac{k}{3x}$ $\qquad \frac{m}{n} = \frac{k}{5x} = \frac{3x}{k+l}$

$\frac{2x}{\sin 45} = \frac{f}{\sin(90+\alpha)}$ $\qquad tg\alpha = \frac{m}{3x}$

$f = \frac{\sin(90+\alpha)\cdot 2x}{\sin 45}$ $\qquad tg\alpha = \frac{n}{5x}$

$\frac{m}{n} = \frac{3x}{k+l}$ $\qquad \frac{m}{3x} = \frac{n}{k+l}$

$\frac{m}{n} = \frac{k}{5x}$ $\qquad \frac{n}{5x} = \frac{m}{k}$

$\frac{n}{k+l} = \frac{m}{k}$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\frac{\pi}{2}\sin\alpha - \sin\frac{\pi}{2}\cos\alpha = -\cos\alpha$

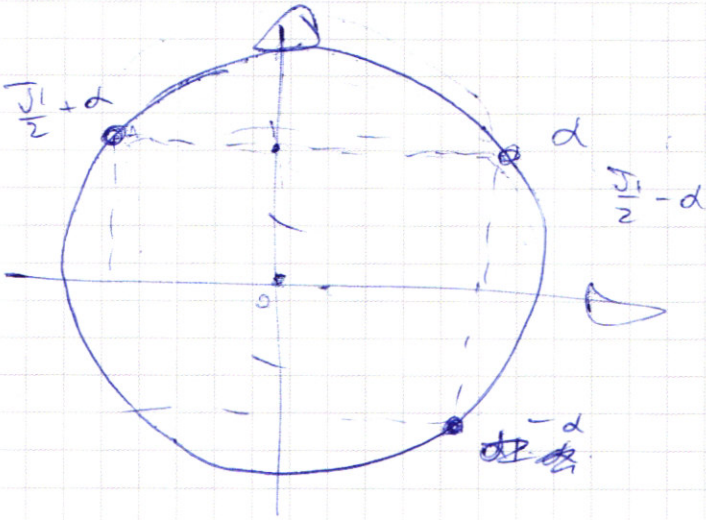
$\frac{n}{\sin 45} = \frac{f}{\sin(90+\alpha)}$

$CE^2 = m^2 + 4x^2 + 2mx\cos\alpha$ $\qquad f = \frac{\cos\alpha\, n}{\sin 45}$

$\frac{\sin(90+\alpha)\cdot 2x}{\sin 45} = \frac{\cos\alpha\, n}{\sin 45}$ $\qquad n = 2x$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №___
(Нумеровать только чистовики)



$\sin(30) = \frac{1}{2}$

$\sin(120) =$

$\sin(4\pi - 60) =$

$= -\sin(-60) =$

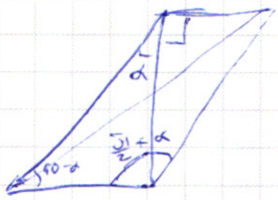
$= \sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

$\sin\alpha$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\alpha$

$\cos\alpha \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = -\cos\alpha$



$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \sin\frac{\pi}{2}\cos\alpha +$

$+ \sin\alpha\cos\frac{\pi}{2} = \cos\alpha$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$

$\frac{3}{\sqrt{29}} = \frac{m}{2} \Rightarrow m = \frac{6}{\sqrt{29}}$

$29 \cdot 4 = 116$

$4 = \frac{36}{29} + f^2 - \frac{2\cdot 6}{\sqrt{29}} f \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

$f^2 - f\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{29}} + \frac{36}{29} - 4 = 0$

$f^2 - f\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{29}} - \frac{80}{29} = 0$

$S_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{6}{\sqrt{29}}\left(6\sqrt{\frac{2}{29}} - 2\sqrt{\frac{98}{29}}\right) =$

$= \frac{6\sqrt{2}\left(6\sqrt{2}-2\sqrt{98}\right)}{2\cdot 2\cdot 29} =$

$= \frac{6\cdot 2 - 2\cdot 7\cdot 4}{2\cdot 29} =$

$= \frac{12 - 14\cdot 2}{2\cdot 29}$

$D = \frac{36\cdot 2}{29} + \frac{4\cdot 80}{29} = \frac{36\cdot 2 + 4\cdot 80}{29} =$

$= \frac{9\cdot 8 + 4\cdot 8\cdot 10}{29} \qquad \sqrt{D} = 2\sqrt{\frac{9\cdot 2 + 8\cdot 10}{29}}$

$\frac{98}{29} \qquad \sqrt{D} = 2\sqrt{\frac{98}{29}} \qquad 2\cdot 1{,}73 \approx 3{,}5$

$\left[\, f_1 = \frac{\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{29}} - 2\sqrt{\frac{98}{29}}}{2} = 2\cdot 7\sqrt{\frac{2}{29}} \right.$

$c^2 = -\frac{b^2}{2a} = -\frac{4c}{2a} = -\frac{c}{2} \qquad c^2 + \frac{c}{2} = 0$

$2c^2 + c = 0$

$c(2c+1) = 0 \qquad \left[\begin{array}{l} c = 0 \\ c = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №___

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\left[\begin{array}{l} a_1 = b \\ a_2 = 4b \end{array}\right.$ – по усл-ю $a \geq 2b$ => не подходит. (V)

$\Rightarrow \begin{cases} a = 4b, \\ a^2 + 2b^2 = 3; \end{cases}$ $\quad 16b^2 + 2b^2 = 3$, $\quad b^2 = \frac{1}{6}$, $\quad b = \pm\frac{\sqrt{6}}{6}$

$\left[\begin{array}{l} \cancel{x_1 = 1 + \frac{\sqrt{6}}{6}} \\ \cancel{x_2 = 1 - \frac{\sqrt{6}}{6}} \end{array}\right.$ =>

=> $\left[\begin{array}{l} \cancel{x_1 = \frac{6+\sqrt{6}}{6}} \\ \cancel{x_2 = \frac{6-\sqrt{6}}{6}} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} b = \frac{\sqrt{6}}{6}, \\ a = \frac{2\sqrt{6}}{3}; \end{cases} \quad (1) \\ \begin{cases} b = -\frac{\sqrt{6}}{6}, \\ a = -\frac{2\sqrt{6}}{3}; \end{cases} \quad (2) \end{array}\right.$

(1) $\begin{cases} y - 2 = \frac{2\sqrt{6}}{3}, \\ x - 1 = \frac{\sqrt{6}}{6}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 + \frac{2\sqrt{6}}{3}, \\ x = 1 + \frac{\sqrt{6}}{6}. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} y - 2 = -\frac{2\sqrt{6}}{3}, \\ x - 1 = -\frac{\sqrt{6}}{6}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 - \frac{2\sqrt{6}}{3} \\ x = 1 - \frac{\sqrt{6}}{6} \end{cases}$

Ответ. $\left(1 + \frac{\sqrt{6}}{6}; 2 + \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$; $\left(1 - \frac{\sqrt{6}}{6}; 2 - \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$

№4.

☑ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №

(Нумеровать только чистовики)

N 6.

$$\begin{cases} 2x^2 - x - 1 \le ax + b \\ ax + b \le x + |2x - 1| \end{cases} \quad x \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$$

$2x - 1 \geq 0 \quad x \geq \frac{1}{2}$

① $2x^2 - x - ax - 1 - b \le 0$

$2x^2 - x(a+1) - (b+1) \le 0$

$D = (a+1)^2 + 8(b+1)$

$ax + b \geq 2x^2 - x - 1$

$x \le \frac{b+1}{3-a}$

② $ax + b - x - |2x - 1| \le 0$

$ax - x + b - 2x + 1 \le 0$

$ax - 3x + b + 1 \le 0$

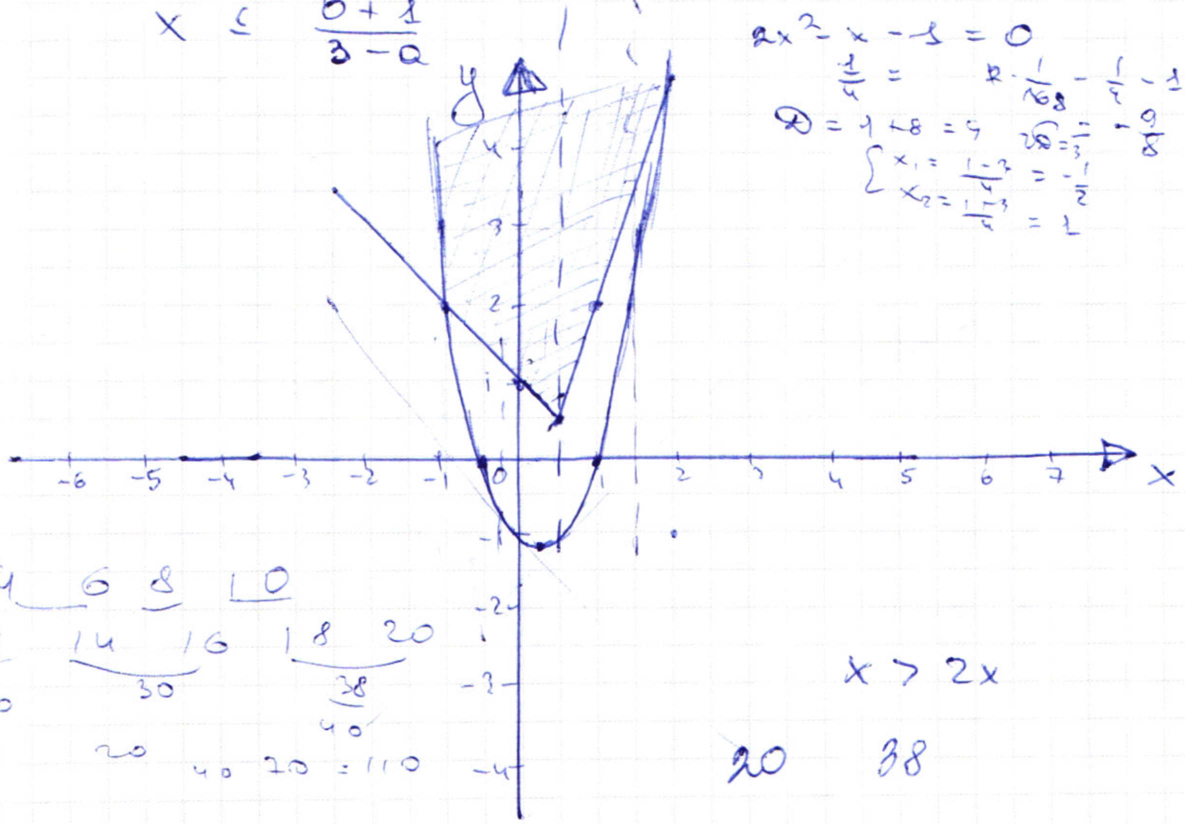
$x(a-3) + b + 1 \le 0$

$2x^2 - x - 1 = 0$

$\frac{1}{4} = \quad 2 \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{4} - 1$

$D = 1 + 8 = 9 \quad \sqrt{D} = 3 \quad -\frac{9}{8}$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2} \\ x_2 = \frac{1+3}{4} = 1 \end{cases}$$



2 4 6 8 10

12 14 16 18 20

20 30 38 40

20 40 20 = 110

$x > 2x$

20 38

$x \geq \frac{1}{2}$ $\quad$ $x < \frac{1}{2}$

$3x - 1$ $\quad$ $-x + 1$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} a = 4b \\ a^2 + 2b^2 = 3 \end{cases}$$

$$16b^2 + 2b^2 = 3$$

$$18b^2 = 3$$

$$b^2 = \frac{1}{6}$$

$$b = \pm\sqrt{\frac{1}{6}}$$

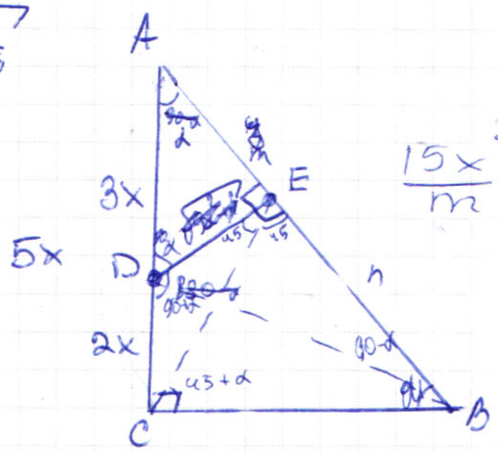
$$\left[\begin{array}{l} x - 1 = \sqrt{\frac{1}{6}} \\ x - 1 = -\sqrt{\frac{1}{6}} \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} x = 1 + \sqrt{\frac{1}{6}} \\ x = 1 - \sqrt{\frac{1}{6}} \end{array}$$

$$\frac{1}{\sqrt{6}} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{6}}$$

N4.

а) $\angle CED = 45°$

$tg(\angle BAC) - ?$



$$\frac{15x^2}{m}$$

$$180 - (135 - \alpha) = 45 + \alpha$$

$$\frac{m}{5x} = \frac{3x}{m+n} \qquad m^2 + mn = 15x^2$$

$$m(m+n) = 15x^2 \qquad n = \frac{15x^2 - m^2}{m}$$

$$\frac{15x^2}{m}$$

N6.

$$2x^2 - x - 1 \le ax + b \le x + |2x - 1|$$

$$\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$$

$$2x - 1 \geq 0$$

$$x \geq \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} ax + b \geq 2x^2 - x - 1 \\ x + |2x-1| \geq ax + b \\ x + |2x - 1| \geq 2x^2 - x - 1 \end{cases}$$

+ − +

0 2

(I) $x \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$

$x \in [0; 2]$

$x + 2x - 1 \geq 2x^2 - x - 1$

$x \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$

$2x^2 - 4x \le 0$

$x(x-2) \le 0$

$f(2) = \left[\frac{2}{2}\right] = 1$

$f(3) = \left[\frac{3}{2}\right] = 1$

$f(5) = \left[\frac{5}{2}\right] = 2$

$f(7) = \left[\frac{7}{2}\right] = 3$

$f(11) = 5$

$f(13) = 6$

$f(17) = 8$

$f(19) = 9$

$f(6) = f(2) + f(3)$

$f(4) = 2$

$f(6) = 2$

$f(8) = 3$

$f(10) = 4$

$f(12) = 5$

$\boxed{f(1) = 0}$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(1 - \frac{1}{2}\right)$

$f(2{,}5) = f\left(5 \cdot \frac{1}{2}\right) =$

$= f(5) + f\left(\frac{1}{2}\right)$

$f(42) = f(6 \cdot 7) =$

$= 2 + 3 = 5$

$\cancel{f(1)} = f\left(2 \cdot \frac{1}{2}\right) = f(2) + f\left(\frac{1}{2}\right)$

$0 = 1 + f\left(\frac{1}{2}\right)$ $f\left(\frac{1}{2}\right) = -1$

$0 = 1 + f\left(\frac{1}{3}\right)$ $f\left(\frac{1}{3}\right) = -1$

20

$f\left(\frac{2}{3}\right)$

$f\left(2 \cdot \frac{1}{3}\right) = f(2) + f\left(\frac{1}{3}\right)$

$f\left(\frac{2}{3}\right) = 1 - 1 = 0$

$f\left(\frac{4}{3}\right)$ $f\left(4 \cdot \frac{1}{3}\right) = f(4) + f\left(\frac{1}{3}\right)$

$f\left(\frac{4}{3}\right) =$

$1 =$

$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$\cancel{f\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(1 \cdot \frac{1}{3}\right)} =$

$2 = 5 + f\left(\frac{1}{21}\right)$

$f\left(\frac{1}{21}\right) = -3$

$f\left(3 \cdot \frac{1}{3}\right) = f(3) + f\left(\frac{1}{3}\right)$ $\cancel{f\left(\frac{1}{21}\right)}$ $f\left(42 \cdot \frac{1}{21}\right) =$

$f\left(\frac{1}{2}\right)$

$= f(42) + f\left(\frac{1}{21}\right)$

$\cancel{0 = 1 + }$

$f\left(\frac{2}{5}\right) = f\left(2 \cdot \frac{1}{5}\right) = f(2) + f\left(\frac{1}{5}\right)$

$f\left(5 \cdot \frac{1}{5}\right) = 2 + f\left(\frac{1}{5}\right)$ $f\left(\frac{1}{5}\right) = -2$

$f\left(\frac{2}{5}\right) = 1 - 2 = -1$

$\frac{2}{3}$ $\frac{2}{4}$

16

$\frac{1}{4}$ $\cancel{\frac{2}{21}}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{7}{5}$ $\frac{3}{6} =$

$\frac{2}{4}$; $\frac{2}{5}$;

18

14

5 – 12 7 – 8 9 – 4 11 – 0 $\frac{11}{21} =$

6 – 10 8 – 6 10 – 2

$f\left(11 \cdot \frac{1}{21}\right) = 5 - 5 \frac{11}{21} = 0$ $f\left(11 \cdot \frac{1}{21}\right)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)