МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

Если $a; b; c; d$ образуют геометрическую прогрессию, то $b = ak$; $c = ak^2$; $d = ak^3$, где k - некоторое число
Но d - корень ур-я $ax^2 - 2bx + c = 0$ =>

$a \cdot (ak^3)^2 - 2 \cdot ak \cdot ak^3 + ak^2 = 0$

$a^3k^6 - 2a^2k^4 + ak^2 = 0 \quad | : ak^2$

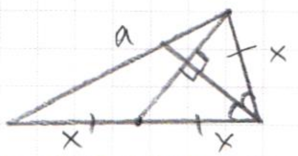
$a^2k^4 - 2ak^2 + 1 = 0$; $(ak^2 - 1)^2 = 0$

$ak^2 = 1$

Ответ: ~~a~~ $c = 1$.

№2.

Чтобы выполнялось условие, что биссектриса перпендикулярна медиане они не могут быть проведены из ~~1-й~~ одной вершины и стороны треугольника должны равняться $x; 2x; a$; где x и a - некоторые числа.



пример такого треугольника

Тогда должно выполняться неравенство треугольника:

$$\begin{cases} a + x > 2x \\ 3x > a \\ a + 2x > x \text{ - верно при } x \text{ и } a > 0 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$3x > a > x$; при этом по условию
$a + 3x = 900$; $a; x \in$ ~~Z~~ N

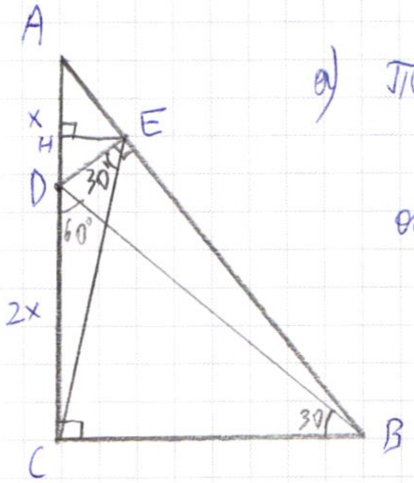
Тогда

$$\begin{cases} 3x > 900-3x \\ 900-3x > x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 150 \\ x < 225 \end{cases} \Rightarrow x \in [151; 224]$$

таких различных x возможно 74

Ответ: 74.

№4.



x – какое-то число

а) Так как $\angle DEB = \angle DCB = 90°$, можем описать ~~от~~ окружность около $DEBC$.

Тогда $\angle DBC = \angle DEC = 30°$ (т.к. опираются на одну дугу)

тогда $BC = CD \operatorname{ctg} 30° = 2x\sqrt{3}$

тогда $\operatorname{tg}\angle BAC = \frac{2x\sqrt{3}}{3x} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

б) ~~cos ∠BA~~ $\sin\angle BAC = \sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{\operatorname{tg}^2\angle BAC}}} = \sqrt{\frac{1}{1+\frac{9}{12}}} =$

$= \sqrt{\frac{1}{1+\frac{3}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{7}} \Rightarrow DE = \frac{2}{\sqrt{7}}x$

$AE = \sqrt{x^2 - \frac{4}{7}x^2} = \sqrt{\frac{5}{7}}x$

Пусть EH – высота в $\triangle AED$, тогда

$EH = \frac{AE \cdot ED}{AD} = \frac{\frac{2}{\sqrt{7}}x \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}x}{x} = \frac{2\sqrt{5}}{7}x$

$S_{\triangle CED} = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot EH = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot \frac{2\sqrt{5}}{7}x = \frac{2\sqrt{5}}{7}x^2$

$AC = 3x = \sqrt{7} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{7}}{3} \Rightarrow S_{\triangle CED} = \frac{2\sqrt{5}}{7} \cdot \frac{7}{9} = \frac{2\sqrt{5}}{9}$

Ответ: ~~S~~ $\operatorname{tg}\angle BAC = \frac{2\sqrt{3}}{3}$; $S_{\triangle CED} = \frac{2\sqrt{5}}{9}$.

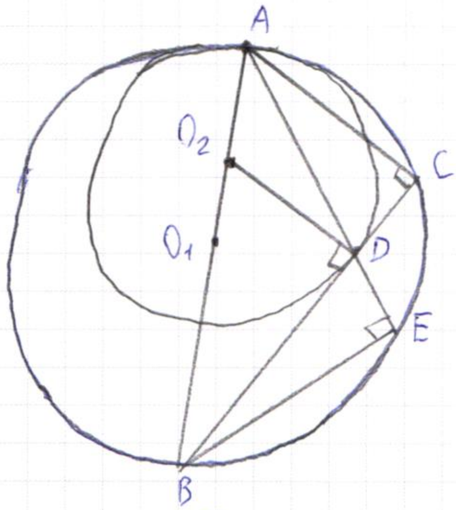
☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 5.



$BO_2 = 2R - r$

$AB = 2R$

По теор. Пифагора:

$(2R-r)^2 = r^2 + 9$

Из подобия $\triangle BO_1D$ и $\triangle BAC$:

$\frac{2R-r}{3} = \frac{2R}{5}$

$4R = 5r$

$\left(\frac{10}{4}r - r\right)^2 = r^2 + 9$

$1{,}25r^2 = 9$

$r = \frac{6\sqrt{5}}{5}$; $R = \frac{6\sqrt{5}}{4} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$

R - радиус $\Omega = BO_1$

r - радиус $\omega = AO_2$

~~$AC = \sqrt{\frac{9 \cdot 5}{2} - 25}$~~

$AC = \sqrt{(2R)^2 - BC^2} =$

$= \sqrt{2 \cdot 9 \cdot 5 - 25} = \sqrt{65}$

$AD = \sqrt{65 + 4} = \sqrt{69}$

~~AF~~

Из $\triangle ACD \sim \triangle BDE$

$\frac{AD}{DE} = \frac{CD}{DB} \Rightarrow AE = \frac{3}{2}\sqrt{69}$

$S_{BACE} = \frac{1}{2} CB \cdot AE \cdot \sin\angle ADC =$

$= \frac{CB \cdot AE}{2} \cdot \frac{AC}{AD} = \frac{5 \cdot \frac{3}{2}\sqrt{69} \cdot \sqrt{65}}{2 \cdot \sqrt{69}} =$

$= \frac{15}{4}\sqrt{65}$

Ответ: $r = \frac{6\sqrt{5}}{5}$; $R = \frac{3\sqrt{5}}{2}$; $S = \frac{15\sqrt{65}}{4}$

№ 6.

$8x - 6|2x-1| \le ax + b \le -8x^2 + 6x + 7$

1) $y = 8x - 6|2x - 1|$

$y = 20x - 6$; $x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$

$y = -4x + 6$; $x \in \left(\frac{1}{2}; 1\right]$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

2) $y = -8x^2 + 6x + 7$

$-8x^2 + 6x + 7 = 0$

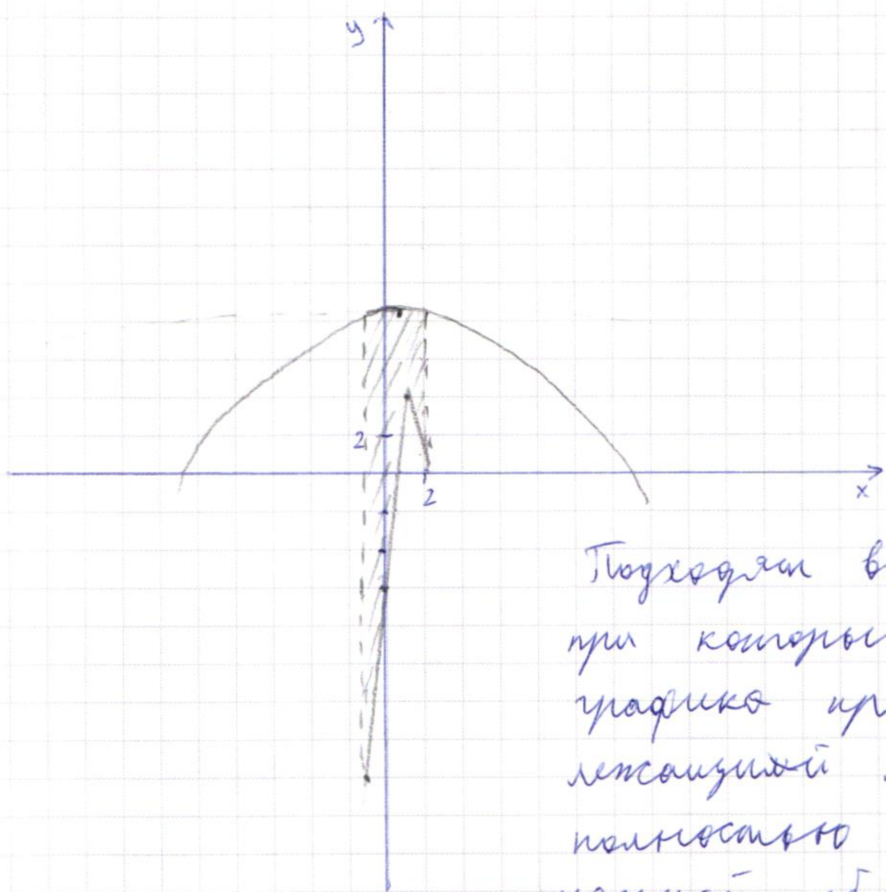
$D = 36 + 56 \cdot 4 = 260$

$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{260}}{-16} = \frac{3 \mp \sqrt{260}}{8}$

$x_в = \frac{-6}{-16} = \frac{3}{8}$

$y_в = -\frac{9}{8} + \frac{18}{8} + 7 = \cancel{\frac{29}{8} = 3\frac{5}{8}} =$

$= 8\frac{1}{8}$



Подходят все значения, при которых отрезок графика прямой $y = ax + b$ лежащий между $-\frac{1}{2}$ и 1 полностью лежит в закрашенной области

№7.

$f(ab) = f(a) + f(b)$;

$f(p) = [p/2]$

$f(1) = 0$ $f(5) = 2$

$f(2) = 1$ $f(6) = \cancel{3}\ 2$

$f(3) = 1$ $f(7) = 3$

$f(4) = 2$ $f(8) = 3$

$f(9) = 2$; $f(10) = 3$

$f(11) = 5$; $f(12) = 3$

$f(13) = \cancel{4}\ 6$; $f(14) = 4$

$f(15) = 3$; $f(16) = 4$

$f(17) = 8$; $f(18) = 3$; $f(19) = 9$; $f(20) = 3$; $f(21) = 4$; $f(22) = 6$

Заметим, что

$f(1) = 0$; но $f(1) = f(\frac{2}{2}) = f(\frac{n}{n})$

значит $f(\frac{1}{n}) = -f(n)$ =>

чтобы $f(x/y) < 0$ надо чтобы

$f(x) < f(y)$; значит подходит

$19 + 15 + 8 + 5 + 2 = 27 + 30 =$

$= 57$ (пар) (для каждого значения $f(x)$ подсчитываем число значений $f(y)$)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Ответ: 57 пар.

№3.

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$$

$x-6y \geq 0$

$x \geq 6y$

$$\begin{cases} (x-6y)^2=(x-6)(y-1) \\ (x-6)^2+(2y-1)^2=17 \end{cases}$$

$\cancel{(x-6y)^2}$ $x-6=a$

$y-1=b$

$$\begin{cases} (a-6b)^2=ab \\ a^2+(2b+1)^2=17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2-12ab+36b^2=ab \\ a^2+4b^2+4b=16 \end{cases}$$

$\cancel{a^2+b^2=13ab}$

$\cancel{13ab+3b^2+4b=16}$

$$\begin{cases} a^2-12ab+36b^2=ab \\ a^2+4b^2+4b=16 \end{cases}$$

$a^2-13ab+36b^2=0$

$D=25b^2$

$a=\frac{13b\pm 5b}{2}=9b;4b$

$(a-9b)(a-4b)=0 \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=9b \\ a=4b \end{array}\right. \\ a^2+4b^2+4b=16 \end{cases}$

$\cancel{a=9b}$

$16b^2 + 4b^2 + 4b = 16$

$4b^2 + b^2 + b = 4$

$5b^2 + b - 4 = 0$

$D = 1 + 80 = 81$

$b_{1,2} = \frac{-1 \pm 9}{10} = -1; 0,8$

$a = -4; 3,2$

$x_1 = 2; y_1 = 0;$ ~~y_2~~ $x_2 = 9,2; y_2 = 1,8$

$(2;0)$ - подходит ; $(9,2; 1,8)$ - нет

или

$81b^2 + 4b^2 + 4b = 16$

$85b^2 + 4b - 16 = 0$

$D = 16 + 16 \cdot 85 \cdot 4 = 5456$

$b_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{5456}}{170} \approx \frac{-4 \pm 75}{170} = \frac{71}{170}; -\frac{79}{170}$

~~$a =$~~

$x_1 \approx 9 \cdot \frac{71}{170} + 6; y_1 = \frac{71}{170} + 1$

не подх.

$x_2 \approx -9 \cdot \frac{79}{170} + 6; y_1 = -\frac{79}{170} + 1$

не подх.

Ответ: $(2;0)$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = \cancel{x}\left[p/2\right]$

$f(a) = -f\left(\frac{1}{a}\right)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$

$f(1) = 0$

$f(2) = 1$

$f(3) = 1$

$f(4) = 2$

$f(4) = \cancel{f(3) + f(1)} = f(2) + f(2)$

$f(5) = 2$

$f(6) = 2$

$f\left(\frac{\cancel{x}2}{2}\right) = f(2) + f\left(\frac{1}{2}\right)$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = -1$

$f\left(\frac{3}{3}\right) = f(3) + f\left(\frac{1}{3}\right)$

$2 \quad -2$

$\cancel{x}$

$\cancel{x} - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}$

$(x-6)^2 \cancel{+} + (2y-1)^2 = 17$

$x - 6y = \sqrt{(x-6)(y-1)}$

$\cancel{x - y = a}$

$\cancel{x + y = 6}$

$\cancel{x \geq 6}$

$y \geq \cancel{x}$

$\cancel{a + 1 = 17}$

$8x - 6|2x-1| \le ax + b$

$(x-6y)^2 = (x-6)(y-1)$

$\cancel{8x \quad (8-a)x}$

$x^2 + 36y^2 - 12y = xy - 6y - x + 6$

$x^2 - x + \frac{1}{4} + 36y^2 - 12y + 1 \quad - \quad \frac{5}{4}$

$36y^2 - 6y$

1
2
3
4
5

$ab = a - 6b$

$169 - 144 = 25$

$36 \times 4 = 144$

a^2

$64 \cdot 85$

64×85: 320, 512, 5440

5456

$\cancel{84} \times 84 = 336$

$\cancel{746} \times 746$: $\cancel{296}$, 8

76×76: 456, 532, 5776

75×75: 375, 513

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

a; $ak=b$; $ak^2=c$; ak^3, k

$ax^2-2akx+ak^2=0$ $\qquad k=ak^4$

$D=4a^2k^2-4ak^2=0$ $\qquad \frac{k}{k}=ak^3=1$

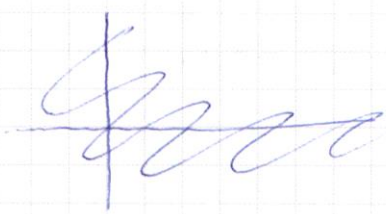
$x_{1,2}=\frac{\pm 2ak}{2a}=k$

~~900 | 6~~

№2.

300 | 2

225

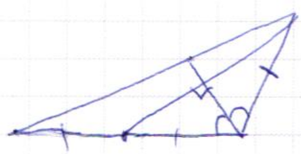


1 2

1 2

$-\frac{224}{150}$ 74 ~~45~~

x; $2x$; a



$a<3x$

$x+a>2x$

$a>x$

$3x>a>x$

1 2

$3x>a>x$

$a+3x=900$

~~2 6~~

~~1~~ ~~3~~ ~~5~~ ~~7~~ ~~9~~

$x=1$; ~~$a=2$~~

$x=2$; ~~$a=3;4;5$~~

$x=3$; ~~$a=4,5,6,7,8$~~

$3x>900-3x>x$

$\begin{cases} 900>4x \\ \cancel{3}\ 6x>900 \end{cases}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№ 3.

$x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6}$

$\cancel{x}$ $(x-6)y-(x-6)$

$x-6y=\sqrt{(x-6)(y-1)}$

$\cancel{x^2-12x+2y^2-4y+20=0}$

$\cancel{D=144}$

$\cancel{x^2-12xy+36y^2=}$

$(x-6y)^2=(x-6)(y-1)$

$\cancel{x-6y=a}$ $\cancel{a}$

$x-y=a$

$x+y=b$

$x^2-12x+36+2y^2-4y+1$
$+20-36-1=0$

$$\begin{cases}(\overset{a}{x-6})^2+(\overset{b}{2y-1})^2=17\\(x-6y)^2=(x-6)(y-1)\end{cases}$$

$(x-6)^2+(2y-1)^2=17$
$\quad a \qquad\qquad b$

$\cancel{x-6y=a;\ x-6=b}$

$x-6-6y+3$

$(x-6)^2+(2y-1)^2=17$

$x-6y-3$

$\cancel{b^2+}$

$2y=a$

$$\begin{cases}\cancel{(x-6)^2+(a-1)^2=17}\\ \cancel{(x-3a)^2}=(x-6)\left(\frac{a}{2}-1\right)\end{cases}$$

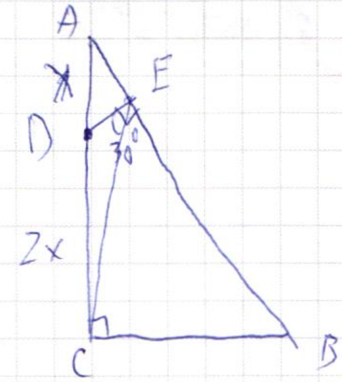
$x-6=a;\ 2y-1=b$

$\cancel{x-6y=a}$ $6+a=x;\ y=\frac{b+1}{2}$

$a+6-3b-3=a-3b+3$

$\frac{b+1}{2}-1=\frac{b-1}{2}$

№ 4.



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a^2 + b^2 = 17$

$(a - 3b + 3)^2 = a\left(\frac{b-1}{2}\right)$

$56 - 27$

-27

29

$5b + 9 =$

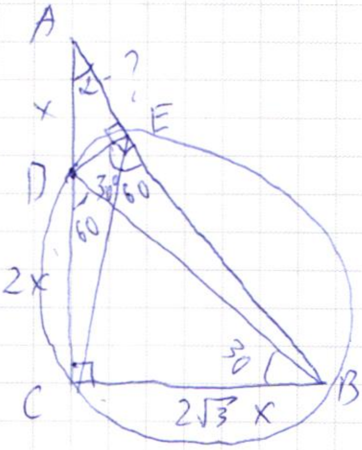
$\frac{64}{8} + \frac{1}{8}$

$b = \sqrt{17 - a^2}$

$\cancel{\left(a - 3\sqrt{17-a^2} + 3\right)^2 = a\left(\frac{\sqrt{17-a^2}-1}{2}\right)}$

$\cancel{a^2}$

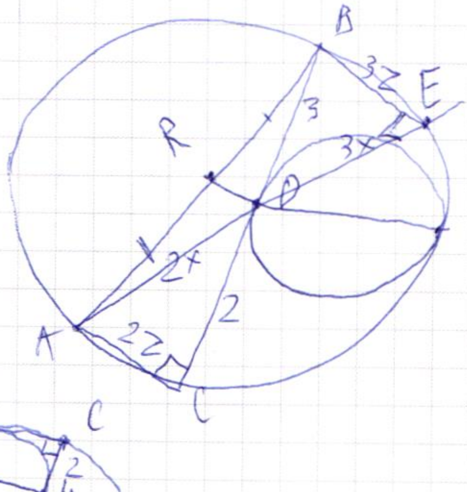
$8x - 6|2x-1|$

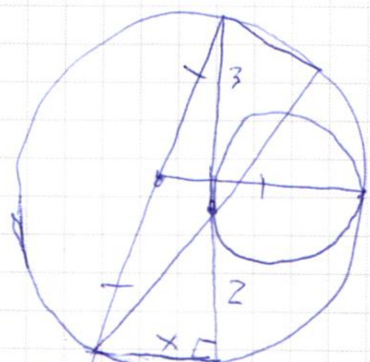


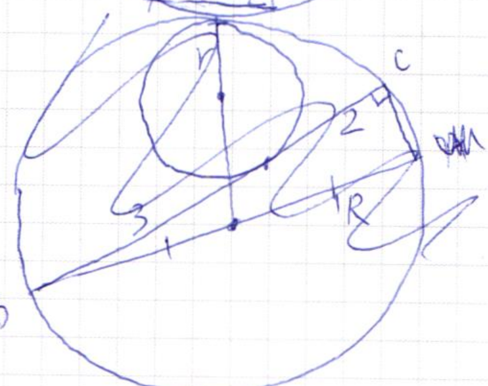
$\sqrt{7}$

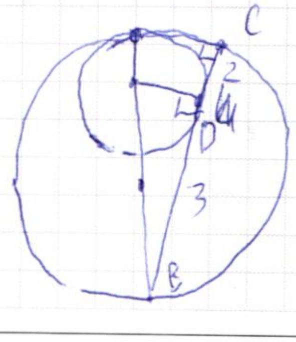
$56 \times 4 = 224$

260









$\frac{2R - r}{3} = \frac{2R}{5}$

$10R - 5r = 6R$

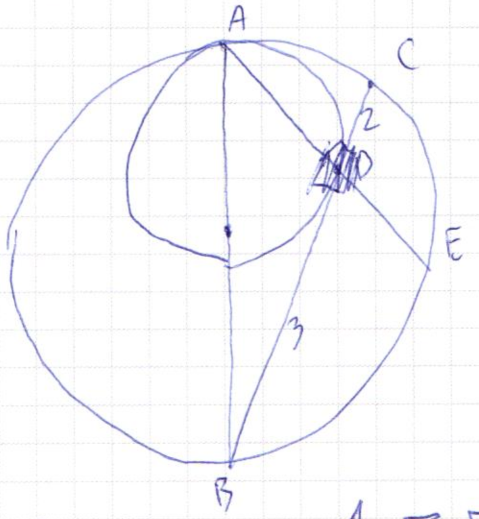
$4R = 5r$

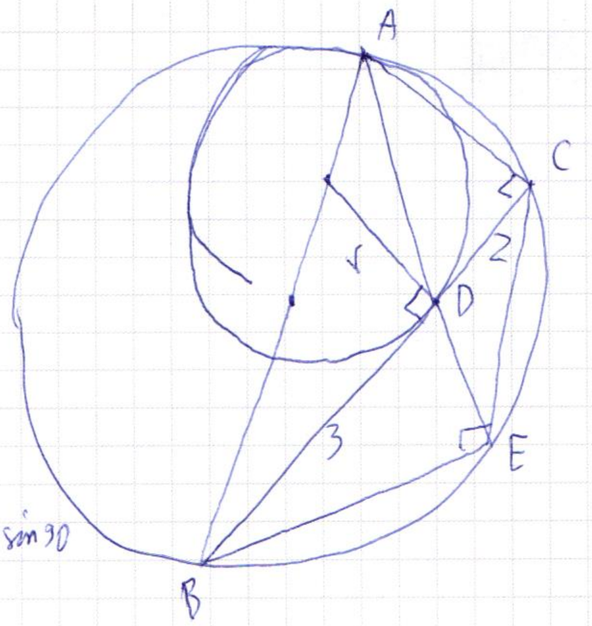
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)





$90-23$
-25
65

$\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sin 90$

$\cancel{2x-1}$

$\cancel{AB=}$

$(R+(r-(2r-R))^2=$
$=r^2+9$

$\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$

$(2R-r)^2=r^2+9$

$8x+12x-6$

$20x-6\leq ax+b\leq -8x^2+6x+7$

$\cancel{(2R)^2}$

$\frac{2R-r}{3}=\frac{2R}{5}$

$D=36+56\cdot 8=$
$=$

$4R=5r$

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$\left(\frac{10}{4}r-r\right)^2=r^2+9$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)$

$\cancel{1,5}\ 2,25r^2=r^2+9$

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$1,25r^2=9$

$r=\sqrt{\frac{9}{1,25}}=\frac{3}{0,5}\sqrt{\frac{1}{5}}=$

$f(4)=f(3)+f(1)=$

$=\frac{6}{\sqrt{5}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$

$f\left(\frac{1}{y}\right)=\cancel{f(1)+}$

$f(x/y)<0 \Rightarrow f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)<0$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)