МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45°$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

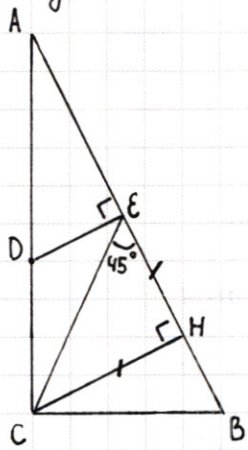
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 4



Решение:

а) 1) $DE \perp AB$ (по условию) $\Rightarrow \angle DEB = 90°$

$\angle CEB = \angle DEB - \angle CED = 90° - 45° = 45°$

2) Проведем CH так, что:

· $CH \parallel DE$

· $H \in AB$

$\left.\begin{array}{l} CH \parallel DE \\ DE \perp AB \end{array}\right\} \Rightarrow CH \perp AB$

3) $\triangle CEH$: $\left.\begin{array}{l} \angle EHC = 90° \text{ (т.к. } CH \perp AB) \\ \angle CEH = 45° \end{array}\right\} \Rightarrow \angle ECH = 45° \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle CEH$ - равнобедренный (т.к. $\angle CEH = \angle ECH$) $\Rightarrow CH = EH$

4) $\angle CAH$, $DE \parallel CH \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{AE}{EH} \Rightarrow AE = \frac{AD}{DC} \cdot EH = \frac{AD}{AC-AD} \cdot EH = \frac{3}{2} EH$ (т.к. $\frac{AD}{AC} = \frac{3}{5}$ по усл.)

5) $\angle CAH$, $DE \parallel CH \Rightarrow \triangle DAE \sim \triangle CAH \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{DE}{CH} \Rightarrow DE = \frac{AD}{AC} CH = \frac{3}{5} CH$

6) $\triangle AED$: $\angle AED = 90°$ (т.к. $AB \perp DE$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow tg\angle BAC = \frac{DE}{AE} = \frac{\frac{3}{5}CH}{\frac{3}{2}EH} = \frac{2}{5}$ (т.к. $EH = CH$)

б) ~~1) $\triangle AHC$: $\angle AHC = 90°$ (т.к. $CH \perp AB$) $\Rightarrow$~~

~~$tg\angle BAC = \frac{CH}{AC} \Rightarrow CH = AC\, tg\angle BAC = \frac{2}{5}\sqrt{29}$~~

~~2) $AE = \frac{3}{2} EH = \frac{3}{2} CH = \frac{3}{5}\sqrt{29}$~~

~~$DE = \frac{3}{5} CH = \frac{6}{25}\sqrt{29}$~~

1) $\triangle AHC$: $\angle AHC = 90°$ (т.к. $CH \perp AB$) $\Rightarrow$

$tg\angle BAC = \frac{CH}{AH} = \frac{2}{5} \Rightarrow AH = \frac{5}{2} CH$

По т. Пифагора: $AC^2 = AH^2 + CH^2 = \frac{25}{4} CH^2 + CH^2 = \frac{29}{4} CH^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow CH = \sqrt{\frac{4}{29} AC^2} = 2 \Rightarrow AH = 5$

2) $AE = \frac{3}{2} EH = \frac{3}{2} CH = 3$

$DE = \frac{3}{5} CH = \frac{6}{5}$

3) $S_{CDE} = S_{AHC} - S_{AED} - S_{EHC} = \frac{1}{2} AH \cdot CH - \frac{1}{2} AE \cdot DE - \frac{1}{2} CH^2 =$

$= \frac{1}{2}\left(10 - \frac{18}{5} - 4\right) = 3 - \frac{9}{5} = \frac{15-9}{5} = \frac{6}{5}$

Ответ: а) $tg\angle BAC = \frac{2}{5}$; б) $S_{CDE} = \frac{6}{5}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

Задача 1

Пусть $a = \frac{c}{q^2}$, $b = \frac{c}{q}$, а четвертый член прогрессии равен qc (по свойствам геометрической прогрессии).

По условию:

$a \cdot (qc)^2 + 2b \cdot (qc) + c = 0$

$\frac{c}{q^2} \cdot q^2c^2 + 2 \cdot \frac{c}{q} \cdot qc + c = 0$

$c^3 + 2c^2 + c = 0 \quad | : c$ (т.к. $c \neq 0$)

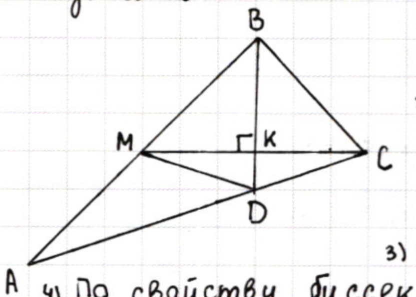
$c^2 + 2c + 1 = 0$

$(c+1)^2 = 0$

$c = -1$

Ответ: -1

Задача 2



1) Пусть $\triangle ABC$ - подходящие под условие, т. е. биссектриса $BD \perp$ медиане CM.

2) Тогда в $\triangle MBC$ BK ($K = BD \cap CM$) является и биссектрисой, и высотой =>

=> $\triangle MBC$ - равнобедренный, т.е. $MB = BC$ =>

=> BK также и медиана, т.е. $MK = KC$

3) Пусть $MB = BC = a$. Тогда $AM = a$, т.к. $AM = MB$.

4) По свойству биссектрисы BD:

$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} = \frac{2a}{a} = 2.$ => $AD = 2DC$.

Пусть $DC = b$, тогда $AD = 2b$.

5) $\left.\begin{array}{l} MK = KC \\ \angle MKD = \angle DKC = 90^\circ \\ DK \text{ - общая} \end{array}\right\}$ => $\triangle MKD = \triangle CKD$ => $MD = DC = b$.

6) Из $\triangle ABC$: $AC < AB + BC$ - по неравенству треугольника

$3b < 3a$

$b < a$

Из $\triangle AMD$: $AM < MD + AD$ - по неравенству треугольника

$a < 3b$

Таким образом, $b < a < 3b$ <=> $\frac{a}{3} < b < a$

$\left.\begin{array}{l} P = 3a + 3b \Rightarrow 4a < P < 6a \\ \text{С другой стороны, } P = 1200 \end{array}\right\}$ =>

$200 < a < 300$

Т. к. у треугольника целочисленные стороны, то a - целое число

Следовательное, есть 99 возможных значений a =>

=> 99 возможных треугольников.

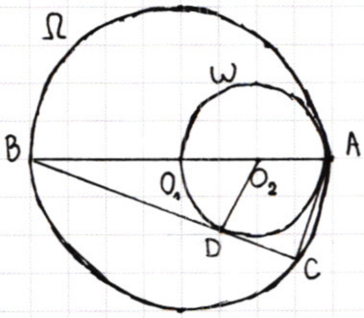
Ответ: 99

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 5



1) Пусть: O_1 и O_2 - центры Ω и ω соответственно.
R и r - радиусы Ω и ω соответственно.

2) $O_2D \perp BC$ (т.к. BC - касательная ω)
$AC \perp BC$ (т.к. $\angle BCA = 90°$ - смотрит на диаметр AB) } =>
=> $AC \parallel O_2D$

3) $O_1 \in AB$, т.к. AB - диаметр
$O_2 \in AB$, т.к. при касании центры окр. и точка касания лежат на одной прямой.

4) $\angle ABC$, $O_2D \parallel AC$ =>
=> $\frac{AO_2}{O_2B} = \frac{CD}{BD} = \frac{1}{3}$

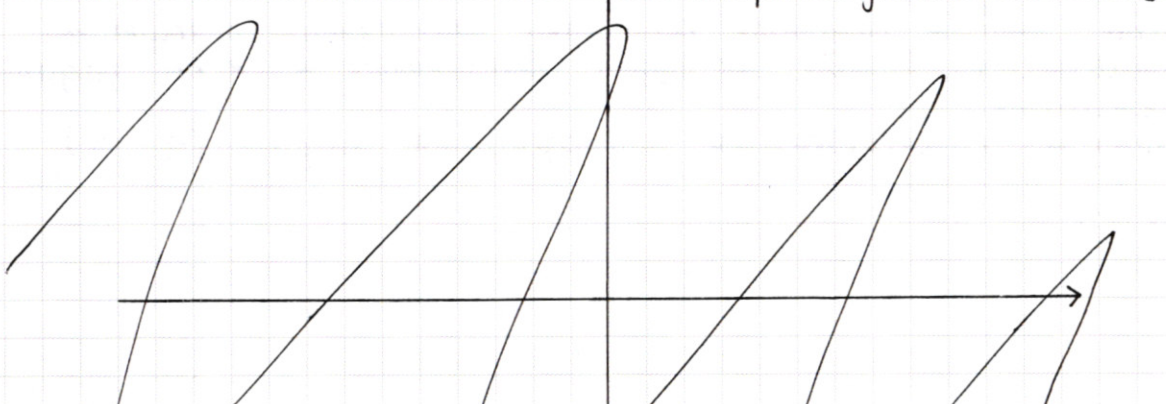
$O_2B = 3AO_2 = 3r$ (т.к. $AO_2 = r$)

$AB = BO_1 + O_1A = BO_2 + O_2A$
$2R = 3r + r$
$2R = 4r$
$R = 2r$ => $O_2 \in \omega$.

5) По теореме о квадрате касательной:
$BD^2 = BO_1 \cdot BA = R \cdot 2R = 2R^2$ =>
=> $R^2 = \frac{9}{2}$
$R = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ => $r = \frac{1}{2}R = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

Ответ: $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ и $\frac{3\sqrt{2}}{4}$

Задача 6
Построим графики $y = 2x^2 - x - 1$ и $y = x + |2x - 1| = \begin{cases} 3x - 1, & \text{при } x \geq \frac{1}{2} \\ 1 - x, & \text{при } x < \frac{1}{2} \end{cases}$ на промежутке $x \in [-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}]$



☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

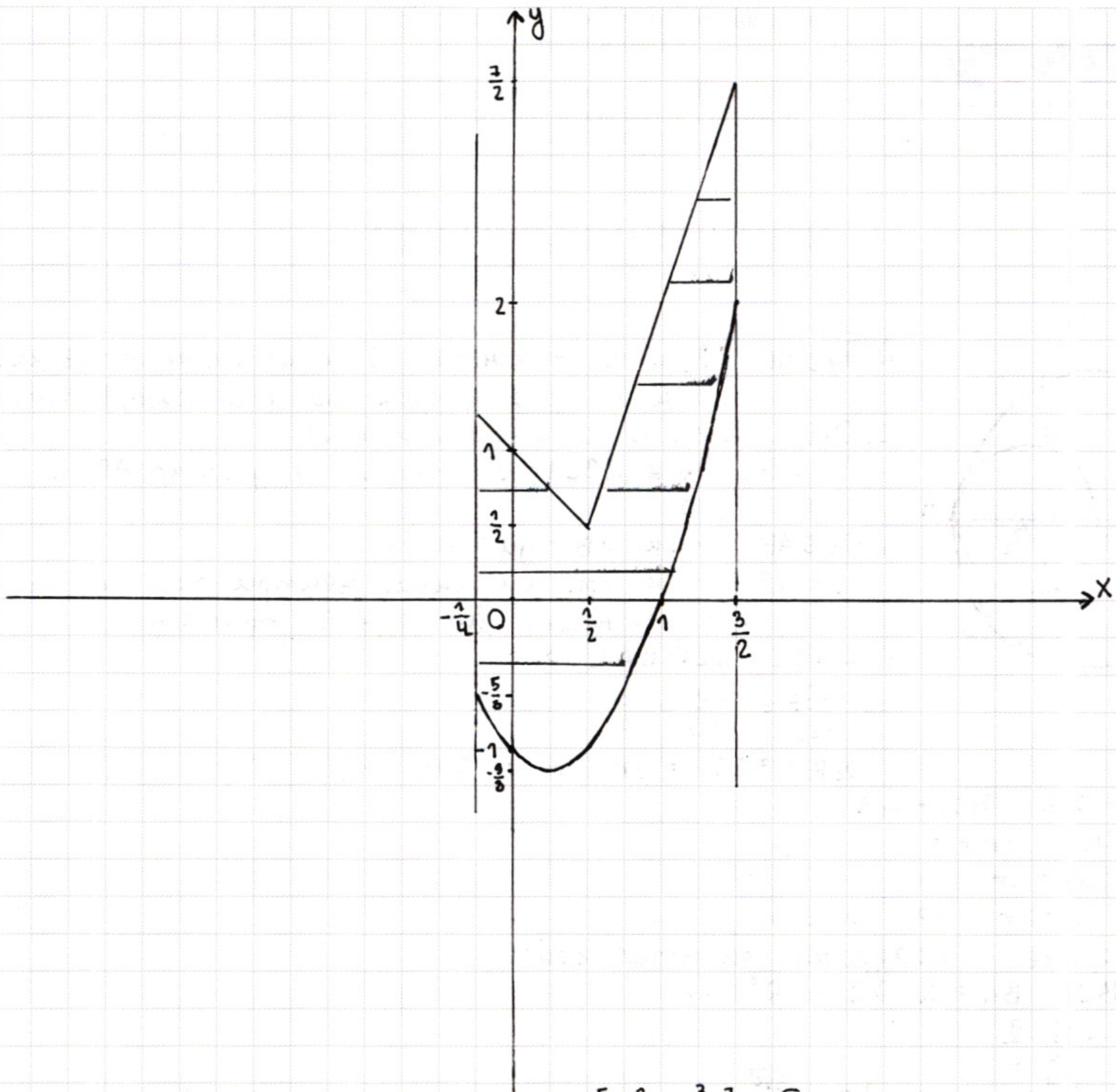


График $y=ax+b$ на промежутке $x\in[-\frac{1}{4};\frac{3}{2}]$ будет являтся отрезком с концами на вертикальных прямых $x=-\frac{1}{4}$ и $x=\frac{3}{2}$.
И для того, чтобы неравенство было выполнено, он должен полностью содержаться в закрашенной зоне (см. график). Заметим, что единственной подходящей прямой, на которой лежит отр., будет $y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}$, т. к. эта прямая проходит через точки $(-\frac{1}{4};-\frac{5}{8})$, $(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$ и $(\frac{3}{2};2)$ - граничные точки, и если мы попытаемся её „передвинуть", чтобы получить ещё одну подходящую прямую, то ~~условия~~ неравенство больше не будет выполнятся на всем заданном промежутке.
Таким образом, единственная подходящая пара - $(\frac{3}{2};-\frac{1}{4})$

Ответ: $(\frac{3}{2};-\frac{1}{4})$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$a,\ qa,\ q^2a,\ q^3a$

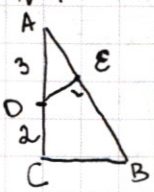
$a\cdot q^6a^2+2\cdot qa\cdot q^3a+q^2a=0$

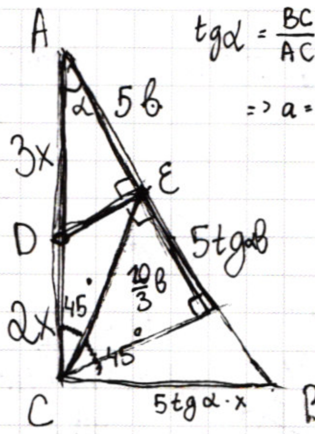
$q^6a^3+2q^4a^2+q^2a=0$

$c^3+2c^2+c=0$

$\left[\begin{array}{l} c=0\\ c^2+2c+1=0 \Leftrightarrow c=-1\end{array}\right.$

№4





$tg\alpha=\frac{BC}{AC}=\frac{ax}{5x}\Rightarrow$

$\Rightarrow a=5tg\alpha$

$5x^2$ $25x^2+25tg^2\alpha x^2=$

$=25x^2(1+tg^2\alpha)$

$AE=\frac{5}{5+5tg\alpha}\cdot 5x\sqrt{1+tg^2\alpha}$

$AE=\frac{\sqrt{1+tg^2\alpha}}{1+tg\alpha}5x$

$DE=\sqrt{9x^2-\frac{1+tg^2\alpha}{(1+tg^2\alpha)}25x^2}$

$tg\alpha^2=\frac{9-\frac{1+tg^2\alpha}{(1+tg\alpha)^2}\cdot 25}{\frac{1+tg^2\alpha}{(1+tg^2\alpha)^2}\cdot 25}$

$=\frac{9(1+tg^2\alpha)^2}{25(1+tg^2\alpha)}-1=$

$\Rightarrow 25tg^4\alpha+50tg^2\alpha+25=$
$=9tg^2\alpha+$
$+18tg\alpha+$
$+9$

№3 $3(y-2)-2(x-1)$

$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2}=\sqrt{-2(x-1)+y(x-1)}=\sqrt{(x-1)(y-2)}\\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0=2(x-1)^2+(y^2-4y+2)\end{cases}$

$y^2-4xy+4x^2=xy-2x-y+2$

$y^2-5xy+4x^2+2x+y-2=0$

$2x^2-5xy+6x+5y-5=0$

$-5\le -2a+8b\le 10$

$4\le 3a+2b\le 7$

$-\frac58\le -\frac14a+b\le \frac54$

$2\le \frac32a+b\le \frac72$

$11\le 10a\le 38$

$1{,}1\le a\le 3{,}8$

$D=1+8=9=3^2$ $\quad \frac{1\pm3}{4}=\left[\begin{array}{l}1\\ -\frac12\end{array}\right.$

$\frac18-\frac14-1=\frac{1-2-8}{8}=-\frac98$

$x+12x-1|$

$2x-1\ge 0$

$x\ge\frac12$

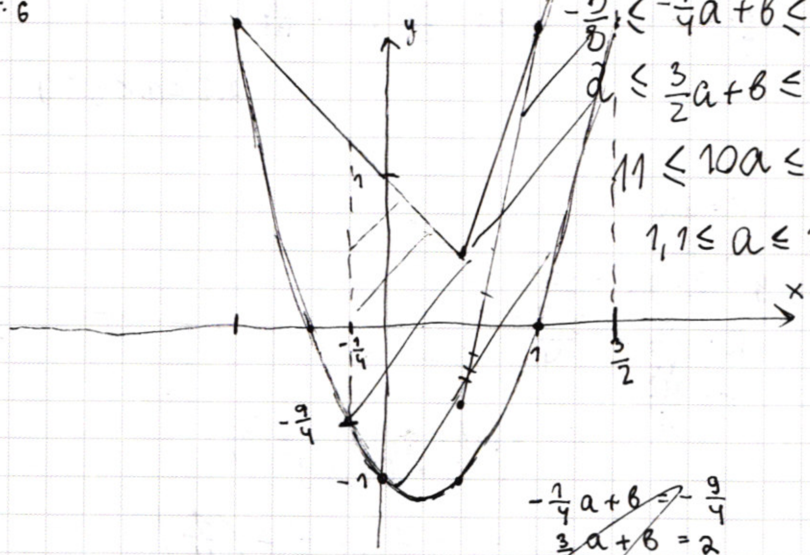
$3x-1$

$x\le\frac12$

$1-x$

$2\cdot\frac1{16}+\frac14-1=$
$=\frac{1+2-8}{8}=-\frac58$

№6



$-\frac14a+b=-\frac94$

$\frac32a+b=2$

$\frac74a=\frac{17}{4}$

$a=\frac{17}{7}$ $\quad b=2-\frac{3\cdot17}{7\cdot2}=\frac{28-51}{14}=-\frac{23}{14}$

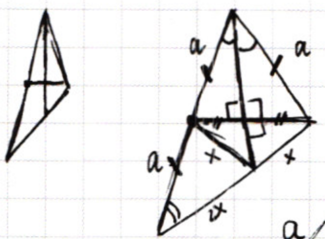
$\frac{17}{7}\cdot\frac32-\frac{23}{14}=$

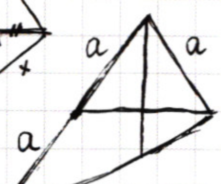
$\times\frac{17}{3}{51}$

№2

$\cos\alpha=\frac{4a^2+9x^2-a^2}{2\cdot2a\cdot3x}=\frac{a^2+4x^2-x^2}{2a\cdot2x}$

$\Rightarrow 3(3a^2+9x^2)=3a^2+9x^2$





$-\frac14a+b=-\frac58$

$\frac32a+b=2$

$\frac74a=\frac{11}{8}$

$a=\frac{11}{14}$

$b=2-\frac{11}{14}\cdot\frac32=\frac{56-33}{28}=\frac{23}{28}$

$\frac32\cdot\frac{11}{14}+\frac{23}{28}=\frac{34}{28}=\frac{17}{14}$

$-\frac14a+b=-\frac58$

$\frac12a+b=\frac12$

$\frac34a=\frac98$

$a=\frac32$

$b=\frac12-\frac34=-\frac14$

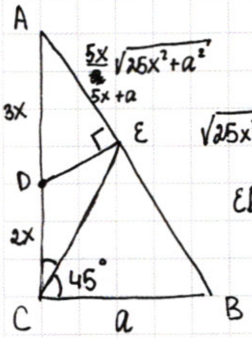
$\frac32\cdot\frac32-\frac14=\frac94-\frac14=2$

Долгопрудный

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

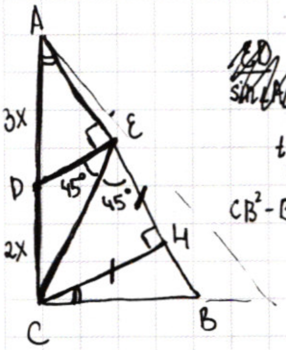
№4



$\sqrt{25x^2+a^2}$

$ED=\sqrt{\frac{25}{9}x^2-\frac{25x^2}{(5x+a)^2}\cdot(25x^2+a^2)}=3x\cdot\sqrt{9-25\frac{25x^2+a^2}{25x^2+10xa+a^2}}$

$\frac{a}{5x}=\dfrac{\sqrt{\frac{90xa-16(25x^2+a^2)}{10xa+25x^2+a^2}}}{\frac{5x}{5x+a}\sqrt{25x^2+a^2}}$



$tg\,\alpha=\frac{BH}{CB}=\frac{CB}{AC}=\frac{DE}{AE}$

$CB^2-BH^2=EH^2=CH^2$

$\frac{CH}{DE}=\frac{5}{3}$ $\quad\frac{EH}{AE}=\frac{2}{3}$

$\frac{5}{3}DE=\frac{2}{3}AE$

$AC=\sqrt{29}$

$CH=\frac{2}{5}\sqrt{29}$

$\frac{DE}{AE}=\frac{2}{5}$

$\Delta CDE=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\sqrt{29}\cdot\frac{5}{2}\sqrt{29}-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\sqrt{29}\right)^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}\sqrt{29}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{5}\cdot\sqrt{29}=\frac{1}{2}\left(29-\frac{4}{25}\cdot29-\frac{18}{125}\cdot29\right)=$

$=\frac{1}{2}\cdot29\cdot\left(\frac{125-20-18}{125}\right)=\frac{29\cdot87}{250}$

$3a>3x$

$a>x$

$3x>a$

$x<a<3x$

$\frac{a}{3}<x<a$

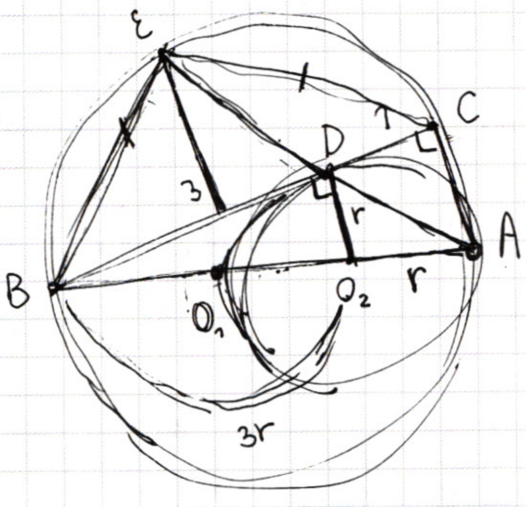
$3a+3x$

$4a<P<6a$

1200

$a<300\quad a>200$

$200<a<300$



$4r=2R$

$R=2r$

$9=R\cdot2R=2R^2$

$R=\frac{3}{\sqrt2}=\frac{3\sqrt2}{4}$

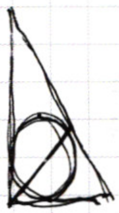
$r=\frac{3\sqrt2}{8}$

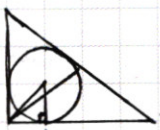
$f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(p)=[p/2]$

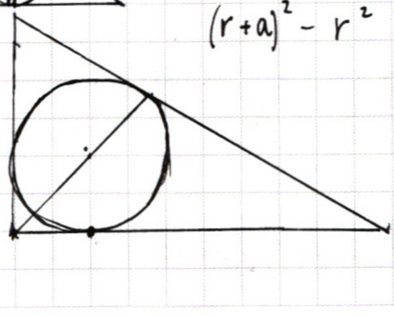
$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)$

$25=\quad 2\quad 9\quad=2\quad 11$





$(r+a)^2-r^2=a^2+2ar=a(a+2r)$



☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2}$ x

$2x^2+y^2-4x-4y+3=0$

$16+8=24$

$\cancel{(y-2)^2+2x^2-4x-1=0}$

$\cancel{y=\sqrt{-2x^2+4x+2}+2}$

$y^2+4x^2-4xy=xy-2x-y+2$

y^2

$2(x-1)^2-2+(y-2)^2-4+3=0$

$\begin{cases} 2a^2+b^2-3=0 \\ ab-2a^2=\sqrt{ab} \end{cases}$

$\cancel{2a^2+b^2=3}$

Пусть $u=ab$

$v=2a$

$b^2+4a^2-4ab=ab$

$b^2+4a^2-5ab=0$

$2a^2-5ab-3=0$

$a=\frac{5b\pm\sqrt{25b^2+24}}{4}$

$b^2-6+5ab=0$

$b^2+5\frac{5b\pm\sqrt{25b^2+24}}{4}b-6=0$

$4b^2+25b^2-24\pm5\sqrt{25b^2+24}=0$

$29b^2-24$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)