МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство
$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$
выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(1) Пусть q - знаменатель прогрессии, d - четвертый член

Тогда $b = qa$; $c = q^2a$; $d = q^3a$; $a, b, c, d \neq 0$

по условию $a\,d^2 - 2bd + c = 0$.

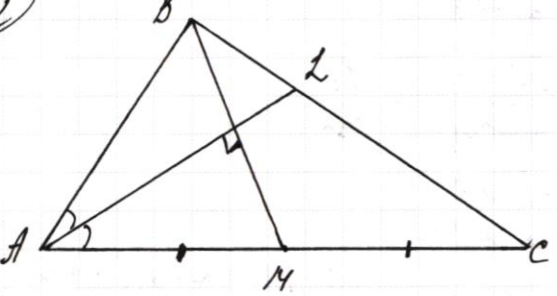
$$a \cdot (q^3a)^2 - 2 \cdot qa \cdot q^3a + q^2a = 0$$

$$q^6a^3 - 2q^4a^2 + q^2a = 0$$

$$q^2a(\underbrace{q^4a^2 - 2q^2a + 1}_{(q^2a-1)^2}) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} q^2a = 0, \\ q^2a - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow c = q^2a = 1$$

Ответ: 1.

(2)



Пусть $\triangle ABC$ - данный треугольник

AL - биссектриса

BM - медиана

В $\triangle BAM$ совп. биссектриса и высота $\Rightarrow AB = AM = \frac{1}{2}AC$.

$\boxed{AC = 2AB}$

По условию $P_{\triangle ABC} = 900$.

$$AB + AC + BC = 3AB + BC = 900.$$

По неравенству треугольника

$$AC - AB \leq BC \leq AB + AC$$

$$AB < BC < 3AB$$

$$3AB + AB < 900 < 3AB + 3AB$$

$$4AB < 900 < 6AB$$

$$150 < AB < 225 \qquad 74 \text{ варианта } AB$$

знач. AB задает ост. стороны $\Rightarrow$ 74 разных треугольника

Ответ: 74.

③ $\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6}, \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-6y=\sqrt{(x-6)(y-1)}, \\ (x-6)^2+2(y-1)^2=18. \end{cases}$ $\quad {}^*\ \underline{x-6y\geq 0}$

Пусть $a=x-6$, $b=y-1$. Тогда $\quad a-6b\geq 0 \Rightarrow a\geq 6b.$

$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ a^2+2b^2=18; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-12ab+36b^2=ab, \\ a^2+2b^2=18; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-13ab+36b^2=0, \\ a^2+2b^2=18 \end{cases}$

$a^2-13ab+36b^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=9b, \\ a=4b \text{ - не подх. по } * \end{array}\right. \quad a=9b$

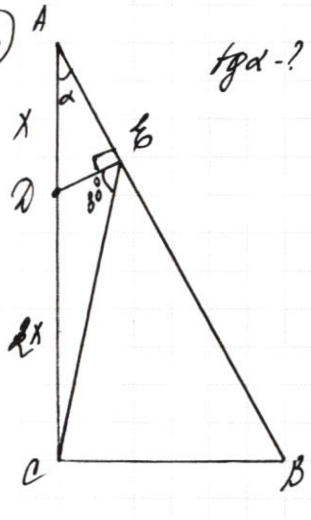
$83b^2=18 \quad b=\pm\sqrt{\frac{18}{83}} \quad a=\pm 9\sqrt{\frac{18}{83}}$

Обратная замена

$x=6+9\sqrt{\frac{18}{83}}$ и $y=1+\sqrt{\frac{18}{83}}$ или $x=6-9\sqrt{\frac{18}{83}}$ и $y=1-\sqrt{\frac{18}{83}}$.

Ответ: $\left(6+9\sqrt{\frac{18}{83}};\ 1+\sqrt{\frac{18}{83}}\right)$; $\left(6-9\sqrt{\frac{18}{83}};\ 1-\sqrt{\frac{18}{83}}\right)$.

④



$\operatorname{tg}\alpha$ - ? $\quad$ По острому углу $\triangle AED \sim \triangle ACB \Rightarrow \frac{x}{AB}=\frac{AE}{3x}$

1) По теореме синусов для $\triangle CDE$

$$\frac{2x}{\sin 30}=4x=\frac{EC}{\underset{\sin\angle CDE}{\sin(90°+\alpha)}}=\frac{EC}{\cos\alpha}$$

По теореме синусов для $\triangle AEC$

$$\frac{3x}{\sin 120°}=2\sqrt{3}x=\frac{EC}{\sin\alpha}$$

$EC=4x\cos\alpha=2\sqrt{3}x\sin\alpha$

$4\cos\alpha=2\sqrt{3}\sin\alpha$

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \Rightarrow \frac{16}{12}\cos^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \Rightarrow \cos^2\alpha=\frac{3}{7}.$

т.к. $\alpha<90°$, то $\cos\alpha=\sqrt{\frac{3}{7}}. \Rightarrow \sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{7}} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Ответ: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

2) $AC=\sqrt{7}$. Из $\triangle ADE$:

$AE=x\sin\alpha=\frac{\sqrt{7}}{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{7}}=\frac{2}{3}.$

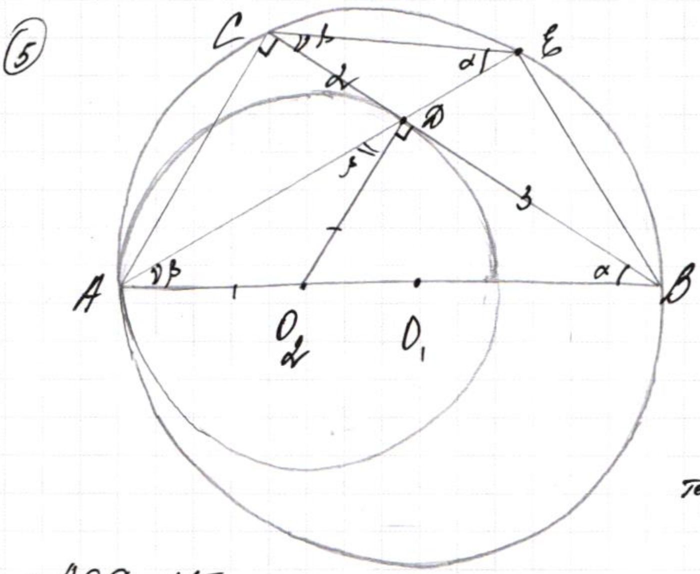
Из $\triangle ADE$: $\quad DE=\frac{\sqrt{7}}{3}\sqrt{\frac{3}{7}}=\frac{\sqrt{3}}{3}. \quad S_{ADE}=\frac{1}{2}AE\cdot DE=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{9}.$

т.к. $CD:AD=1:2$, то $S_{CDE}=2S_{ADE}=\frac{2\sqrt{3}}{9}.$

Ответ: $\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(5)



$\angle O_2DB = 90^\circ$, т.к. касательная

$\angle ACB = 90^\circ$, т.к. опирается на диаметр

из $\triangle BDO_2$: $\cos\alpha = \frac{3}{2R-r}$ R - рад. бол. окр. r - мал. окр.

у $\triangle ACB$: $\cos\alpha = \frac{5}{2R}$.

$\frac{3}{2R-r} = \frac{5}{2R} \Rightarrow 6R = 10R - 5r \Rightarrow \boxed{R = \frac{5}{4}r}$

теор. Пифагора для $\triangle BDO_2$

$r^2 + 3^2 = (2R-r)^2$

$r^2 + 9 = \frac{9}{4}r^2$ $\boxed{r = \frac{6\sqrt5}{5}}$

$36 = 5r^2$

$R = \frac{3\sqrt5}{2}$.

$\cos\alpha = \frac{\sqrt5}{3} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{2}{3}$

$\triangle AO_2D$ - р/б

$\angle DO_2B = 2\beta$ как внешний

$\angle DO_2B = 90^\circ - \alpha$ у $\triangle O_2DB$.

$\boxed{2\beta = 90^\circ - \alpha}$

$\angle EAB$ и $\angle ECB$ опираются на 1 дугу

$\angle EAB = \angle ECB$

$\angle CBA$ и $\angle CEB$ опираются на 1 дугу $\angle ABC = \angle CEB$.

по 2 углам $\triangle CDE \sim \triangle ADB \Rightarrow \frac{2}{AD} = \frac{DE}{3} \Rightarrow AD \cdot DE = 6$.

$\angle EDB = 90^\circ - \beta = 45^\circ + \frac{\alpha}{2}$ $AD = \frac{2}{\cos(45^\circ + \frac{\alpha}{2})}$ $\sin(45^\circ + \frac{\alpha}{2}) = \frac{1}{\sqrt6}$.

$\cos(45^\circ + \frac{\alpha}{2}) = x$ $2x^2 - 1 = \frac{2}{3}$ $x^2 = \frac{5}{6}$ $x = \sqrt{\frac{5}{6}}$. $AD = \frac{2}{\sqrt{5/6}} = \frac{2\sqrt6}{\sqrt5}$

$DE = \frac{6}{AD} = 3\frac{\sqrt5}{\sqrt6}$

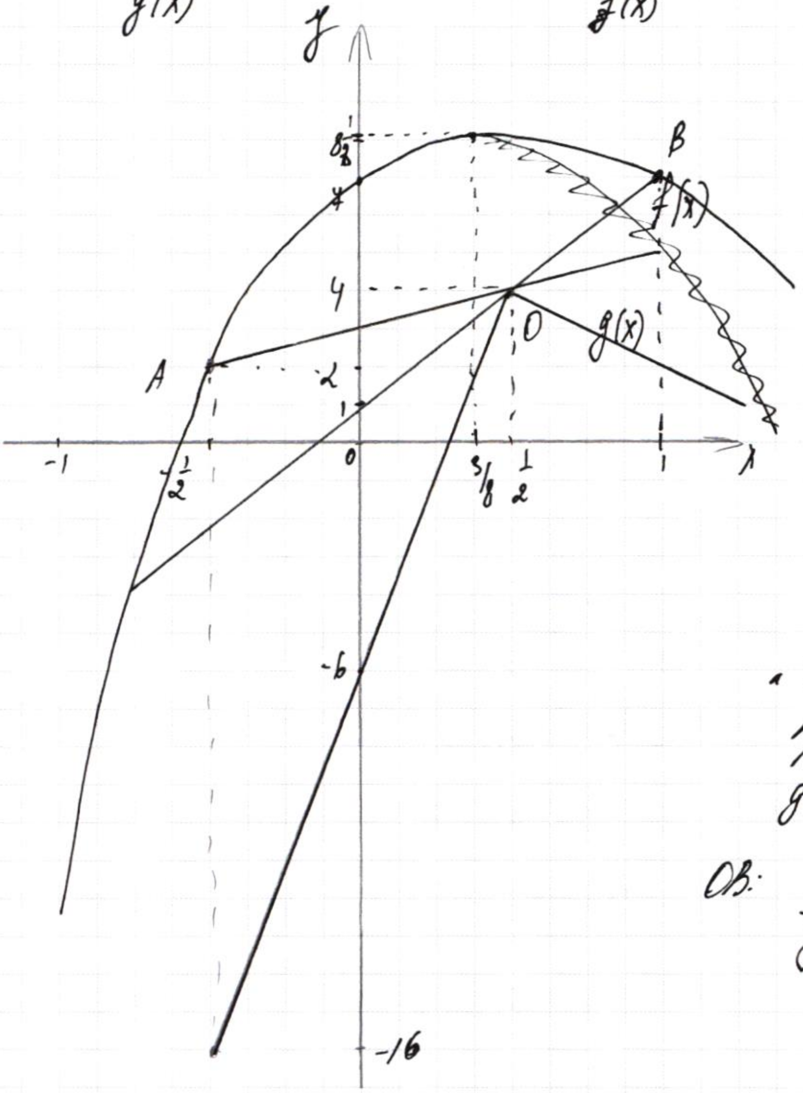
$AE = AD + DE = \frac{27}{\sqrt{30}}$.

$S = \frac{1}{2} AE \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{27}{\sqrt{30}} \cdot \sin(90^\circ - \beta) = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{27}{\sqrt{30}} \cdot \frac{1}{\sqrt6} = \frac{5 \cdot 27}{2 \cdot 6 \cdot \sqrt5} = \frac{9\sqrt5}{4}$

Ответ: $\frac{9\sqrt5}{4}$.

⑥ $8x-6|2x-1| \le ax+b \le -8x^2+6x+7$

$\underset{g(x)}{\shortparallel}$ $\qquad$ $\underset{f(x)}{\shortparallel}$



1) $f(x) = -8x^2+6x+7$

верш. $x_0 = \frac{3}{8}$

$f(x)_0 = 8\frac{1}{8}$

2) $g(x) = \begin{cases} 6-4x, & x \ge \frac{1}{2}, \\ 20x-6, & x < \frac{1}{2}. \end{cases}$

Построим графики $f(x)$ и $g(x)$.

$f(1) = 7$ $\qquad g(1) = 2$

$f(-\frac{1}{2}) = 2$

$g(\frac{1}{2}) = 4$

„крайними" прямыми являются прямые AO и OB, т.к. в них дост. крит. знач. ф-ций.

OB:

x	1	$\frac{1}{2}$
y	7	4

$\boxed{y_1 = \underset{a_1}{6}x + \underset{b_1}{1}}$

$a_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6$

$b_1 = 4 - 6\cdot\frac{1}{2} = 1$

AO:

x	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
y	2	4

$a_2 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2$

$y_2 = 2x+3$ $\qquad b_2 = 4 - 2\cdot\frac{1}{2} = 3$

Ответ: $(6;1); (2;3)$.

⑦ $D(f): x>0, x \in R$

$f(ab) = f(a)+f(b)$. $\qquad f(p) = [p/2]$. $\qquad f(p) = \begin{cases} 1, & p=2, \\ \frac{p-1}{2}, & p>2. \end{cases}$

$x, y \in [2;22]$. $\qquad f(x:y) < 0$. $\qquad f(x:y) = f(x) + f(\frac{1}{y})$.

$f(x) > 0$; $f(\frac{1}{y}) > 0 \Rightarrow f(\frac{x}{y}) > 0$.

Ответ: таких пар нет.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

① q - знаменатель геом. прогр. d - четвертый член пр.

$b = qa \quad c = q^2 a \quad d = q^3 a \quad ; a, b, c, d \neq 0$

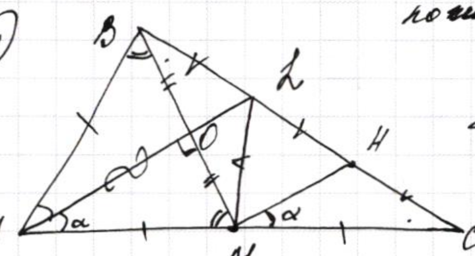
$a \cdot q^6 a^2 - 2qa \cdot q^3 a + q^2 a = 0$

$q^6 a^3 - 2q^4 a^2 + q^2 a = 0$

$q^2 a (q^4 a^2 - 2q^2 a + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} q^2 a = 0, \text{ - невозм.} \\ \underline{q^2 a = 1.} \end{array}\right.$

Ответ: 1.

②



по катету и острому углу △AOM = △AOB

AC = 2AB

$\alpha = \frac{1}{2} \angle BAC$

△MAB - р/б

$\angle AMB = \angle MBC + \angle BCM = 90° - \alpha$

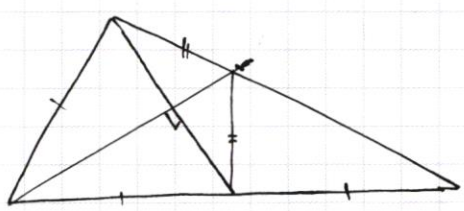
BO = OM

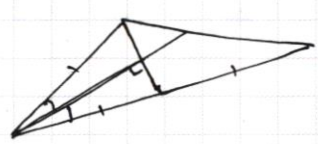
$BL : LC = \frac{1}{2}$

по катету и острому углу △BOL = △MOL

$\angle BMH = 90°$

$X + 2X + \ldots = 900$



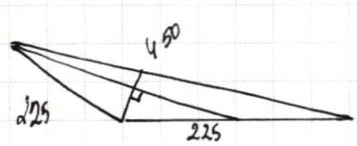


$3X + BC = 900$

$X < BC < 3X$

$4X < 900 < 6X$

$150 < X < 225.$



74 значения.

③ $\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 6y = \sqrt{(x-6)(y-1)}, \\ x^2 - 12x + 36 + 2(y^2 - 2y + 1) - 2 - 16 = 0 \end{cases}$ $\quad x - 6y \geq 0$

$(x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18$

Пусть $a = x - 6 \quad b = y - 1$

$a - 6b = x - 6 - 6y + 6 = x - 6y.$

$a = \frac{13b \pm \sqrt{25b^2}}{2} = 9b, 4b$

$\begin{cases} a - 6b = \sqrt{ab}, \\ a^2 + 2b^2 = 18. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 12ab + 36b^2 = ab, \\ a^2 + 2b^2 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 13ab + 36b^2 = 0, \\ a^2 + 2b^2 = 18. \end{cases}$ или b, $b > \frac{1}{25}$.

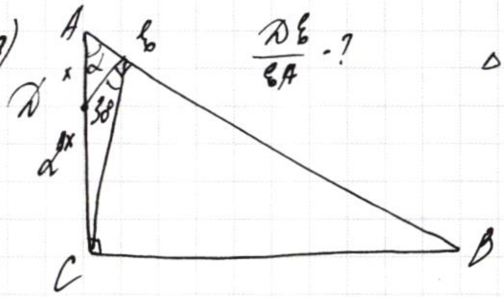
$83b^2 = 0 \quad b = 0 \quad 18b^2 = 0$ невозм.

$b^2 = 1$ или $b^2 = \frac{18}{83} > \frac{1}{5}$.

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

4) а)



$\frac{DE}{EA}$ - ?

$\triangle AED \sim \triangle ACB$ $\sin\alpha = \frac{AE}{x} = \frac{AB}{AC}$

$\frac{DE}{AE} = \frac{BC}{AC}$ $\frac{x}{AB} = \cancel{3x}\ \frac{AE}{3x}$

$90^\circ+\alpha$ $\frac{2x}{\sin 30^\circ} = 4x = \frac{EC}{\sin(90^\circ+\alpha)} = \frac{EC}{\cos\alpha}$

$EC = 4x\cos\alpha = 2\sqrt3 x\sin\alpha$ $\frac{AC}{\sin 120^\circ} = \frac{2AC}{\sqrt3} = 2\sqrt3 x = \frac{EC}{\sin\alpha}$

$4\cos\alpha = 2\sqrt3\sin\alpha$

$\frac43 = \frac{16\cos^2\alpha}{12} + \cos^2\alpha = 1$

$\frac73\cos^2\alpha = 1$ $\cos\alpha = \sqrt{\frac37}$ $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt7}$ $tg\alpha = \frac{2}{\sqrt3} = \frac{2\sqrt3}{3}$

б) $AC = \sqrt7$ S_{CED} - ?

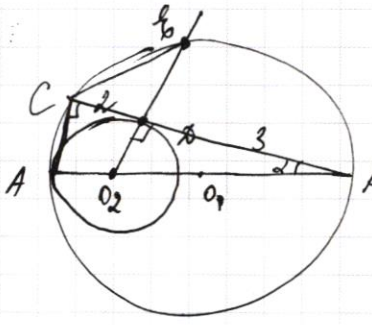
$\cancel{AE\cdot\frac{\sqrt7}{8}}$ $\frac{3AE}{\sqrt7} = \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt7}$ $AE = \frac23$

$\frac{3DE}{\sqrt7} = \frac{\sqrt3}{\sqrt7}$ $DE = \frac{\sqrt3}{3}$

$S_{AEC} = \frac12 DE\cdot AE = \frac12\cdot\frac{\sqrt3}{3}\cdot\frac23 = \frac{\sqrt3}{9}$

$S_{DEC} = \frac23\cdot\frac{\sqrt3}{9} = \frac{2\sqrt3}{27}$

5)

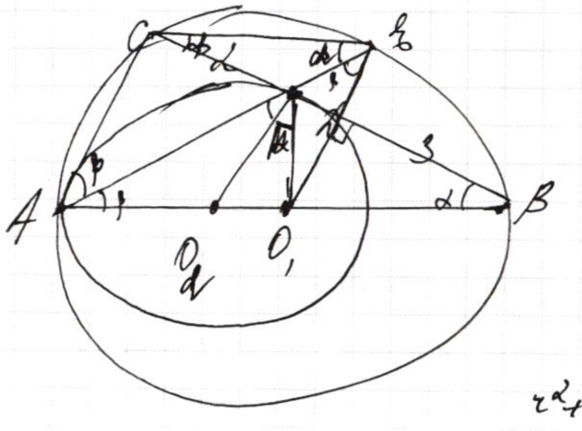


$\cos\alpha = \frac{3}{2R-r} = \frac{5}{2R}$

$\triangle BO_2D \sim \triangle BAC$ по остр. углу

$\frac{2R-r}{2R} = \frac35$ $6R = 10R - 5r$

$5r = 4R$



$\frac{r}{AC} = \frac35$ $r = \frac45 R$ $R = \frac54 r$

$r^2 + 9 = 4R^2 - 4Rr + r^2$ $r = \frac{6}{\sqrt5}$

$r^2+9 = \frac{25}{4}r^2 - 5r^2 + r^2$ $4r^2 + 36 = 9r^2$

$r^2+9 = 2\frac14 r^2$ $\cancel{5r^2 = 36}$ $5r^2 = 36$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cos\alpha = \frac{3}{2R-r} = \frac{5}{2R}$ $10R - 5r = 6R$

$4R = 5r$ $\boxed{R = \frac{5}{4}r}$

$\frac{\sqrt5}{3}$ $\frac{5}{3\sqrt5} =$

из △ BO_2D: $9 + r^2 = 4R^2 - 4Rr + r^2$

$9 = \frac{25}{4}r^2 - 5r^2 = 1\frac{1}{4}r^2 = \frac{5}{4}r^2$ $\cos\alpha = \frac{5}{\frac{6\sqrt5}{2}} = \frac{10}{6\sqrt5} =$

$36 = 5r^2$ $r^2 = \frac{36}{5}$ $r = \frac{6\sqrt5}{5}$ $R = \frac{6\sqrt5}{4} = \frac{3\sqrt5}{2}$

(!) $\frac{6\sqrt5}{4} : 3 = \cos\alpha = \frac{\sqrt5}{3}$

$\cos\alpha = \frac{5}{3\sqrt5} = \frac{\sqrt5}{3}$ $\sin\alpha = \sqrt{1-\frac{5}{9}} = \frac{2}{3}$

(!) $\angle ADC = 2\alpha$ $\angle AO_2D = 90° + \alpha$

$\cos\angle ADC = 2$ $\sin\angle AO_2D = \cos\alpha$

$\cos\angle AO_2D = \sin\alpha$.

из △AO_2D и вн. угла.

$2\beta = 90° - \alpha$ => $\angle CAE = \beta$

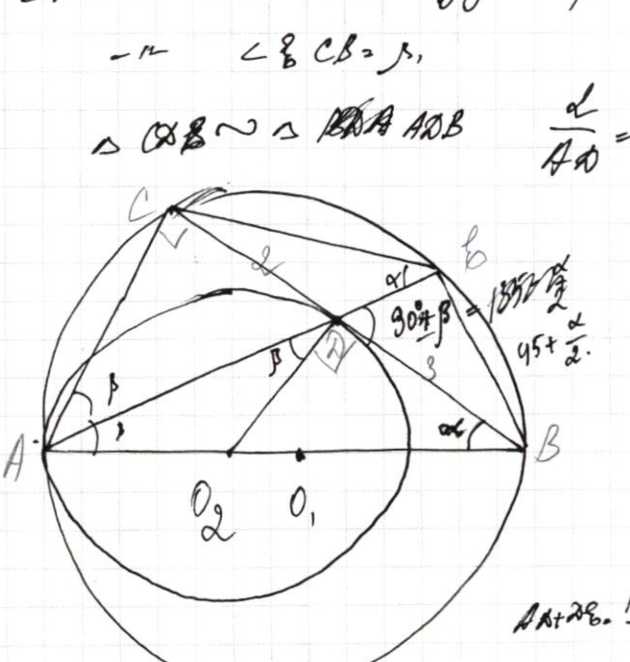
$\angle DAO_2 = \angle ADO_2 = \beta$.

△ AO_1E – р/б $\angle AEO_1 = \beta$

$\alpha = \angle ABC = \angle AEC$ опираются на 1 дугу $EO_1 \parallel CA$.

=> $\angle ECB = \beta$.

△ CDE ∼ △ ADB $\frac{2}{AD} = \frac{DE}{3}$ $AD \cdot DE = 6$. S_2



$\cos\angle AO_2D = \sin\alpha$ $AE = \frac{9}{\sqrt{10}} = \frac{9\sqrt{10}}{10}$

$AD^2 = r^2 + r^2 - 2r^2\sin\alpha = 2r^2(1-\sin\alpha)$.

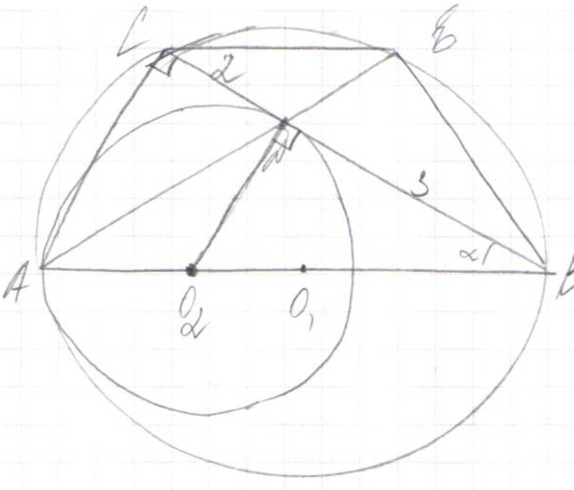
$AD = r\cdot\sqrt{2 - 2\sin\alpha} = r\cdot\sqrt{2-\frac{4}{3}} = r\sqrt{\frac{2}{3}} =$

$= \frac{6\sqrt5}{5}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{6\sqrt{10}}{5\sqrt3} = \frac{6\sqrt2}{\sqrt{15}} = \frac{2\sqrt6}{\sqrt5}$.

$AD + DE = \frac{15+12}{\sqrt{30}} = \frac{27}{\sqrt{30}}$ $DE = \frac{3\sqrt5}{\sqrt6}$.

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)



$\beta = 45^\circ - \alpha.$

$\sin\left(45 + \frac{\alpha}{2}\right) = \sin\frac{1}{2}(90^\circ + \alpha) = x$

$1 - 2x^2 = \cos(90^\circ + \alpha) = \sin\alpha$

$1 - 2x^2 = \frac{2}{3}$

$2x^2 = \frac{1}{3} \quad x = \frac{1}{\sqrt{6}}.$

$S = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{9}{\sqrt{10}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{45}{4\sqrt{15}} = \frac{3\sqrt{15}}{4}.$

⑥

$8x - 6|2x-1| \le ax + b \le -8x^2 + 6x + 7 = -(8x^2 - 6x - 7) = -8\left(x - \frac{3-\sqrt{65}}{\ldots}\right)(x + 3 + \sqrt{65})$

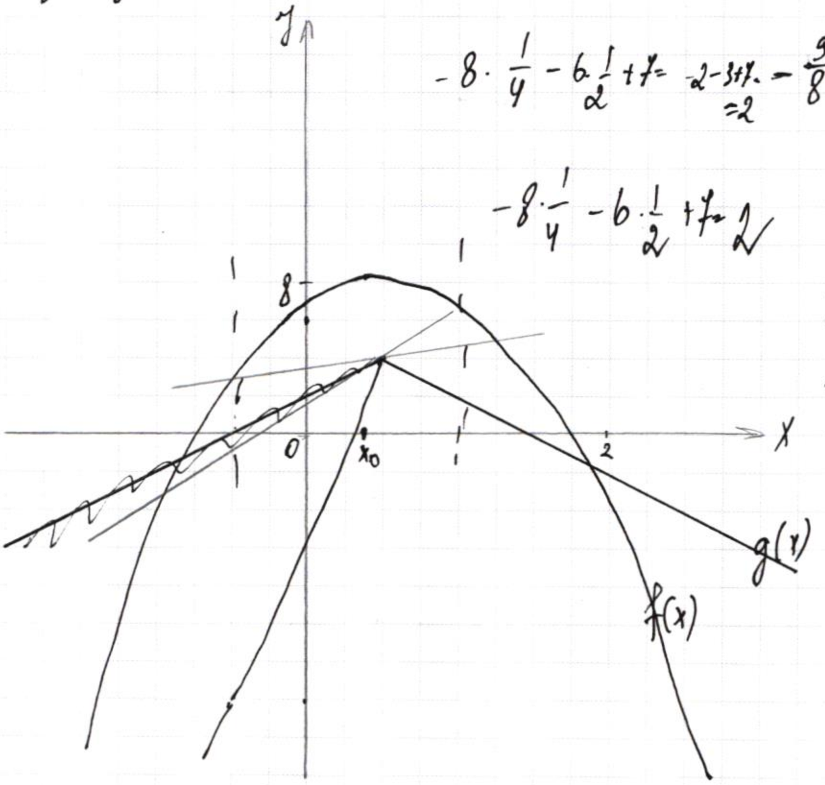
$x_0 = -\frac{6}{2 \cdot (-8)} = \frac{3}{8}. \quad D_1 = 9 + 56 = 65.$

1) $x \ge \frac{1}{2}$. $y = 8x - 12x + 6 = 6 - 4x$

2) $x < \frac{1}{2}$ $y = 8x - 6 + 12x = 20x - 6$

$~~-8(x - (\sqrt{65}-3))(x + \sqrt{65} + 3)~~$

$= -8(x + \sqrt{65} - 3)(x - \sqrt{65} - 3).$



$-8 \cdot \frac{1}{4} - 6 \cdot \frac{1}{2} + 7 = -2 - 3 + 7 = 2$ $= -\frac{9}{8} + \frac{9}{4} + 7 = 8\frac{1}{8}.$

$(P) = \left(\frac{3}{8}; 8\frac{1}{8}\right).$

$-8 \cdot \frac{1}{4} - 6 \cdot \frac{1}{2} + 7 = 2$

$f(-0{,}5) \in [-16; 2].$

$~~f(1) \in~~$

$f(1) = -8 + 6 + 7 = 5$

$g\left(\frac{1}{2}\right) = 4.$

x	1	$\frac{1}{2}$
y	7	4

$a_1 = 6.$

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -16. \quad b_1 = 1.$

x	$-0{,}5$	$\frac{1}{2}$
y	-16	4

$a_2 = 20.$

$b_2 = -6.$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА