МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

№1.

Числа a, b, c — члены геометрической прогрессии (последовательные). Значит можно записать: $b = a\cdot q$; $c = a\cdot q^2$, где q — некоторая константа. Причём $\underline{a\neq 0}$; $\underline{q\neq 0}$. Тогда четвёртый член прогрессии: $d = aq^3$,

при этом d — корень $ax^2+2bx+c=0 \Rightarrow a\cdot(aq^3)^2+2\cdot aq\cdot aq^3+aq^2=0$

$\Leftrightarrow a^3q^6+2a^2q^4+aq^2=0$. Сделаем замену, пусть $t = aq^2$, тогда

$$t^3+2t^2+t=0 \Leftrightarrow t(t^2+2t+1)=0 \Leftrightarrow t(t+1)^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=-1 \end{array}\right.$$

$a\neq 0$ и $q\neq 0 \Rightarrow t\neq 0$; значит $t=-1$, т.е. $\underline{aq^2=-1}$, но

aq^2 это и есть искомое c (третий член прогрессии). Итак, $\underline{c=-1}$

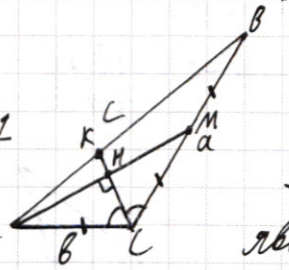
$\boxed{\text{Ответ: } -1}$

№2.

Пусть $\triangle ABC$ (рис.1) со сторонами $BC=a$; $AC=b$; $AB=c$ — один из искомых.

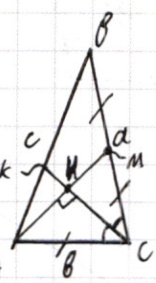
Тогда пусть AM и CK — такие медиана и биссектриса, что $AM\perp CK$ ($AM\cap CK=H$). Тогда $\triangle AMC$ — равнобедренный ($AC=MC$), т.к. CH в нём — биссектриса и высота.

рис.1



Значит $AC=MC=MB$, т.е. $\underline{a=2b}$. Проверим, является ли это условие достаточным: для этого снова начертим $\triangle ABC$ такой, что $a=2b$ (рис.2) и проверим в нём медиану AM ($AM\cap CK=H$) и биссектрису CK. Тогда CH — биссектриса в равнобедр. $\triangle ACM$, а значит CH — и высота в $\triangle ACM$ ($AC=MC$), т.е. $CK\perp AM$.

рис.2



Итак, для выполнения условия перпендикулярности биссектрисы и медианы необходимо и достаточно, чтобы одна из сторон $\triangle$ была вдвое больше другой.

Значит искомый $\triangle$ имеет стороны вида: $\underline{a, 2a, b}$

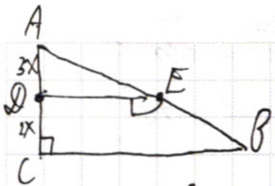
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



№1

$b = aq$

$c = aq^2$ — ?

aq^3 — корень $ax^2+2bx+c=0$

$a\cdot(aq^3)^2+2\cdot aq\cdot aq^3+aq^2=0$

$a^3\cdot q^6+2a^2q^4+aq^2=0$

Пусть ~~$aq^2 = t$, тогда~~ $aq^2=t$, тогда

$t^3+2t^2-t=0$

$t(t^2+2t-1)=0$

$t=0$ или $t^2+2t-1=0$

$D=2^2-4\cdot1\cdot(-1)=8$

$t_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt8}{2}=\frac{-2\pm2\sqrt2}{2}=-1\pm\sqrt2$

$y-2x=$

$=(y-2)+2-2(x-1)+1)=$

$=$

$\begin{cases} a+2-2\cdot(b+1)=\sqrt{ab} \\ a^2+2b^2-3=0 \end{cases}$

$y^2-4xy+4x^2=$

$=y^2+4x(x-y)$

№3

$y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2}$

$2x^2+y^2-4x-4y+3=0$

$y^2-4xy+4x^2=xy-2x-y+2$

$2x^2+y^2-4x-4y+3=0$

$y-2x=\sqrt{x(y-2)-(y-2)}$

$2x(x-2y)+y^2-4x+3=0$

$y-2x=\sqrt{(x-1)(y-2)}$ (1)

~~2x~~

$y^2-4y+4-1+2x^2-4x=0$ (2)

$(y-2)^2+x^2-2x+1+x^2-2x+1-3=0$

$(y-2)^2+2\cdot(x-1)^2-3=0$

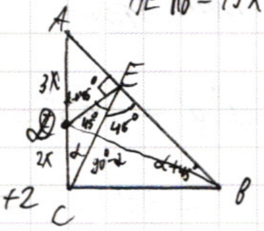
(1): $y^2-4xy+4x^2=$

$=y^2-2xy+4x^2-2xy=$

~~$y(y-2x)+2x(2x-y)$~~

$\frac{AE}{3x}=\frac{5x}{AB}=\frac{DE}{BC}$

$AE\cdot AB=15x^2$



$180°-90°+\alpha-45°=$

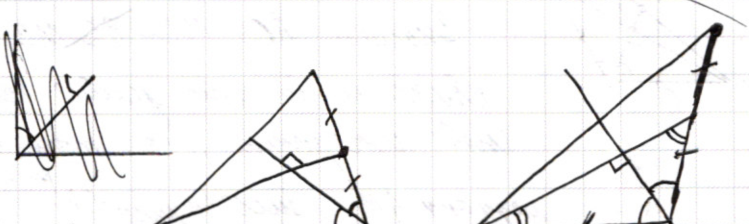
$=135°+\alpha$

$180°-135°+\alpha=$

$=\alpha+45°$

№2

$P=1200$ $a,b,c\in Z$



$\frac{15}{25}=\frac{3}{5}$

$y-2x=\sqrt{(x-1)(y-2)}$ (1) $\Rightarrow$

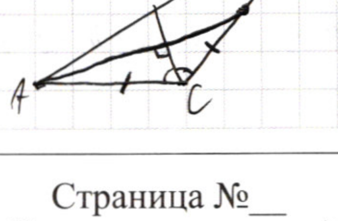
~~$2(x-1)(y-2)=(y-2x)\cdot2$~~

$(y-2)^2+2(x-1)^2-3=0$

$(y-2)^2-2(y-2)(x-1)+(x-1)^2+(x-1)^2-3=-(y-2x)\cdot2$

$((y-2)-(x-1))^2+(x-1)^2-3+2y-4x=0$

$(y-x-1)^2+(x-1)^2+2y-4x-3=0$



☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2 (продолжение).

При этом $\begin{cases} a < 2a+b \text{ – всегда верно} \\ 2a < a+b \Leftrightarrow a<b \\ b < a+3a \Leftrightarrow b<3a \end{cases} \Leftrightarrow \underline{a<b<3a}$ (1)

По условию $a+2a+b=1200$ $(a, b \in N)$

$3a+b=1200$, заметим, что это диофантово уравнение $(1200 \vdots 1 = НОД(3,1))$

относительно a, b. Чтобы его решить прибегнем к вспомогательному:

$3a_1+b_1=1$ — если найдём корни этого ур-я, то корни исходного будут в 1200 раз больше.

~~Воспользуемся теоремой Евклида a_1, b_1, $3a_1+b_1$~~ подбором можно найти корни:

$a_1=1$; $b_1=-2$, тогда корни исходного: $\begin{cases} a=1200-1\cdot n, \text{ где } n\in Z \\ b=-2400+3n; \end{cases}$

$b>0 \Rightarrow -2400+3n>0$; $3n>2400$; $n>800 \Rightarrow a<1200-800$; $a<400$.

Итак, мы пришли к ~~новому ур-ю~~ новой системе: $\begin{cases} a=400-k \\ b=3k \end{cases}$, где $\underline{k\in N}$; $\underline{k<400}$

Согл. (1): $400-k<3k<3\cdot(400-k) \Leftrightarrow 400<4k<1200-2k \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} k>100 \\ k<200 \end{cases}$ $(k<400)$; но $k\in N$, значит имеется 99 вариантов для k (от 101 до 199), столько же и треугольников можно составить

$\boxed{\text{Ответ: } 99}$

№3

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-2x=\sqrt{x(y-2)-(y-2)} \\ y^2-4y+4-1+2x^2-4x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-2x=\sqrt{(x-1)(y-2)} \\ (y-2)^2+2(x^2-2x+1)-3=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (y-2)+2-2((x-1)+1)=\sqrt{(x-1)(y-2)} \\ (y-2)^2+2(x-1)^2-3=0 \end{cases}$$

Немного упростим систему, сделав замену: пусть $y-2=a$; $x-1=b$. Тогда имеем:

$$\begin{cases} a+2-2(b+1)=\sqrt{b\cdot a} \\ a^2+2b^2-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \quad (1) \\ a^2+2b^2-3=0 \quad (2) \end{cases}$$ Перейдём к системе - следствию, возведя (1) уравнение в квадрат:

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} a^2-4ab+4b^2=ab \\ a^2+2b^2-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-5ab+4b^2=0 \quad (3) \\ a^2+2b^2-3=0 \quad (4) \end{cases}$$

Если решать (3) отн. a, то, если корни есть, $a=b$ и $a=4b$; корни есть, если $D=(5b)^2-4\cdot1\cdot(4b)^2=25b^2-16b^2=9b^2\geq0$, т.е. при любом b.

Подставим значения a в (4): $\begin{cases} b^2+2b^2-3=0 \\ a=b \end{cases}$ (5) или $\begin{cases} (4b)^2+2b^2-3=0 \\ a=4b \end{cases}$ (6)

(5): $\begin{cases} b^2=1 \\ a=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\pm1 \\ a=\pm1 \end{cases}$, т.е. $a_1=-1$; $b_1=-1$
$a_2=1$; $b_2=1$

(6): $\begin{cases} 18b^2=3 \\ a=4b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2=\frac{1}{6} \\ a=4b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\pm\frac{1}{\sqrt6} \\ a=\pm\frac{4}{\sqrt6} \end{cases}$, т.е. $a_3=-\frac{4}{\sqrt6}$; $b_3=\frac{-1}{\sqrt6}$; $a_4=\frac{4}{\sqrt6}$; $b_4=\frac{1}{\sqrt6}$

Итак, имеем:

1) $y-2=-1$, $x-1=-1$; $x_1=0$, $y_1=1$

2) $y-2=1$, $x-1=1$; $x_2=2$, $y_2=3$

3) $y-2=-\frac{4}{\sqrt6}$, $x-1=\frac{-1}{\sqrt6}$; $x_3=1-\frac{\sqrt6}{6}$, $y_3=2-\frac{4\sqrt6}{6}=2-\frac{2\sqrt6}{3}$

4) $y-2=\frac{4}{\sqrt6}$, $x-1=\frac{1}{\sqrt6}$; $x_4=1+\frac{\sqrt6}{6}$, $y_4=2+\frac{2\sqrt6}{3}$

Ответ: $(0;1)$; $(2;3)$; $\left(1-\frac{\sqrt6}{6}; 2-\frac{2\sqrt6}{3}\right)$; $\left(1+\frac{\sqrt6}{6}; 2+\frac{2\sqrt6}{3}\right)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

Дано:

а) ΔABC – прямоуг. ($\angle ACB = 90^\circ$)

$D \in AC$; $E \in AB$;

$\frac{AD}{AC} = \frac{3}{5}$

$DE \perp AB$

$\angle CED = 45^\circ$

б) $AC = \sqrt{29}$

Найти:

а) $tg(\angle BAC)$ – ?

б) $S_{\Delta CED}$ – ?

а) Решение:

Пусть $AD = 3x$, тогда $CD = 2x$

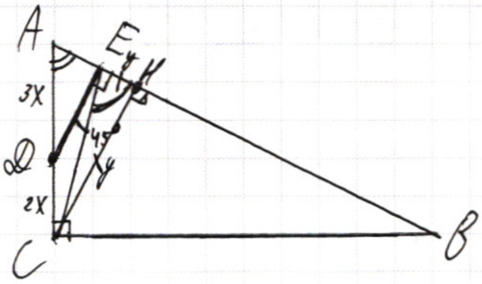
$\angle BEC = 90^\circ - \angle CED = \underline{45^\circ}$

$\Delta AED \sim \Delta ACB$

($\angle BAC$ – общ.; $\angle AED = \angle ACB = 90^\circ$)

$\Downarrow$

$\frac{AE}{3x} = \frac{5x}{AB} \Rightarrow AE \cdot AB = 15x^2$



Построим $CH \perp AB$ ($H \in AB$), тогда $\angle ECH = 90^\circ - \angle CEH = 45^\circ \Rightarrow$ ($\angle CEH$)

ΔEHC – равнобедренный ($\underline{EH = CH}$); $\Delta ADE \sim \Delta ACH$

(пусть $EH = CH = y$) ($\angle BAC$ – общ.; $\angle AED = \angle AHC = 90^\circ$)

$\Rightarrow \frac{AE}{AE+y} = \frac{3x}{5x} = \frac{ED}{y}$; по теореме Пифагора $ED^2 + AE^2 = (3x)^2$ для ΔAED:

Итак, имеем систему:

$$\begin{cases} 5AE = 3AE + 3y \Rightarrow \underline{AE = 1{,}5y} \\ \frac{AE}{AE+y} = \frac{ED}{y} \\ ED^2 + AE^2 = 9x^2 \end{cases}$$

$\Rightarrow \frac{1{,}5y}{1{,}5y+y} = \frac{ED}{y} \Rightarrow \underline{ED = y \cdot \frac{3}{5}}$

Тогда $(1{,}5y)^2 + \left(\frac{3}{5}y\right)^2 = 9x^2$

$\frac{9}{4}y^2 + \frac{9}{25}y^2 = 9x^2 \Rightarrow y^2\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{25}\right) = x^2 \Rightarrow y^2 \cdot \frac{25+4}{100} = x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{y = x\sqrt{\frac{100}{29}} = \frac{10}{\sqrt{29}}x}$ $\quad$ $tg\angle BAC = \frac{CH}{AH} = \frac{y}{AE+y} = \frac{y}{1{,}5y+y} = \frac{1}{2{,}5} = \frac{2}{5} = \underline{0{,}4}$

б) $CE = \sqrt{2y^2} = y\sqrt{2} =$ (по т. Пифагора для ΔCEH) (т.к. $y = \frac{10}{\sqrt{29}}x$ из п. а))

$= \frac{10}{\sqrt{29}}x \cdot \sqrt{2} = \underline{\frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{29}}x}$; $DE = \frac{3}{5}y = \frac{3}{5} \cdot \frac{10x}{\sqrt{29}} = \underline{\frac{6x}{\sqrt{29}}}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 4 (Нумеровать только чистовики)

№4 (продолжение)

Тогда $S_{\triangle CED}$ можно найти через стороны DE, CE и $\sin\angle CED$:

$$S_{\triangle CED} = \frac{1}{2} \cdot \frac{6 \cdot x}{\sqrt{29}} \cdot \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{29}} \cdot x \cdot \sin 45^\circ = \frac{30\sqrt{2}}{29} x^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\cancel{15}^{\,30}}{29} x^2 \Rightarrow$$

По условию $AC = 5x = \sqrt{29} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{29}}{5}$

$$\Rightarrow S_{\triangle CED} = \frac{30}{29} \cdot \left(\frac{\sqrt{29}}{5}\right)^2 = \frac{30}{25} = \frac{6}{5}$$

Ответ: а) $tg(\angle BAK) = 0{,}4$;
б) $S_{\triangle CED} = \frac{6}{5}$

№5

Дано:

Окр. Ω касается окр. ω внутр. образом.

AB — диаметр Ω

BC — хорда Ω;

BC — касательная к ω (BC касается ω в т. D.)

$CD = 1$

$BD = 3$

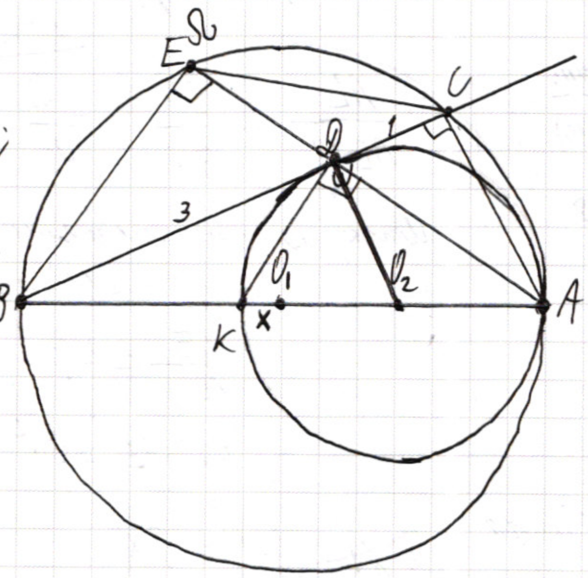
Найти:

R (радиус Ω) — ?

r (радиус ω) — ?

S_{BACE} — ?

Решение:



Пусть O_1 — центр Ω;

O_2 — центр ω;

$\omega \cap AB = K$; $KO_1 = x$;

тогда $BK = R - x$

По теореме о кас. и сек. к окр-ти ω:

$BD^2 = BK \cdot AB \Rightarrow$

$\Rightarrow 3^2 = (R - x) \cdot 2R$

$9 = 2R^2 - 2Rx$; $\angle BEA = \angle ACB = 90^\circ$ т.к. опираются на диаметр AB; Проведём KD; $\angle ADK = 90^\circ$ т.к. опир. на диам. AK (AK — диаметр, т.к. точки $A; O_1; O_2; B$ лежат на одн. прям., т.к. Ω кас. ω)

Т.е. $KD \parallel BE$. Проведём DO_2: $\angle BDO_2 = 90^\circ$ т.к. $DO_2 = r$; BD — кас.;

По т. Пифагора для $\triangle BDO_2$: $BD^2 + DO_2^2 = BO_2^2 \Rightarrow 3^2 + r^2 = (R - x + r)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 9 = R^2 - 2Rx + 2Rr - 2xr + x^2$

Отсюда нетрудно показать, что $x = 0 \Rightarrow \underline{R = 2r}$.

№5 (продолжение)

Тогда по т. Пифагора для ΔBDO_2: $BD^2 + DO_2^2 = BO_2^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3^2 + r^2 = (R+r)^2 \Rightarrow 9 + r^2 = (2r+r)^2 \Rightarrow 9 + r^2 = 9r^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 8r^2 = 9 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{9}{8}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \underline{\frac{3}{4}\sqrt{2}}$

~~Тогда EC || AB, т.~~ $R = 2r = \frac{6}{4}\sqrt{2} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$

Тогда EC || AB, т.е. BACE – трапеция, причём равнобокая (BE = AC)

По т. Пиф. для ΔABC:

$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} =$

$= \sqrt{(3\sqrt{2})^2 - 4^2}$

Ответ: $R = \frac{3}{2}\sqrt{2}$; $r = \frac{3}{4}\sqrt{2}$

☐ черновик ☑ чистовик Страница №6

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

$2x^2 - x - 1 \le ax + b \le x + |2x-1|$

$$\begin{cases} 2x^2 - x - 1 - (ax+b) \le 0 \\ \cancel{2x^2 - x - 1}\ x + |2x-1| - (ax+b) \ge 0 \end{cases}$$

$2x^2 - x - 1 - ax - b \le 0$

$x + |2x-1| - ax - b \ge 0$

$y^2 + AC^2 = (2R)^2$

$1^2 + AC^2 = AD^2$

$KD^2 + AD^2 = 2r^2$

$(R-x)^2 + 2(R-x)r + r^2 = 3^2 + r^2$

$9 = R^2 - 2Rx + x^2 + 2Rr - 2\cancel{R}xr.$

$$\begin{cases} 9 = R^2 - 2Rx + 2Rr - 2xr + x^2 \\ 9 = 2R^2 - 2Rx \end{cases}$$

$\Downarrow$

$R^2 - \cancel{2Rx} + 2Rr - 2xr + x^2 = 2R^2 - \cancel{2Rx}$

$R^2 - 2Rr + 2xr - x^2 = 0$

$\cancel{R(R-2r) + x(2r-x) = 0}$

$R^2 - x^2 + 2r(x-R) = 0$

$(R-x)(R+x) - 2r(R-x) = 0$ $\qquad R + x - 2r = 0$

$\cancel{(R-x)}(R+x-2r) = 0$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)