МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

Решение: Т.к. это геометрическая прогрессия => для b и c справедливо: $\begin{cases} b = a\cdot q \\ c = a\cdot q^2 \end{cases}$, где $q \neq 0$. Т.к. если четвертый член прогрессии это d. => $d = aq^3$ => $ax^2 - 2bx + c = 0$

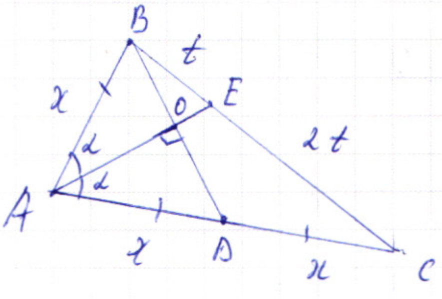
$D = 4b^2 - 4ac$ => $x = \frac{2b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{2(b \pm \sqrt{b^2 - ac})}{2a}$

$= \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}$, т.к. $b = aq$, $c = aq^2$ => $b^2 - ac = 0$ => $x = \frac{b}{a} = q$

=> $d = q = aq^3$ => т.к. $q \neq 0$ => $a = \frac{1}{q^2}$ => $c = aq^2 = \frac{1}{q^2}\cdot q^2 = \boxed{1}$

Ответ: 1.

№ 2



Решение: Пусть у нас $\triangle ABC$; BD – медиана, AE – биссектриса => по усл-ю $AE \perp BD$ => если $AE \cap BD = O$ => в $\triangle ABD$ AO – биссектриса и высота (по усл-ю) => $\triangle ABD$ – равнобедренный => $AD = AB = x$ => $DC = x$ => $AB = x$, $AC = 2x$

AE – биссектриса биссектриса => по её св-ву: $\frac{BE}{AB} = \frac{EC}{AC}$ <=> $\frac{BE}{x} = \frac{EC}{2x}$ => если $BE = t$ => $EC = 2t$ => $BC = 3t$. Также учтем, что т.к. ABC – треугольник => $AB + AC > BC$ <=> $3x > 3t$, также $AB + BC > AC$

$3t > x$

$x > t$.

$\begin{cases} AB + BC + AC = 3(x+t) = 900 \\ 3t > x \\ x > t \end{cases}$ <=> $\begin{cases} x + t = 300 \\ 3t > x \\ x > t \end{cases}$ <=> $\begin{cases} t = 300 - x \\ t > \frac{x}{3} \\ t < x \end{cases}$ <=> $\begin{cases} 300 - x < x \\ \cancel{x > 150} \\ 300 - x > \frac{x}{3} \end{cases}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

№ 2 (продолжение):

Тогда $x \in [151; \cancel{229}]$ => всевозможных x существует ~~149~~ 74 => точких треугольников ~~149~~. 74

Ответ: ~~149~~ 74.

№ 3

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-6y)^2=xy-6y-x+6 \\ x^2-12x+36+2(y^2-2y+1)-18=0 \\ (x-6)(y-1)\geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-6)(y-1)\geq 0 \\ x^2+36y^2-12yx=xy-6y-x+6 \\ (x-6)^2+2(y-1)^2=18 \end{cases} \Rightarrow x^2+36y^2-13yx+6y+x-6=0$$

$$\Updownarrow$$

$$x^2-12x+36+36y^2-72y+36-78+78y+13x-13yx=0$$

$$\Updownarrow$$

$$(x-6)^2+36(y-1)^2+78(y-1)-13x(y-1)=0$$

$$(x-6)^2+36(y-1)^2+(y-1)(78-13x)=0$$

$$(x-6)^2+36(y-1)^2-13(x-6)(y-1)=0$$

тогда:

$$\begin{cases} (x-6)(y-1)\geq 0 \\ (x-6)^2+36(y-1)^2-13(x-6)(y-1)=0 \\ (x-6)^2+2(y-1)^2=18 \end{cases}$$

пусть $x-6=t$, $y-1=f$

$$\begin{cases} t^2+36f^2-13tf=0 \\ t^2+2f^2-18=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{t}{f}\right)^2-13\frac{t}{f}+36=0$$

$$D=169-4\cdot 36=169-144=25 \Rightarrow \frac{t}{f}=\frac{13\pm\sqrt{25}}{2} \to$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{t}{f}=9 \\ \frac{t}{f}=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=9f \\ t=4f \end{array}\right.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

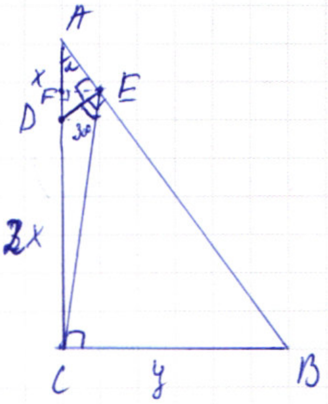
продолжение №3:

$$\left[\begin{array}{l} t=9f \\ t=4f\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(9f)^2+2f^2-18=0\\(4f)^2+2f^2-18=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}83f^2=18\\18f^2=18\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}f=\pm\sqrt{\frac{83}{18}}\\f=\pm1\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=9\cdot\left(\pm\sqrt{\frac{83}{18}}\right) \\ t=4(\pm1)\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}t=9\sqrt{\frac{83}{18}}\\ f=\sqrt{\frac{83}{18}}\end{cases}\\ \begin{cases}t=-9\sqrt{\frac{83}{18}}\\ f=-\sqrt{\frac{83}{18}}\end{cases}\\ \begin{cases}t=4\\ f=1\end{cases}\\ \begin{cases}t=-4\\ f=-1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=6+9\sqrt{\frac{83}{18}}\\ y=1+\sqrt{\frac{83}{18}}\end{cases} \ (+)\\ \begin{cases}x=6-9\sqrt{\frac{83}{18}}\\ y=1-\sqrt{\frac{83}{18}}\end{cases} \ (-),\ \text{т.к. } x-6y<0\\ \begin{cases}x=10\\ y=2\end{cases} \ (-),\ \text{т.к. } x-6y<0\\ \begin{cases}x=2\\ y=0\end{cases} \ (+)\end{array}\right.$$

Ответ: $(\overset{x}{2};\overset{y}{0})$; $\left(\overset{x}{6+9\sqrt{\frac{83}{18}}};\ \overset{y}{1+\sqrt{\frac{83}{18}}}\right)$

№4



Решение: а) $\angle CED = 30^\circ$, $\angle DEB = 90^\circ$. $\Rightarrow$ т.к. $\angle DCB = 90^\circ$ (по усл-ю) $\Rightarrow \angle DCB + \angle DEB = 180^\circ$ $\Rightarrow$ вокруг четырёхугольника $CDEB$ можно описать окружность $\Rightarrow$ т.к. $\angle CEB = \angle DEB - \angle DEC = 60^\circ \Rightarrow$ по теореме синусов:

$$\frac{DC}{2\sin\angle DEC} = \frac{BC}{2\sin\angle BEC} = R,$$ где R — радиус описанной окр-ти.

$$\frac{2x}{\sin 30} = \frac{y}{\sin 60} \Leftrightarrow \frac{2x}{\frac{1}{2}} = \frac{y}{\frac{\sqrt3}{2}} \Rightarrow \sqrt3 x = \frac{1}{2}y$$

$$2\sqrt3 x = y$$

тогда т.к. $tg\angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{y}{3x} = \frac{2\sqrt3 x}{3x} = \boxed{\frac{2}{\sqrt3}}$

б) т.к. $AC = \sqrt{7} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{7}}{3}$; $tg\angle BAC = tg\,\alpha = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{1+tg^2\alpha} =$

$= \frac{1}{1+\frac{4}{3}} = \frac{3}{7} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \Rightarrow AE = AD\cdot\cos\alpha = x\cos\alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} =$

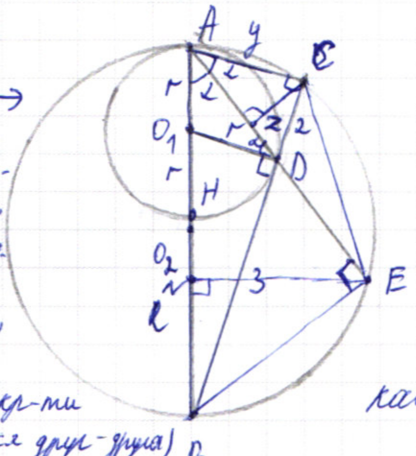
$= \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$ если $FE \perp AC$ (FE - высота, как доп. построение)

$\Rightarrow$ т.к. $\triangle AFE$ - прямоугольный $\Rightarrow FE = AE\cdot\sin\alpha = AE\cdot\sqrt{1-\cos^2\alpha} =$

$= \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{\frac{4}{7}} = \frac{2}{\sqrt{21}} \Rightarrow S_{\triangle DEC} = \frac{1}{2}\cdot DC\cdot FE = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\sqrt{21}}\cdot\frac{2\sqrt{7}}{3} = \frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}} =$

$= \boxed{\frac{2}{3\sqrt{3}}}$ Ответ: $tg\,\alpha = \frac{2}{\sqrt{3}}$; $S_{CED} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$

№5



→ можно утверждать, что O_1 принадлежит отрезку AB (т.к. окр-ти касаются друг-друга)

Решение: Пусть радиус окр-ти ω - r (центр окр-ти находится в т. O_1). Ω - R (центр окр-ти в точке O_2) $\Rightarrow$ т.к. AB - диаметр окр-ти $\Omega \Rightarrow \angle ACB = \angle AEB = 90°$. BC - касательная к окр-ти $\omega \Rightarrow O_1D \perp DB \Rightarrow$ $\angle O_1DB = 90° \Rightarrow$ т.к. $\angle ABC = \angle O_1BD$, $\angle O_1DB =$ $= \angle ACB = 90° \Rightarrow \triangle ACB \sim \triangle O_1DB$ (по 2 углам) $\Rightarrow \frac{O_1D}{AC} = \frac{BD}{BC} = \frac{3}{5} = \frac{r}{y}$

$y = \frac{5}{3}r \Rightarrow$ заметим, что $\angle CAD = \angle ADO_1 = \alpha$ (т.к. $AC \parallel O_1D$) $\Rightarrow$ т.к. $\triangle AO_1D$ - равнобедренный ($AO_1 = O_1D = r$) $\Rightarrow \angle O_1AD = \alpha \Rightarrow AD$ - биссектриса $\angle BAC \Rightarrow$ по св-ву биссектрисы: $\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC}$

$\frac{3}{2R} = \frac{2}{y} = \frac{2}{\frac{5}{3}r} \Rightarrow 5r = 4R$

лож.

$1{,}25r = R \Rightarrow$

т.к. BC - касательная к окр-ти $\omega \Rightarrow$ по св-ву касательных:

$BD^2 = BH\cdot BA \Leftrightarrow 9 = (2R - 2r)\cdot 2R$

$9 = (2R - 2\cdot\frac{4}{5}R)\cdot 2R = (2R - \frac{8}{5}R)\,2R = \frac{2}{5}R\cdot 2R =$

$9 = \frac{4}{5}R^2 \Rightarrow \boxed{R = \sqrt{\frac{45}{4}}} = \frac{3}{2}\sqrt{5} = O_2B \Rightarrow r = \frac{4}{5}R = \frac{4^2}{5\sqrt{5}}\cdot\frac{3\sqrt{5}}{2} = \boxed{\frac{6}{\sqrt{5}}} = O_1A$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6 (продолжение)

5) заметим, что судя из графика $a>0 \Rightarrow$ если $x_1 < x_2$, $x_в$ - коор-та x вершины параболы.

$\Rightarrow ax_1+b < ax_2+b \Rightarrow$ на пр-ке $x\in[\frac{3}{8};1]$ единственным условием не пересечения нашей прямой с $y=-8x^2+6x+7$: $a+b\le 5$ (т.к. на данном пр-ке в т. A — наим-е значение $y=-8x^2+6x+7$).

Аналогичное рассмотрим с $y=8x-6|2x-1|$. На участке $x\in[\frac{3}{8};1]$, наибольшее значение $y=8x-6|2x-1|=4$ (при $x=\frac{1}{2}$)

$\Rightarrow ax+b \geq 8x-6|2x-1|$

$\Downarrow$

$\frac{1}{2}a+b\geq 4$

4) на уч-ке $x\in[-\frac{1}{2};\frac{3}{8}]$: $-8x^2+6x+7\geq ax+b$, тогда

т.к. минимальное зн-е $y=-8x^2+6x+7=2$ $(x=-\frac{1}{2}) \Rightarrow$

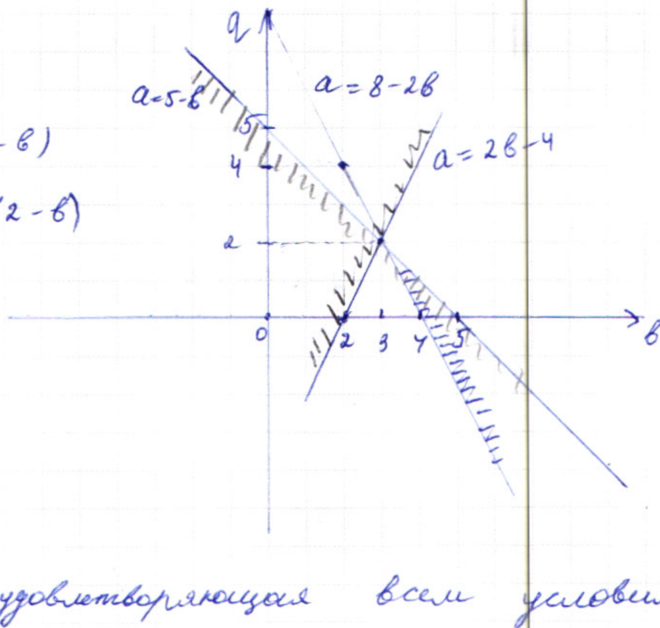
$-\frac{1}{2}a+b\le 2$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} a+b\le 5 \\ \frac{1}{2}a+b\geq 4 \\ -\frac{1}{2}a+b\le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\le 5-b \\ a\geq 2(4-b) \\ a\geq -2(2-b) \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} a\le 5-b \\ a\geq 8-2b \\ a\geq 2b-4 \end{cases}$$



Единственная точка, удовлетворяющая всем условиям $(b=3; a=2)$

Ответ: $b=3$; $a=2$

№5 (продолжение):

Решение: $tg\,\alpha = tg\angle DAC = \frac{CD}{AC} = \frac{2}{y} = \frac{2}{\frac{5}{3}r} = \frac{6}{5\cdot\frac{6}{\sqrt5}} = \frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow$

т.к. $\cos^2\alpha = \frac{1}{1+tg^2\alpha} = \frac{1}{1+\frac{1}{5}} = \frac{5}{6} \Rightarrow \cancel{\cos\alpha}\ \sin^2\alpha = 1-\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{1}{6}$

$\Rightarrow$ если $CZ \perp AE \Rightarrow CZ = AC\cdot\sin\alpha = \frac{5}{3}\cdot\frac{6}{\sqrt5}\cdot\frac{1}{\sqrt6} = \frac{5}{3}\cdot\frac{6}{\sqrt5}\cdot\frac{1}{\sqrt6} = \frac{\sqrt6\cdot\sqrt5}{3}$

$= \frac{\sqrt{30}}{3}$, $AE = AB\cdot\cos\alpha \Rightarrow S_{ABE} = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot EN \ (EN\perp AB) =$

$= \frac{1}{2}AB\cdot AE\cdot\sin\alpha = \frac{1}{2}AB^2\cdot\cos\alpha\cdot\sin\alpha = \frac{1}{2}\cdot 4R^2\cdot\cos\alpha\cdot\sin\alpha = 2R^2\cdot\cos\alpha\sin\alpha$

$= 2\cdot\frac{45}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt6}\cdot\frac{\sqrt5}{\sqrt6} = \frac{45\sqrt5}{12} = \frac{15\sqrt5}{4}$

$S_{ACE} = \frac{1}{2}AE\cdot CZ = \frac{1}{2}AB\cos\alpha\cdot CZ = \frac{1}{2}\cdot 2R\cdot\frac{\sqrt5}{\sqrt6}\cdot\frac{\sqrt{30}}{3} = \sqrt{\frac{45}{4}}\cdot\frac{\sqrt{150}}{\sqrt6\cdot 3} =$

$= \sqrt{\frac{45\cdot 150}{4\cdot 6}}\cdot\frac{1}{3} = 5\cdot\sqrt{\frac{45}{4}}\cdot\frac{1}{3} = \frac{5}{3}\sqrt{\frac{45}{4}} \Rightarrow S_{BACE} = S_{ACE} + S_{ABE} = \frac{5}{3}\sqrt{\frac{45}{4}}$

$+ \frac{15\sqrt5}{4} = \frac{5}{3}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{45} + \frac{15}{4}\sqrt5 = \frac{5\cdot 3}{6}\cdot\sqrt5 + \frac{15}{4}\sqrt5 = \left(\frac{5}{2}+\frac{15}{4}\right)\sqrt5 =$

$= \boxed{\frac{25}{4}\sqrt5}$ Ответ: $r = \frac{6}{\sqrt5}$; $R = \frac{3\sqrt5}{2}$; $S = \frac{25}{4}\sqrt5$

№6

$8x - 6|2x-1| \le ax+6 \le -8x^2+6x+7$

$\Downarrow$

1) $ax+6 \ge 8x - 6|2x-1|$, $y = 8x - 6|2x-1| \Rightarrow$ при $x \ge \frac{1}{2}$:

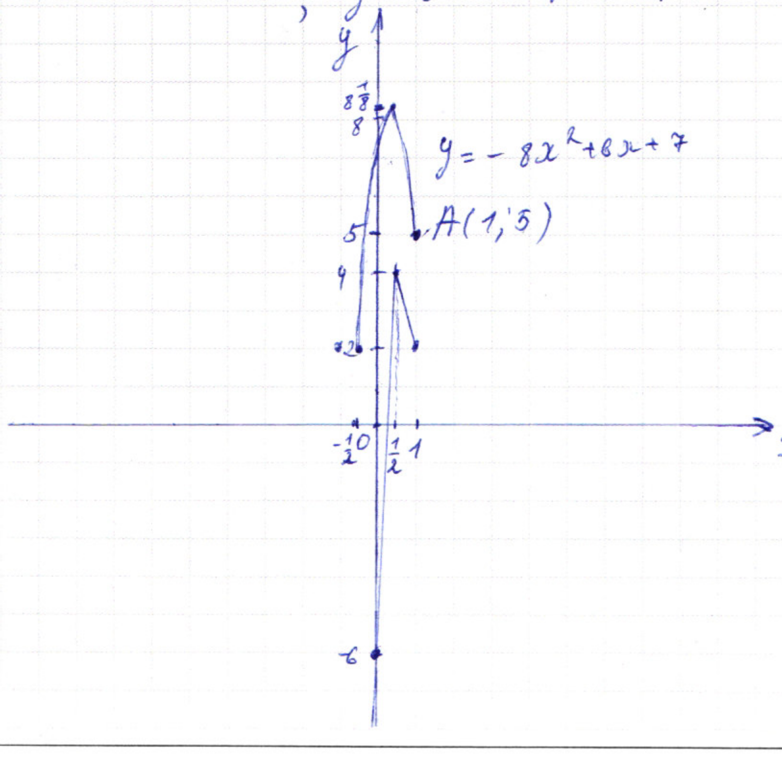
$y = 8x - 12x + 6 = -4x+6$

при $x < \frac{1}{2}$:

$y = 8x + 6(2x-1) =$
$= 20x - 6$

↑построим этот гр-к.

2) аналогично построим $y = -8x^2+6x+7$ (на ~~графике~~ этой координатной пл-ти)



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 7

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = [\frac{p}{2}]$, где p - простое

$= [\frac{p}{2}] + 1$

Решение: Заметим, что

~~$f(p) = f(1) + f(p) = [p/2]$~~

$\frac{x}{y} \in [1; 11]$; $f(p) = f(1) + f(p)$

☐ черновик ☑ чистовик

Страница № 7

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(x-6y)^2$

$(x-6y) = \sqrt{xy-6y-x+6} = \sqrt{y(x-6)-(x-6)} = \sqrt{(y-1)(x-6)}$

$x^2+2y^2-12x-4y+20=0$

$x^2-12x+36+2(y^2-2y+1)-18=0$

$(x-6)^2+2(y-1)^2=18$

$(x-6y)^2 = x^2+36y^2-12yx = x^2+$

$x^2+12x+36$

$+36y^2+12y+1$

$8x - 6|2x-1| \le ax+b \le -8x^2+6x+7 = 0 \Leftrightarrow 8x^2-6x-7=0$

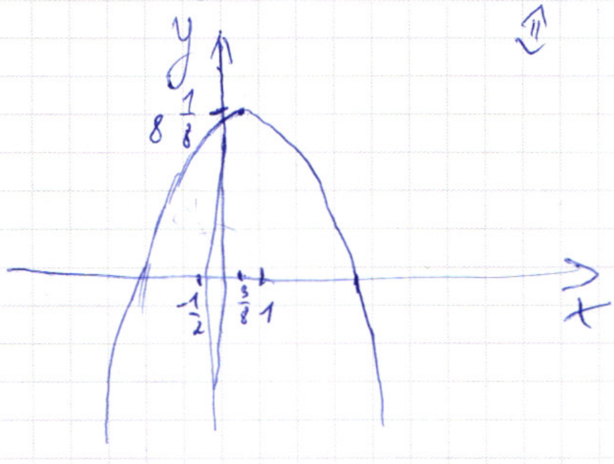
$36+4\cdot 7\cdot 8$

$\frac{-6}{-16} = \frac{3}{8}$

$-8\cdot\frac{9}{64}+6\cdot\frac{3}{8}+7$

$= -\frac{9}{8}+\frac{18}{8}+7$

$= \frac{9}{8}+7 = 1\frac{1}{8}+7$



$\frac{3}{8}$

$32\cdot 7$

$\times\ 32$
$\ \ \ \ 7$
224
$+\ 36$
260

$\cos^2\alpha = \frac{1}{tg^2+1}$

$\frac{\sin^2}{\cos^2\alpha}+1$

$-8\cdot\frac{1}{4}-3+7$

$-2-3+7=2$

$\frac{3}{8}$ $\frac{9}{16}$ $\frac{9}{64}\cdot -8$ $-\frac{9}{8}$ $+\frac{18}{8}+7$ $\frac{9}{8}+7$ $8\frac{1}{8}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

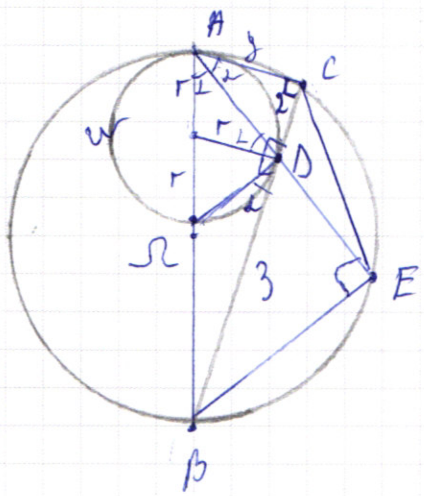
(Нумеровать только чистовики)

$36y^2-72y+36+x^2-12x+36+13x+78y-13yx-78=0$

$6(y-1)^2+(x-6)^2$

$D(f(x)) \geqslant 0$

$f\left(\frac{x}{y}\right) \quad x \geqslant 0$



$\frac{r}{3}=\frac{y}{5}$

$y=\frac{5}{3}r$

$\frac{3}{2R}=\frac{2}{y}$

$4R=3y$

$y=\frac{4}{3}R$

$y=8x-6|2x-1|$

$x \geqslant \frac{1}{2} \Rightarrow y=8x-6(2x-1)=8x-12x+6=-4x+6$

$3^2=$

$224-151$

$$\begin{array}{r} 224 \\ -151 \\ \hline 73 \end{array}$$

$300<2x$

$300>\frac{4}{3}x$

$x>150$

$\frac{900}{4}$

$x=225$

$\frac{450}{2}=225$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 ~~a =~~

$b = aq$

$c = aq^2$

$d = aq^3 \Rightarrow ax^2 + 2bx + c = 0$

$D = 4b^2 - 4ac \Rightarrow x = \frac{2b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{2b \pm \sqrt{4(b^2 - ac)}}{2a}$

$= \frac{2b \pm 2\sqrt{b^2 - ac}}{2a} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}$

$= \frac{aq \pm \sqrt{a^2q^2 - a^2q^2}}{a} =$

$= q$

$\Downarrow$

$q = aq^3, \quad q \neq 0$

$1 = aq^2$

$a = \frac{1}{q^2} \Rightarrow c = aq^2 = \boxed{1}$

$(x - 6y)^2 = \cancel{x^2}\, xy - 6y - x + 6$

$\begin{cases} x^2 + 36y^2 - 12yx = xy - 6y - x + 6 \\ (x-6)(y-1) \geq 0 \end{cases}$

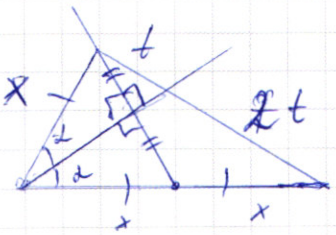
$\Downarrow$

$\begin{cases} x^2 - 13yx + 36y^2 + 6y + x - 6 = 0 \\ (x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18 \end{cases}$

$36y^2 + 72y + 36 + x^2 - 12x + 36$

$\cancel{x^2} + 13x + 78y$

№2



$a + b + c = 900$

$\frac{t}{x} = \frac{f}{2x} \Rightarrow f = 2t$

$x - 6y$

$x, 2x, 3t$

$3x > 3t$

$x > t$

$900 - 3x = 3t$

$300 - x = t$

$300 - x < x$

$150 < x \Rightarrow x \in [151; 299]$

$299 - 151 + 1$

$= 148 + 1 = \boxed{149}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№3

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{x^2-12x+36+2(y^2-2y} \\ x^2-12x+36+2(y^2-2y+1)-18=0 \end{cases}$$

ОДЗ: $xy-6y-x+6 \geqslant 0$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} (x-6y)^2=xy-6y-x+6 \\ x^2+2y^2-12x-4y+20 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} (x-6y)^2=y(x-6)+\cancel{A\,x\,6}-(x-6) \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-6y)^2=(\underbrace{x-6}_{t})(\underbrace{y-1}_{f}) \\ (x-6)^2+2(y-1)^2=18 \end{cases}$$

$t^2 \quad 2f^2$

$t^2+2f^2=18$

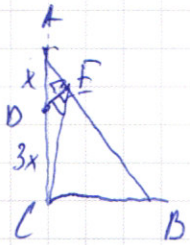
t^2+2tf+

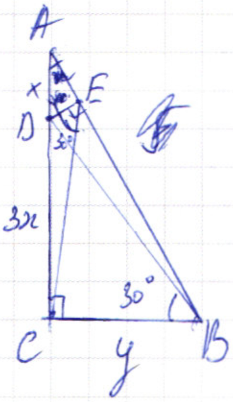
$tf=$

$(x-6y)^2=x^2+36y^2-\cancel{12yx}=\cancel{0}$

$(x-6)(y-1) \geqslant 0$

№4





$tg\angle BAC=\dfrac{BC}{AC}$

$\angle CDB=60°$

т.к. по т. синусов:

$\dfrac{DC}{2\sin 30}=\dfrac{CB}{2\sin 60}$

$\dfrac{3x}{2\cdot\frac{1}{2}}=\dfrac{y}{2\cdot\frac{\sqrt3}{2}}$ $\quad \dfrac{y}{\sqrt3}=3x$

$y=\sqrt3\cdot 3x \Rightarrow$

$tg\angle BAC=\dfrac{y}{4x}=$

$=\dfrac{\sqrt3\cdot 3\cancel{x}}{4\cdot\cancel{x}}=\dfrac{\sqrt3\,3}{4}$

$S=\cancel{...}$

$1{,}5\sqrt5 \quad V\dfrac{6}{\sqrt5}$

$3\cdot 1{,}5 \quad V\,6$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)