МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45°$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1. Т.к. a, b, c – 1ый, 2ой и 3ий члены геометрической прогрессии, то $b = ad$, $c = ad^2$

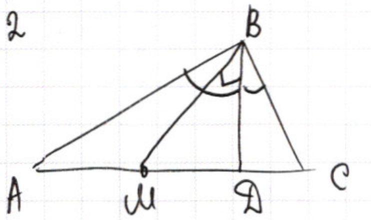
$ax^2 + 2bx + c = 0$; $ax^2 + 2adx + ad^2 = 0$; $x^2 + 2dx + d^2 = 0$; $(x+d)^2 = 0$

$x = -d$ – корень, тогда $-d = ad^3$ – 4ый член геометрической прогрессии.

$c = ad^2 = -1$

Ответ: -1.

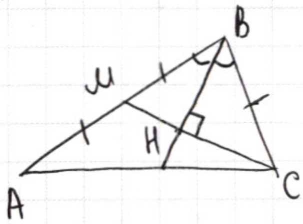
N 2



Если BM и BD – медиана и биссектриса $\angle ABC$ и $\angle MBD = 90°$, то $\angle ABD > \angle MBD = 90°$

$\angle ABC = 2\angle ABD > 180°$, чего быть не может.

Значит перпендикулярные медиана и биссектриса выходят из разных углов $\triangle ABC$



Т.к. BH-биссектриса и высота в $\triangle MBC$, то $\triangle MBC$ – равнобедренный $\Rightarrow MB = BC = AM$

$AB = 2BC$, тогда $P = AB + BC + AC = 1200$

~~$AB + BC < 1200 \Rightarrow 3BC < 1200 \Rightarrow BC < 400$, т.е. BC может принимать значения от 1 до 399.~~

Чтобы треугольник существовал, должно выполняться неравенство: $AB - BC < AC \Rightarrow AB + BC + AC > AB + BC + AB - BC = 4BC$

$1200 > 4BC \Rightarrow 300 > BC$, т.е BC – может принимать значения от 1 до 299, при этом остальные стороны задаются однозначно при каждом из этих значений. Всего 299 вариантов.

Ответ: 299.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

№7. $f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(a\cdot 1)=f(a)+f(1) \Rightarrow f(1)=0$

$f(2)=[2/2]=1$

$f(3)=[3/2]=1$ $\qquad f(p)=[p/2]>0$

$f(4)=f(2)+f(2)=2$

Любое натуральное число кроме простого представимо в виде произведения натуральных чисел, меньших данного числа. Тогда значение функции от такого числа будет больше 0, т.к $f(2)=1>0$, $f(3)=1>0$, а для любого простого $f(p)=$ $=[p/2]>0$.

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)$, где $f(x)>0$, т.к $x\in\mathbb{N}$.

$f\left(\frac{x}{y}\right)+f\left(\frac{y}{x}\right)=f(1)=0$

Если $f\left(\frac{x}{y}\right)=f\left(\frac{y}{x}\right)=0$, то $f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)=f\left(\frac{x}{y}\right)=0$

$f(y)+f\left(\frac{1}{x}\right)=f\left(\frac{y}{x}\right)=0$

$f(y)+f\left(\frac{1}{y}\right)=f(1)=0$

$f\left(\frac{1}{y}\right)=-f(x)=-f(y) \Rightarrow f(x)=f(y)$, а это возможно только при $x=y$.

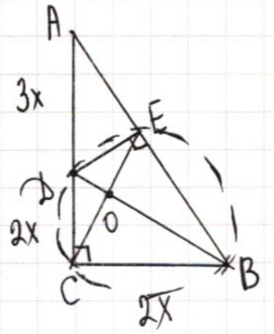
Если же $f\left(\frac{x}{y}\right)\neq 0$ и $f\left(\frac{y}{x}\right)\neq 0$, то одно из этих чисел отрицательное, а другое положительное, т.к. их сумма равна 0.

Т.е всего пар различных чисел x и y $21\cdot 20$, т.к. $1\leq x\leq 21$, $1\leq y\leq 21$. Среди этих пар ровно половина таких, что $f\left(\frac{x}{y}\right)<0$, т.е $\frac{21\cdot 20}{2}=210$.

Ответ: 210.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4.



а) Т.к $\frac{AD}{AC} = \frac{3}{5}$, то пусть $AD = 3x$, тогда $AC = 5x \Rightarrow DC = 2x$

Т.к. $\angle DEB = \angle DCB = 90°$, то $DEBC$ можно вписать в окружность, тогда $\angle DEC = \angle DBC = 45°$, т.к они опираются на $\cup DC$.

$\angle CDB = 90° - \angle DBC$ из $\triangle DCB \Rightarrow \angle CDB = 45° \Rightarrow DC = CB$, т.к $\angle CDB = \angle CBD \Rightarrow CB = 2x$

$tg \angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{2x}{5x} = 0,4$ Ответ: $tg \angle BAC = 0,4$

б) $tg \angle BAC = 0,4 = \frac{DE}{AE}$; $AE^2 + DE^2 = AD^2 = (3x)^2 = 9x^2$

$AE^2 + (0,4AE)^2 = 9x^2$; $1,16AE^2 = 9x^2$; $AE = \frac{15x}{\sqrt{29}} \Rightarrow DE = \frac{6x}{\sqrt{29}}$

$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 25x^2 + 4x^2 = 29x^2$; $AB = x\sqrt{29} \Rightarrow EB = AB - AE = \frac{14x}{\sqrt{29}}$.

$\angle OEB = 90° - \angle DEO = 45°$; $\angle OEB = \angle DEO \Rightarrow EO$ - биссектриса $\triangle DEB$.

Значит $\frac{S_{DEO}}{S_{EOB}} = \frac{DO}{OB} = \frac{DE}{EB} = \frac{\frac{6x}{\sqrt{29}}}{\frac{14x}{\sqrt{29}}} = \frac{3}{7}$; $S_{DEO} = \frac{3}{10} S_{DEB} =$

$= \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{2} DE \cdot EB = \frac{3}{20} \cdot \frac{6x}{\sqrt{29}} \cdot \frac{14x}{\sqrt{29}} = \frac{42x^2}{145}$

$\frac{S_{COD}}{S_{COB}} = \frac{DO}{OB} = \frac{DE}{EB} = \frac{3}{7}$; $S_{COD} = \frac{3}{10} S_{DCB} = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{2} \cdot DC \cdot CB =$

$= \frac{3}{20} \cdot 2x \cdot 2x = \frac{3x^2}{5}$; $S_{CDE} = S_{COD} + S_{DOE} = \frac{42x^2}{145} + \frac{3x^2}{5} = \frac{42x^2 + 87x^2}{145} =$

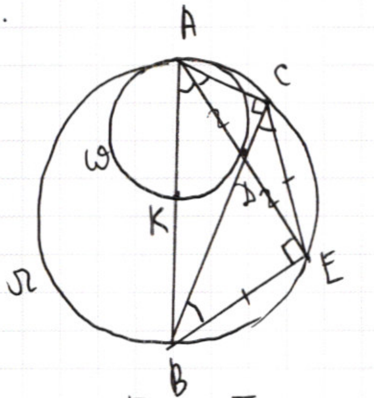
$= \frac{129x^2}{145}$. Т.к $AC = \sqrt{29}$, то $5x = \sqrt{29} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{29}}{5}$

$S_{CDE} = \frac{129 \cdot \cancel{29}^{1}}{{}_{5}\cancel{145} \cdot 25} = \frac{129}{125}$

Ответ: $S_{CED} = \frac{129}{125}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N5.



По лемме Архимеда AD-биссектриса $\angle BAC$, тогда $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = 3$

$\angle ACB = 90°$, т.к AB-диаметр,

значит $AC^2 + CB^2 = AB^2$; $AC^2 + (3+1)^2 = AB^2$

$AC^2 + 16 = 9AC^2 \Rightarrow AC = \sqrt{2} \Rightarrow AB = 3\sqrt{2}$

$AB = 2R = 3\sqrt{2} \Rightarrow R = \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{\sqrt{2}}$.

Т.к BD-касательная к окружности ω, то $BD^2 = BK \cdot BA$

$BK = AB - AK$

Т.к окружности ω и Ω касаются в точке A и AB-диаметр окружности Ω, то AK-диаметр окружности ω, тогда $AK = 2r$

$BD^2 = (AB - 2r) \cdot AB$; $9 = (3\sqrt{2} - 2r) \cdot 3\sqrt{2}$; $2r = 3\sqrt{2} - \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$

$r = \frac{3}{2\sqrt{2}}$. Получается, что $r = \frac{R}{2}$. Тогда при гомотетии с центром в точке A и коэффициентом 2 окружность ω переходит в окружность Ω. Точка D переходит в $E \Rightarrow \frac{AE}{AD} = 2 \Rightarrow$

$AD = DE \Rightarrow S_{ACD} = S_{ECD}$ и $S_{BAD} = S_{BED}$

$S_{ABC} = S_{ACD} + S_{ABD} = S_{ECD} + S_{BED} = S_{CBE}$

$S_{ABC} = S_{CBE} \Rightarrow S_{ABEC} = 2S_{ABC}$

Т.к $\angle ACB = 90°$, то $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot (3+1) = 2\sqrt{2}$

$S_{BACE} = 2S_{ABC} = 2 \cdot 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

Ответ: $4\sqrt{2}$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

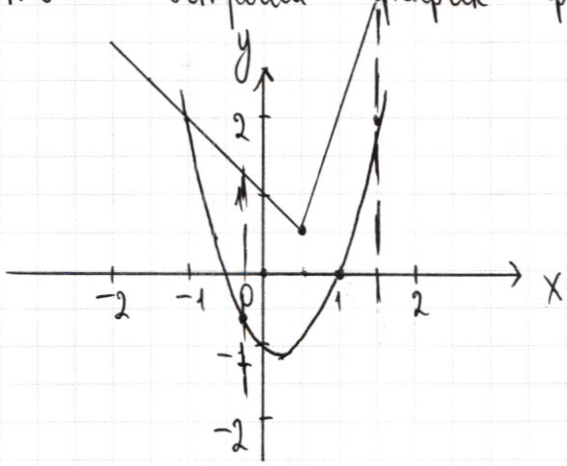
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6. Построим график функции $f(x) = 2x^2 - x - 1$ и $g(x) = x + |2x-1|$.



Нужно рассматривать промежуток $x \in [-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}]$.

$f\left(\frac{3}{2}\right) = 2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3}{2} - 1 = 2$

$g\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} + \left|2\cdot\frac{3}{2} - 1\right| = 3,5$

$f\left(-\frac{1}{4}\right) = 2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} - 1 = -\frac{5}{8}$; $g\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4} + \left|2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) - 1\right| = \frac{5}{4}$.

$y = ax + b$ – прямая. Минимально возможное y при $x = -\frac{1}{4}$ может быть $y = f\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{5}{8}$, т.к $y \geq f(x)$.

Минимально возможное y при $x = \frac{3}{2}$ может быть $y = f\left(\frac{3}{2}\right) = 2$, т.к $y \geq f(x)$.

Найдём ур-ие прямой, проходящей через эти 2 точки: $\left(-\frac{1}{4}; -\frac{5}{8}\right)$, $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$. Это будет прямая $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}$, получаем это из решения системы уравнений:

$$\begin{cases} -\frac{5}{8} = -\frac{1}{4}k + t \\ 2 = \frac{3}{2}k + t \end{cases} \quad k = \frac{3}{2}; \quad t = -\frac{1}{4} \Rightarrow y = kx + t, \; y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}.$$

Рассмотрим точку $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, которая принадлежит $g(x)$

$y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, т.е. эта точка лежит ещё на $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}$. И это был рассмотрен график функции с минимально возможным y на концах, т.е. это единственная прямая, удовлетворяющая условию; $a = \frac{3}{2}$, $b = -\frac{1}{4}$. Ответ: $a = \frac{3}{2}$; $b = -\frac{1}{4}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№ 3. $\begin{cases} y-2x = \sqrt{xy-2x-y+2} \quad (1) \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$

(1) $(y-2x)^2 = xy-2x-y+2 = y(x-1)-2(x-1) = (y-2)(x-1)$

Пусть $a = y-2$, $b = x-1$

$y = a+2$, $x = b+1 \Rightarrow y-2x = a+2-2(b+1) = a-2b$

$(a-2b)^2 = ab$; $a^2-4ab+4b^2 = ab$; $a^2-5ab+4b^2=0$

$(a-4b)(a-b)=0$ $\left[\begin{array}{l} a=4b \\ a=b \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} y-2=4x-4 \\ y-2=x-1 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} y=4x-2 \\ y=x+1 \end{array}\right.$

Пусть $y=4x-2$.

$2x^2+(4x-2)^2-4x-4(4x-2)+3=0$; $18x^2-36x+15=0$

$D = 36^2+4\cdot 18\cdot 15 = 36(36+30) = 36\cdot 66$

$x = \dfrac{36 \pm 6\sqrt{66}}{36} = 1 \pm \dfrac{\sqrt{66}}{6}$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 4+\frac{2\sqrt{66}}{3}-2 \\ x = 1+\frac{\sqrt{66}}{6} \end{cases} \\ \begin{cases} y = 4-\frac{2\sqrt{66}}{3}-2 \\ x = 1-\frac{\sqrt{66}}{6} \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 2+\frac{2\sqrt{66}}{3} \\ x = 1+\frac{\sqrt{66}}{6} \end{cases} \\ \begin{cases} y = 2-\frac{2\sqrt{66}}{3} \\ x = 1-\frac{\sqrt{66}}{6} \end{cases} \end{array}\right.$

Пусть $y = x+1$.

$2x^2+(x+1)^2-4x-4(x+1)+3=0$; $3x^2-6x=0$; $x(x-2)=0$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y=0+1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2 \\ y=2+1 \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases} \end{array}\right.$

Ответ: $\left(1+\frac{\sqrt{66}}{6};\ 2+\frac{2\sqrt{66}}{3}\right)$; $\left(1-\frac{\sqrt{66}}{6};\ 2-\frac{2\sqrt{66}}{3}\right)$, $(0;1)$; $(2;3)$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2}$

$y=\sqrt{2-y}$; $y^2=2-y$; $y^2+y-2=0$; $y=\frac{-1\pm2\sqrt{2}}{2}$

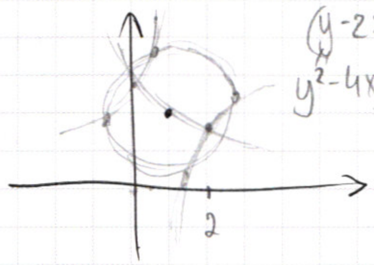
$x=-1$

$y+2=\sqrt{-2y+4}$

$y\geq 2x$

$y^2+4y+4=2(4-4y+y^2)$

$2x^2-2x-y+2\geq 0$; $2(x^2-x+1)\geq y\geq 2x$



$(y-2x)^2=(y-2)(x-1)$

$y^2-4xy+4x^2$

$4xy-2x^2+(y-2)(x-1)-4x-4y+3=0$

$4(x-1)(y-1)+(y-2)(x-1)-2x^2+7=0$

$(x-1)(5y-6)-2x^2+7=0$

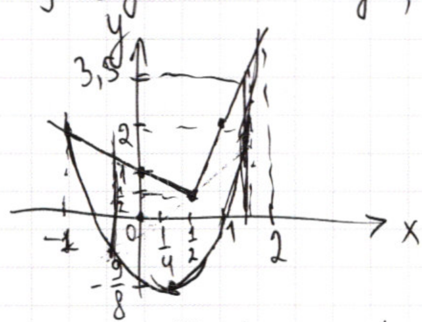
$x^2-x+1\geq x$; $(x-1)^2\geq 0$.

$y=\frac{2x^2-7}{x-1}+6$ $=\frac{2x^2+6x-13}{5(x-1)}$

$y^2-5xy+4x^2=2-2x-y$; $y^2+y-5xy+4x^2+2x-2=0$.

$y^2+2x^2-5xy+2-2x-y-2x^2-4x-4y+3=0$

$-2x^2+5xy-6x-5y+5=0$.



$\frac{\frac{1}{2}+3-13}{}=\frac{-9,5}{-2,5}=\frac{19}{5}$; $-\frac{5}{2}$

$2x^2-x-1=x+2x-1=3x-1$

$2x^2-4x=0$; $x=2$

$2x^2-x-1=x-2x+1=1-x$; $2x^2-2=0$; $x^2-1=0$

$\frac{2\cdot4+12-13}{5}=\frac{7}{5}$; $\frac{-13}{-5}=\frac{13}{5}$; $x=-1$

$2x^2+6x-13 \,|\, x-1$; $-2x^2-2x$; $2x$; $8x-13$

1) $2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{4}-1=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}-1=\frac{3}{8}-1=-\frac{5}{8}$

$-x+1=\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}$

2) $2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2-\frac{3}{2}-1=\frac{9}{2}-\frac{3}{2}-1=2$.

$3x-1=3\cdot\frac{3}{2}-1=\frac{7}{2}$.

$y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}$.

$kx+b=y$

$-\frac{5}{8}=k\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)+b$

$\frac{1}{2}=k\cdot\frac{1}{2}+b$

$-\frac{5}{8}+\frac{1}{4}k=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}k$

$\frac{3}{4}k=\frac{9}{8}$; $k=\frac{3}{2}$.

1 пара.

$y\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{4}-\frac{1}{4}=2$

$a=\frac{3}{2}$, $b=-\frac{1}{4}$

$\left[\begin{array}{l}a=4b\\a=b\end{array}\right.$

$(a-4b)(a-b)=0$

$a^2-4ab+4b^2=ab$

$a^2-5ab+4b^2=0$

$(x-1)^2\leq 1,5$

$x-1\leq 2,25$

$x\leq 3,25$.

$xy-2x-y+2=y(x-1)-2(x-1)=(y-2)(x-1)=(y-2x)^2$

$2(x-1)^2+(y-2)^2=3$; $2(x-1)^2+\frac{(y-2x)^4}{(x-1)^2}=3$

$2(x-1)^4+(y-2x)^4=3(x-1)^2$; $(y-2x)^4=3(x-1)^2-2(x-1)^4=(x-1)^2\left(3-2(x-1)^2\right)$

$(y-2x)^2=(x-1)\sqrt{3-2(x-1)^2}$

$y\geq 2x$

$ab=(a+2-2(b+1))^2-(a-2b)^2$

$2a^2+b^2=3$; $2a^2+2\sqrt{2}ab+b^2=3+2\sqrt{2}(a-2b)^2=(a\sqrt{2}+b)^2$

$2\sqrt{2}a^2-8\sqrt{2}ab+8\sqrt{2}b^2=2a^2+2ab\sqrt{2}+b^2$, $a^2\sqrt{2}-10\sqrt{2}ab$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = [p/2]$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) \gtrless 0$ $f(y) + f\left(\frac{1}{x}\right)$

$f(2) = 1$ $f(4) = 2$ $f(6) = 2$ $f(9) = 2$

$f(3) = 1$ $f(5) = 2$ $f(7) = 3$

$f(8) = 3$

$f(1) = 0.$

$\underbrace{f\left(\frac{x}{y}\right)}_{=0}^{>0} + \underbrace{f\left(\frac{y}{x}\right)}_{=0}^{<0} = f(1) = 0.$

$f\left(\frac{1}{y}\right) + f(y) = 0.$

$f(x) = -f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f(y) = -f\left(\frac{1}{x}\right)$

$f(x) = f(y)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1 $b = a\cdot d$, $c = a\cdot d^2$

$ax^2 + 2adx + ad^2 = 0$; $(x\sqrt{a} + d\sqrt{a})^2 = 0$ $x = -d = a\cdot d^3$; $-1 = ad^2$

$\frac{3\cdot 3\cdot 7}{5\cdot 29} = \frac{42x^2}{145}$ $29\cdot 3 = 87$

2.

X

$\begin{cases} 1, 2, \ldots \\ 2, 4, \ldots \\ \vdots \\ 399, 798, \ldots \end{cases}$

3. $\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2} \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 \end{cases}$

$2(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 3$

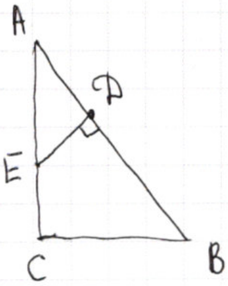
+2 +4

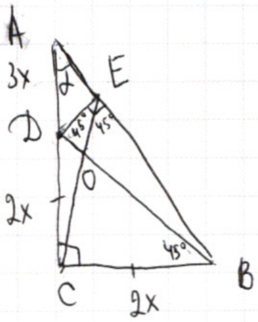
$y^2 - 4xy + 4x^2 = xy - 2x - y + 2$

$y^2 - 5xy + 4x^2 = 2 - 2x - y$

$(y - 4x)(y - x)$

4. a)





$\triangle ADE \sim \triangle ABC$

$\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$

$tg\alpha = \frac{2}{5}$

$\frac{900}{116} = \frac{225}{29}$

$5x = \sqrt{29}$; $x = \frac{\sqrt{29}}{5}$

$AB^2 = 25x^2 + 4x^2 = 29x^2$; $AB = x\sqrt{29} = \frac{29}{5}$

$EB = \frac{29}{5} - 3 = \frac{29-15}{5} = \frac{14}{5}$

$tg\angle EDB = \frac{\frac{14}{5}}{\frac{6}{5}} = \frac{7}{3}$.

$\frac{3\sqrt{29}}{29} = \frac{DE}{\frac{2}{5}\sqrt{29}}$

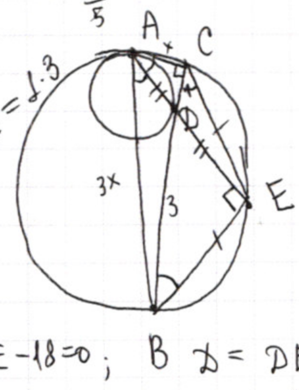
$DE = \frac{6}{5}$.

$\frac{\frac{3}{5}\sqrt{29}}{\frac{29}{5}} = \frac{AE}{\sqrt{29}}$

$\Rightarrow AE = 3$.

$\frac{DO}{OB} = \frac{DE}{EB} = \frac{S_{DOE}}{S_{EOB}} = \frac{\frac{6}{5}}{\frac{14}{5}} = \frac{3}{7}$

5.



$DC\cdot BD = AD\cdot DE = 1.3$

$x^2 + 16 = 9x^2$; $8x^2 = 16$ $x = \sqrt{2}$

$AB = 2R = 3\sqrt{2}$ $R = \frac{3}{\sqrt{2}}$ $r = \frac{3}{2\sqrt{2}}$.

$\triangle ADC \sim \triangle BDE$ $\frac{AD}{BD} = \frac{CD}{DE} = \frac{AC}{BE}$

$\triangle ABE \sim \triangle BDE$

$\frac{AB}{BD} = \frac{BE}{DE} = \frac{AE}{BE}$

$BE^2 = AE\cdot DE = 18 - AE^2$

$AE^2 + AE\cdot DE - 18 = 0$; $D = DE^2 + 72$; $AE = \frac{-DE + \sqrt{DE^2 + 72}}{2}$

$tg\alpha = \frac{BE}{AE} = \frac{DC}{AC}$; $\frac{BE}{AE} = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $BE = \frac{AE}{\sqrt{2}}$ $\sqrt{2} = \frac{BE}{DE} = \frac{AE}{\sqrt{2}\cdot DE}$; $\frac{AE}{DE} = 2$

$9 = (AB - 2r)\cdot AB = (3\sqrt{2} - 2r)\cdot 3\sqrt{2}$

$3\sqrt{2} - 2r = \frac{3}{\sqrt{2}}$;

$2r = \frac{6-3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$

$AB - BC < AC$

$BC < AC$

$p > 2BC + BC + BC = 4BC$

$300 > BC$ 598

$1, \ldots, 299$ ~~300~~ 303 ~~300~~ ~~600~~