МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45°$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~№1~~

~~числа a, b, c - члены геометр. прогрессии.~~

~~a - первый ; ~~в~~ b - ~~втрой~~ второй, c - третий~~

~~Пусть~~

~~$a = x_0$~~

~~Тогда $b = y x_0$~~

~~$c = y^2 x_0$~~

~~x четвёртый член прогрессии~~

№1

числа a, b, c - первые числа геом. прогрессии

пусть $a = m$

$b = n \cdot m$

Тогда $c = n^2 m$

четвёртый член последовательности:

$x = n^3 m$

$ax^2 + 2bx + c = 0$

$m \cdot n^6 m^2 + 2n^4 m^2 + n^2 m = 0 \quad \| : n^2 m$

$n^4 m^2 + 2n^2 m + 1 = 0 \iff (n^2 m + 1)^2 = 0$

полный квадрат

$n^2 m + 1 = 0$

$n^2 m = -1 = c$

третий член прогрессии

Ответ: $c = -1$

☐ черновик ☑ чистовик

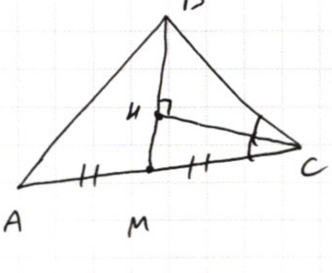
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 1

(Нумеровать только чистовики)

№2

для того, чтобы одна из биссектрис была перпендикулярна одной из медиан необходимо выполнение условие, что одна из сторон в 2 раза больше другой.



Дано: $\triangle ABC$; $AM = MC$

$CH \perp BM$ и CH - биссектр.

Док-ть: $AC = 2BC$

Док-во:

Рассмотрим $\triangle BCH$ и $\triangle MCH$. они прямоугольны, имеют общий катет и равные углы $\angle BCH$ и $\angle MCH$ => они ~~до~~ равны по 2м углам и прил. к ней стороне =>

=> соотв. элементы равны $MC = BC = \frac{1}{2} AC$.

Периметр ABC 1200.

Пусть $AC = 2x$

$BC = x$

$AB = m$

$P = 3x + m = 1200$

В треугольнике ~~[illegible]~~ любая сторона меньше суммы 2х других (вырожденные треугольники не рассматриваются)

$$\frac{x < 2x + m}{2x < x + m}$$

$m < 3x$

~~[illegible]~~ $x > 0$ (вырожд. тр. не рассматр.)

$x < 2x$ при любых x, меньших 0

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} 3x + m = 1200 \\ 2x < x + m \\ m < 3x \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + m = 1200 \\ x < m < 3x \end{cases} \quad \begin{cases} m = 1200 - 3x \\ x < 1200 - 3x < 3x \end{cases}$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

рассмотрим 2е неравенство:

$x < 1200 - 3x < 3x$

$\begin{cases} x < 1200 - 3x \\ 1200 - 3x < 3x \end{cases}$ $\begin{cases} 4x < 1200 \\ 1200 < 6x \end{cases}$ $\begin{cases} x < 300 \\ x > 200 \end{cases}$

$x \in (200; 300)$

целочисленных значений на данном промежутке 99.

~~Но! (небольшое уточнение)~~

Но! (небольшое уточнение), если рассматривать и вырожденные треугольники, то $x \in [200; 300]$, кол-во значений 101

Ответ: 99 треугольников.

№3

$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2} \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 \end{cases}$

ОДЗ: $y - 2x \geq 0$

$y \geq 2x$

1-е ур-ие:

$y - 2x = \sqrt{y(x-1) - 2(x-1)}$

$y - 2x = \sqrt{(x-1)(y-2)}$

рассмотрим 2-е ур-ие:

$(2x^2 - 4x + 2) + (y^2 - 4y + 4) - 3 = 0$

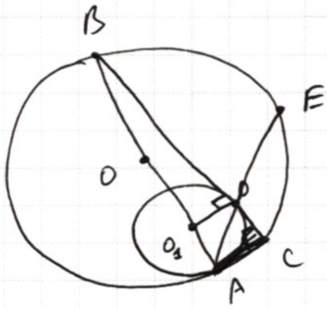
$2(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) - 3 = 0$

$2(x-1)^2 + (y-2)^2 = 3$

Пусть $x - 1 = t$ $\quad x = t + 1$

$y - 2 = k$ $\quad y = k + 2$

№5



1) $O_1D \perp BC$ (радиус в точку касания)

$\angle BCA = 90°$ (угол, опирается на диаметр)

$\triangle BO_1D$ и $\triangle BAC$ подобны (по 2м углам $\angle B$ общий и прямые углы)

$$\frac{BD}{BC} = \frac{3}{4} = \frac{O_1D}{AC} = \frac{BO_1}{BA} = \frac{2R-r}{2R},$$ где

R - радиус большой окружности

r - радиус малой

$6R + 3r = 8R - 4r$

$7r = 2R \qquad R = \frac{7}{2}r = 3,5r$

в прямоуг. треугольнике BO_1D

$BO_1 = 2R - r = 7r - r = 6r$

$O_1D = r$

$BD = 3$

по т. Пифагора

$BD^2 = O_1D^2 + BO_1^2$

$9 = 36r^2 + r^2 = 37r^2$

$r = \sqrt{\frac{9}{37}} \qquad R = 3,5\sqrt{\frac{9}{37}}$

$6R = 8R - 4r$

$2R = 4r$

$R = 2r$

в прямоуг. тр. BO_1D

$BO_1 = 2R - r = 4r - r = 3r$

$O_1D = r$

$BD = 3$

по т. Пифагора $9 = 9r^2 + r^2 = 10r^2$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{tk} \\ 2t^2+k^2-3=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} k+\cancel{2}-2t-\cancel{2}=\sqrt{tk} \\ 2t^2+k^2-3=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k-2t=\sqrt{tk} \\ 2t^2+k^2-3=0 \end{cases}$$

возведём обе части первого ур-ие в квадрат с учётом ОДЗ

$$k^2-4kt+4t^2=tk$$

$$k^2-5kt+4t^2=0$$

$$\begin{cases} k^2-5kt+4t^2=0 \\ 2t^2+k^2-3=0 \end{cases}$$

Решим 1е ур-ие через дискриминант; ~~уч~~

$$k^2-5kt+4t^2=0$$

$$D=25t^2-16t^2=9t^2$$

~~t~~ $D\geq 0$ всегда, т.к. $t^2\geq 0$

корни есть

$$\left[\begin{array}{l} k_1=\dfrac{5t-3t}{2}=t \\ k_2=\dfrac{5t+3t}{2}=4t \end{array}\right.$$

Решим 2е ур-ие, учитывая $\left[\begin{array}{l} k=t \\ k=4t \end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l} 2t^2+t^2-3=0 \\ 2t^2+4t^2-3=0 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 3t^2=3 \\ 6t^2=3 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} t^2=1 \\ t^2=0{,}5 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} t=\pm 1 \\ t=\pm\sqrt{0{,}5} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} t=1 \\ k=1 \end{cases} \\ \begin{cases} t=1 \\ k=2 \end{cases} \\ \begin{cases} t=\sqrt{0{,}5} \\ k=\sqrt{0{,}5} \end{cases} \\ \begin{cases} t=\sqrt{0{,}5} \\ k=2\sqrt{0{,}5} \end{cases} \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \begin{cases} t=-1 \\ k=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} t=-1 \\ k=-2 \end{cases} \\ \begin{cases} t=-\sqrt{0{,}5} \\ k=-\sqrt{0{,}5} \end{cases} \\ \begin{cases} t=-\sqrt{0{,}5} \\ k=-2\sqrt{0{,}5} \end{cases} \end{array}$$

Отберём корни по одз.

$$y\geq 2x$$

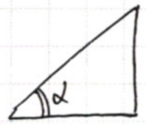
$$t=x-1 \qquad x=t+1$$

$$k=y-2 \qquad y=k+2$$

☐ черновик ☑ чистовик

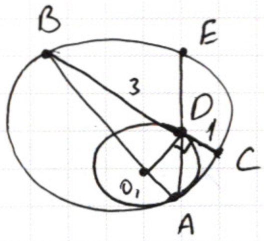
(Поставьте галочку в нужном поле)

Черновик!



$\frac{a}{b}$

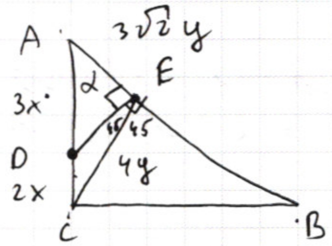
$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ $\quad \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{}$



$\frac{1}{2}a \cdot b$

$\frac{3x}{AB} = \frac{AE}{5x}$

$AB \cdot AE = 15x^2$



$tg\,\alpha = \frac{BC}{5x} = \frac{DE}{AE}$

$\frac{\sin 135^\circ}{\cancel{4}5x} =$

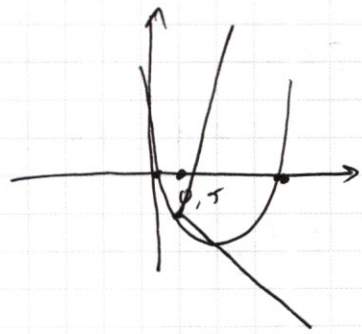
$2x^2 - x - 1$

$(\sqrt{2}x)^2 \cancel{+} - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} x + \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 - 1$

$\frac{\sqrt{2}}{4}$

$\left(2x^2 - x + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2\right) - \cancel{\frac{\sqrt{2}}{4}} - 1 - \frac{1}{8}$

$\left(\sqrt{2}x - \sqrt{\frac{1}{8}}\right)^2 - 1\frac{1}{8}$



$2x - 1$

$x = 0,5$

$\cancel{2x}$

$3x - 1$

$-x + 1$

$2 \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{4} - 1 \leq -\frac{a}{4} + b$

$S = \frac{1}{2} a \cdot b \sin\alpha$

$\frac{3}{2} = \frac{AE \cdot \cancel{DE} \cdot 2}{\cancel{DE} \cdot EC \cdot \sqrt{2}}$

$\frac{AE}{EC} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ $\quad \frac{3x}{AB} = \frac{3\sqrt{2}y}{5x}$

$AB = \frac{\cancel{15}^{5} x^2}{\cancel{3}\sqrt{2}y} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \frac{x^2}{y}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~$k+\cancel{2} \geq 2t+\cancel{2}$ $\quad k \geq 2t$~~

~~Под это условие подходит серия корней:~~

k	t
~~2~~	~~1~~
~~$2\sqrt{0,5}$~~	~~$\sqrt{0,5}$~~
~~-1~~	~~-1~~
~~-2~~	~~-1~~
~~$-\sqrt{0,5}$~~	~~$-\sqrt{0,5}$~~
~~$-2\sqrt{0,5}$~~	~~$-\sqrt{0,5}$~~

Решим 2е ур-ие, учитывая $\left[\begin{array}{l} k=t \\ k=4t \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} 2t^2+t^2-3=0 \\ 2t^2+16t^2-3=0 \end{array}\right.$ $\quad \left[\begin{array}{l} t^2=1 \\ \cancel{18}\,6\,t^2=\cancel{3} \end{array}\right.$ $\quad \left[\begin{array}{l} t^2=1 \\ t^2=\frac{1}{6} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} t=\pm 1 \\ t=\pm\sqrt{\frac{1}{6}} \end{array}\right.$

Отберём корни по ОДЗ:

$y \geq 2x$

$t=x-1 \quad x=t+1$

$k=y-2 \quad y=k+2$

$k+\cancel{2} \geq 2t+\cancel{2}$

$k \geq 2t$

Подходящие корни:

k	t
~~4~~ -1	~~1~~ -1
$4\sqrt{\frac{1}{6}}$	$\sqrt{\frac{1}{6}}$

y	x
~~6~~ 1	~~2~~ 0
$4\sqrt{\frac{1}{6}}+2$	$1+\sqrt{\frac{1}{6}}$

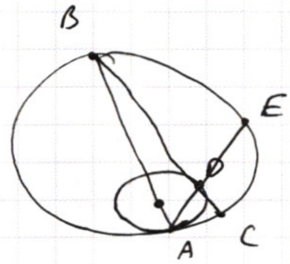
Ответ: $(\cancel{2;6})$ $0;1$

$\left(1+\sqrt{\frac{1}{6}};\ 4\sqrt{\frac{1}{6}}+2\right)$

$2\cdot\frac{1}{16}+\frac{1}{4}-1 < -\frac{a}{4}+b \le -\frac{1}{4}+|-1{,}5|$

$\frac{1}{8}+\frac{2}{8}-\frac{8}{8} \le -\frac{a}{4}+b \le -\frac{1}{4}+\frac{6}{4}$

$\boxed{-\frac{5}{8} \le -\frac{a}{4}+b \le +\frac{5}{4}}$



$\begin{array}{r|l} 116 & 4 \\ \hline -8 & 29 \\ 36 & \\ 0 & \end{array}$

$2\cdot\frac{9}{4}-\frac{3}{2}-1 \le ax+b \le \frac{3}{2}+2$

$\frac{9}{2}-\frac{3}{2}-\frac{2}{2} \le a\frac{3}{2}+b \le \frac{3}{2}+\frac{4}{2}$

$\boxed{\frac{4}{2} \le a\frac{3}{2}+b \le \frac{7}{2}}$

$4 \le 3a+3b \le 7$

$\boxed{-\frac{5}{8} \le -\frac{2a}{8}+\frac{8b}{8} \le +\frac{10}{8}}$

$\begin{array}{r} 12{,}5 \\ \times\ 12{,}5 \\ \hline 625 \\ 250 \\ 125 \\ \hline 156{,}25 \end{array}$

$2\cdot\frac{1}{16}+\frac{1}{4}-1 \le ax+b \le -\frac{1}{4}+1{,}5$

1) $-5 \le -2a+8b \le 10$ $\quad 5 \ge 2a-8b \ge -10$

$4 \le 3a+3b \le 7$ $\quad 4 \le 3a+3b \le 7$

$\boxed{\frac{4}{3} \le a+b \le \frac{7}{3}}$

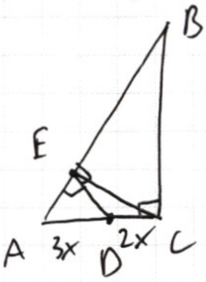
$\frac{5}{2} \ge a-4b \ge -5$

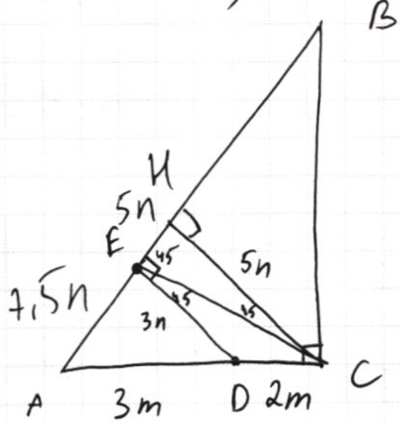
~~a+b~~

$\begin{array}{r} 156{,}25 \\ 25 \\ \hline 181{,}25 \end{array}$

$2x^2-x-1 \le ax+b$

$f(21)=f(3)+f(7)=\cancel{3}\ 1+3=4$





$5n-2$

$xn-3$

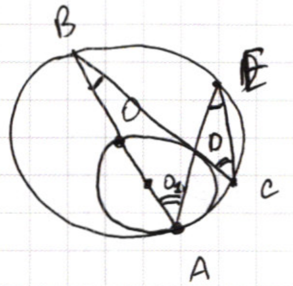
$x=\frac{15}{2}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$r = \sqrt{\frac{9}{10}}$ $\quad R = 2\sqrt{\frac{9}{10}}$



$\triangle BDA \sim \triangle EDC$ (вертикальные $\angle BDA = \angle CDE$)

и опирающиеся на одну дугу $\angle BAE = \angle BCE$

$\frac{EC}{BA} = \frac{BD}{DC} = \frac{1}{3}$ $\quad \frac{EC}{2R} = \frac{1}{3}$

~~$EC = 6R = 12\sqrt{0,9}$~~

~~$BA =$~~

$EC = \frac{2R}{3} = \frac{4\sqrt{0,9}}{3}$

$BA = 4\sqrt{0,9}$

$S_{BACE} = S_{BDA} + S_{ADC} + S_{ECD} + S_{BED}$

$S_{BDA} = \sqrt{0,9} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{0,9} = 2 \cdot 0,9 = 1,8$

$S_{EDC} = \frac{\sqrt{0,9}}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4\sqrt{0,9}}{3} = \frac{2 \cdot 0,9}{9} = 0,2$

также $S = \frac{1}{2} \cdot \sin\alpha \cdot a \cdot b$

$\sin\angle BDA = \sin\angle ADC = \sin\angle CDE = \sin\angle EDB = \sin\alpha$

$S_{BDA} = \frac{1}{2} \cdot \sin\alpha \cdot BD \cdot DA = \frac{1}{2} \cdot \sin\alpha \cdot 3 \cdot 3z$

$S_{EDC} = \frac{1}{2} \cdot \sin\alpha \cdot ED \cdot DC = \frac{1}{2} \sin\alpha \cdot 1 \cdot z$

$z = ED$ $\quad S_{BDE} = \frac{1}{2} \cdot \sin\alpha \cdot 3 \cdot z$

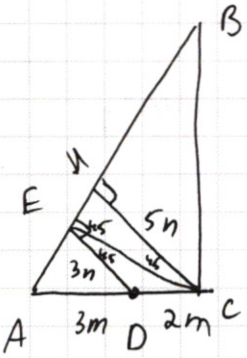
$S_{ADC} = \frac{1}{2} \cdot \sin\alpha \cdot 1 \cdot 3z \Rightarrow S_{BDE} = S_{ADC}$

$S_{EDC} = \frac{1}{2} \sin\alpha \cdot z = 0,2$

$S_{BDE} = S_{ADC} = \frac{1}{2} \sin\alpha \cdot 3z = 0,6$

$\Sigma S = 0,2 + 0,6 + 0,6 + 1,8 = 3,2$

Ответ: $S = 3,2$



№4

а)

1) проведём высоту CH

~~CH⊥~~ $CH \parallel DE$

$\angle CED = 45°$

$\angle CEH = 90° - 45° = 45°$

$\angle ECH = 45°$ (накрест лежащ.)

2) $\triangle ADE \sim \triangle ACH$ (прямоуг. углы и $\angle A$ общий)

$\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{ED}{CH} = \frac{3}{5}$

Пусть $ED = 3n$, тогда $CH = 5n$

$\triangle EHC$ равнобедренный (углы при основании равны) $\Rightarrow EH = HC = 5n$

Из подобия следует, что

$\frac{AD}{DC} = \frac{AE}{EH}$ $\quad \frac{3m}{2m} = \frac{AE}{5n}$ $\quad AE = \frac{15\cancel{m} \cdot n}{2\cancel{m}} =$

$= 7,5n$

$\cancel{tg\alpha} = tg\, BAC = \frac{ED}{AE} = \frac{3\cancel{n}}{7,5\cancel{n}} = \frac{1}{2,5} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5} =$

$= 0,4$

б) $AC = \sqrt{29}$ $\quad tg\, BAC = \frac{BC}{AC} = 0,4$ $\quad BC = 0,4 \cdot \sqrt{29}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{29} \cdot \frac{4}{10} \cdot \sqrt{29} = \frac{2}{10} \cdot 29 = \frac{58}{10} =$

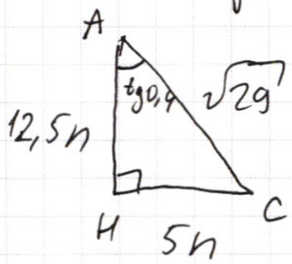
$= 5{,}8$

~~Ответ: tg BAC = 0,4 ; 8 = 8/8~~

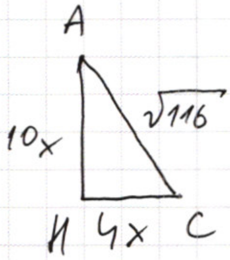
$AC = \sqrt{29}$

в прямоуг. Δ AHC по т. Пифагора

$AH^2 + HC^2 = AC^2$



$\cancel{12{,}5^2 n^2 + 25 n^2 = 29}$



$\sqrt{116} = 2\sqrt{29}\, x$

$AC = \sqrt{29}$

$x = 0{,}5$

$AH = 5$

$HC = 2$

$EC = 2\sqrt{2}$ (по т. Пифагора из Δ CEH)

$ED - 3n \qquad ED - 3$

$HC - 5n \qquad 2 - 5 \qquad ED = \frac{6}{5} = 1{,}2$

$S_{CED} = \frac{1}{2} \cdot \sin 45^\circ \cdot 1{,}2 \cdot 2\sqrt{2} = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} \cdot \frac{6 \cdot \cancel{2\sqrt{2}}}{5} =$

$= \frac{6}{5} = 1{,}2$ Ответ: $S_{CED} = 1{,}2$

№6

$$\underbrace{2x^2 - x - 1}_{\nearrow} \le ax + b \le \underbrace{x + |2x - 1|}_{\nearrow}$$

парабола

кусочно-заданная функция, "ломаная прямая"

① $(\sqrt{2}\,x)^2 - 2\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\,x + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} - 1 =$

$= \left(\sqrt{2}x - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 - 1\frac{1}{8}$

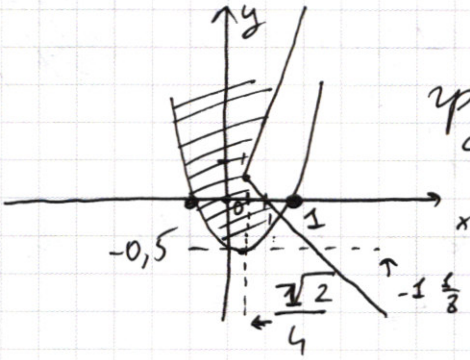


График схематичный!

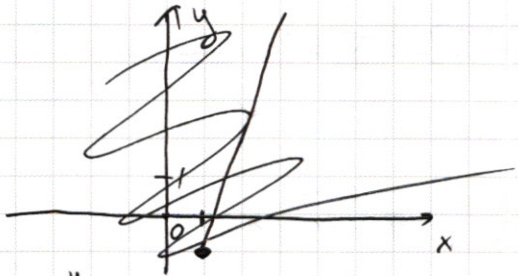
② $x + |2x - 1|$

при $x \ge 0,5$

$x + 2x - 1 = 3x - 1$

при $x < 0,5$

$x - 2x + 1 = -x + 1$



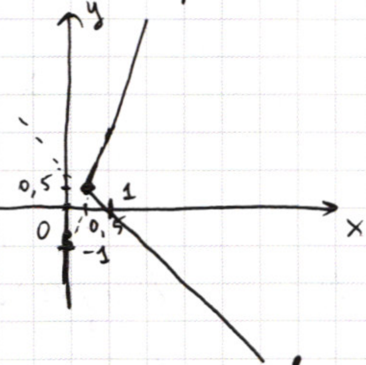


График $ax + b$ должен находится в заштрихованной области

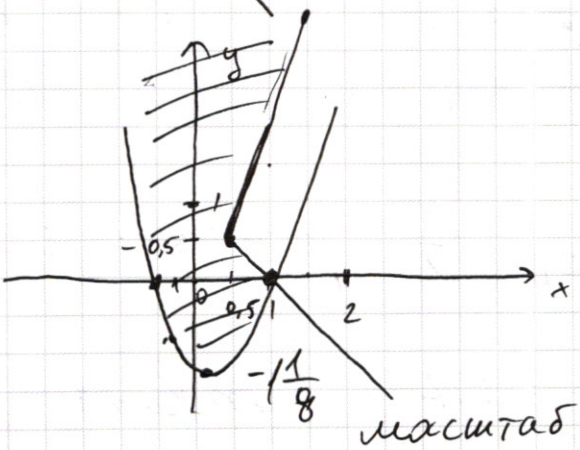
$ax + b$ - прямая

$2x^2 - x - 1 = 0$

$D = 1 + 8 = 9$

$x_1 = \frac{1+3}{4} = 1$

$x_2 = \frac{1-3}{4} = -0,5$



масштаб не сходится...

для того, чтобы неравенство выполнялось ~~строго~~ на промежутке $[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}]$ пересечение с параболой в точке $x=-\frac{1}{4}$, ~~в~~ а ломанной в $x=\frac{3}{2}$

$$\begin{cases} 2\frac{1}{16}+\frac{1}{4}-1 \le -a\frac{1}{4}+b \\ \frac{3}{2}a+b \le \frac{3}{2}+2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{1}{8}+\frac{2}{8}-\frac{8}{8} \le -\frac{a}{4}+b \\ \frac{3}{2}a+b \le 3{,}5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{5}{8} \le -\frac{2a}{8}+\frac{8b}{8} \\ \frac{3}{2}a+\frac{2b}{2} \le \frac{7}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} -5 \le -2a+8b \\ 3a+2b \le 7 \end{cases}$$

$$b \le \frac{7-3a}{2}$$

$$\cancel{-5 \le -2a+4(7-3a)}$$
$$\cancel{-5 \le -2a+28-12a}$$
$$\cancel{-33 \le -14a \qquad a \ge \frac{33}{14}}$$

Решив полученную систему, найдём ответ

№7

~~для сост~~ составное число можно представить в виде произв. простых чисел

$$f(m \cdot n) = f(m) + f(n)$$

например

$$f(21) = f(3) + f(7) = 1 + 3 = 4$$

Вывод: таких пар не будет, т.к. функция определена на множестве положительных рациональных чисел.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

Черновик !!!!

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2x^2 - x - 1 \le ax + b \le x + |2x - 1|$

$2x^2 - x - 1 \le ax + b$

$$\begin{cases} 2\frac{1}{16} + \frac{1}{4} - 1 \le -\frac{a}{4} + b \\ 2 \cdot \frac{9}{4} - \frac{3}{2} - 1 \le a\frac{3}{2} + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{8} + \frac{2}{8} - 1 \le -\frac{a}{4} + b \\ \frac{9}{2} - \frac{3}{2} - \frac{2}{2} \le \frac{3a}{2} + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{5}{8} \le -\frac{a}{4} + b \\ \frac{16}{8} \le \frac{6a}{4} + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{5}{8} \ge \frac{a}{4} - b \\ 2 \le \frac{3a}{2} + b \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{11}{8} \le \frac{5}{4}a + 2b}$$

$ax + b \le \frac{3}{2} + 2$

$ax + b \le$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Простое число при подставлении в функцию даст неотрицат. число. Составное - ~~т~~ тоже неотриц. Дробное? . . .

У меня есть предположения, что таковыми будут дробные числа. Их кол-во будет

$\cancel{\frac{1}{2}}$ $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$ ... $\frac{1}{21}$

$\frac{2}{3}$; $\frac{2}{4}$ .... $\frac{2}{21}$

~~21!~~

$$\frac{n!}{k!(n-k)!};$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2\sqrt{\frac{1}{6}} = \sqrt{\cancel{4\sqrt{\frac{1}{6}}} + \cancel{2} + \frac{4}{6} + 2\sqrt{\frac{1}{6}} - 2 - \cancel{2} - \cancel{4\sqrt{\frac{1}{6}}}}$ (W)

$a = a_0$

$b = b \cdot a = b \cdot a_0$

$c = b^2 a$

$ax^2 + 2bax + b^2a = 0$ $\qquad x = b^3 a$

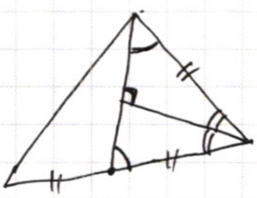
$x^2 + 2bx + b^2 = 0$

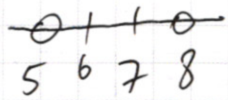
$b^6a^2 + 2b^4a + b^2 = 0$ $\qquad 8 + 36 - 8 - 24 + 3 = 0$

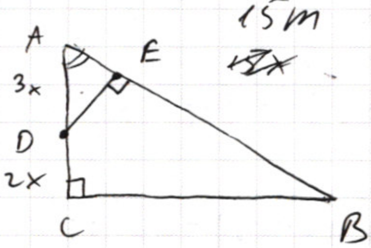
$b^4a^2 + 2b^2a + 1 = 0$ $\qquad 6 - 4 = \sqrt{12 - 4 - 6 + 2}$

2:6

$(b^2a + 1)^2 = 0$ $\qquad b^2 a = -1$







3

$\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$

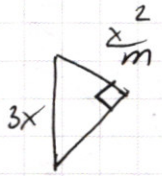
$m = y - 2x$

$n = xy$

$\frac{AE}{5x} = \frac{3x}{15m}$;

1 4

12 3



$AE = \frac{15x^2}{15m} = \frac{x^2}{m}$

1 : : : : 6

1 2 3 4 5 6

$9x^2 = \frac{x^4}{m^2} + DE^2$ $\qquad DE^2 = \cancel{9}\, x^2\left(9 - \frac{x^2}{m^2}\right)$

$2 + 4 - 3$

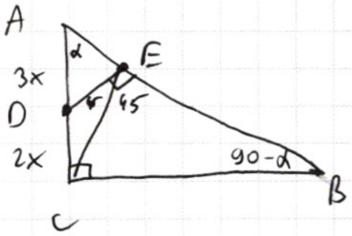
$16 - 20 + 4$ (1)

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$$180 - (90 - \alpha) = 90 + \alpha$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

$$\frac{3x}{AB} = \frac{AE}{5x} = \frac{DE}{BC}$$

$$y - 2x \geq 0$$

$$y^2 - 4xy + 4x^2 = xy - 2x - y + 2$$

$$y - 2x = t$$

$$\cancel{2x^2} + \quad 2x^2 - 4x + 2$$

$$2(x^2 - 2x + 1) = 2(x-1)^2$$

$$(y^2 - 4y + 4) = (y-2)^2$$

$$\begin{cases} k^2 - 5kt + 4t^2 = 0 \\ 2t^2 + k^2 - 3 = 0 \end{cases}$$

$$2x^2 - 4x + 2 + y^2 - 4y + 4 - 3 = 0$$

$$\begin{cases} k^2 - 4kt + 4t^2 = tk \\ 2t^2 + k^2 - 3 = 0 \end{cases}$$

$$2(x-1)^2 + (y-2)^2 = 3$$

$$\sqrt{y(x-1) - 2(x-1)} = \sqrt{(x-1)(y-2)}$$

$$\cancel{2t = 2(x-1) = 2x - 2}$$

$$2t^2 + m^2 = 3$$

$$D = 25t^2 - 16t^2 = 9t$$

$$k_1 = \frac{5t + 3t}{2}$$

$$k_2 = \frac{5t - 3t}{t^2} \quad x - 1$$

$$2t + 2 + m + 2$$

$$m = y - 2$$

$$\begin{cases} 2t + m + 4 = \sqrt{tm} \\ 2t^2 + m^2 = 3 \end{cases}$$