МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений
$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство
$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$
выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1. $a = b_1$; $b = b_1 q$; $c = b_1 q^2$ (b_1 – первый член прогрессии, q – знаменатель прогрессии); пусть $d = b_1 q^3$ – четвертый член прогрессии.

Запишем ур-е $ax^2 + 2bx + c = 0$:

$b_1 x^2 + 2b_1 q x + b_1 q^2 = 0$; $\quad x^2 + 2qx + q^2 = 0$;

~~при~~ если d – корень:

$b_1^2 q^6 + 2q^4 b_1 + q^2 = 0$; Решим данное ур-е относительно b_1:

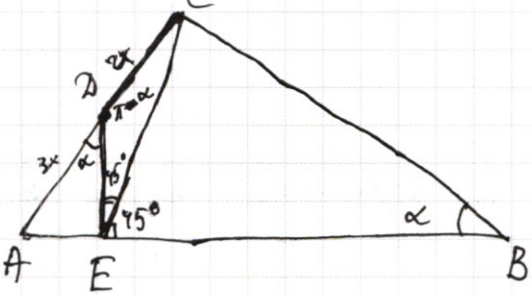
$$D = 4q^8 - 4q^8 = 0; \quad b_1 = \frac{-2q^4}{2q^6} = \frac{-1}{q^2};$$

Найдём третий член прогрессии (т.е. c):

$$c = b_1 q^2 = \frac{-1}{q^2} \cdot q^2 = -1;$$

Ответ: -1;

№ 4 а.



Дано:
ΔABC – прямоуг.;
$\angle ACB = 90°$;
$AD : AC = 3 : 5$
$DE \perp AB$; $\angle CED = 45°$;
$\operatorname{tg} \angle BAC$ – ?;

Решение:

1) т.к. $DE \perp AB$, $\angle DEA = 90°$; $\Delta DEA \sim \Delta BCA$ (по общему углу A и т.к. $\angle ACB = \angle AED = 90°$; значит, $\angle CBA = \angle ADE$;

2) т.к. $AD : AC = 3:5$, то $AD : DC = 3:2$; $DC = \frac{2}{3}AD$;

Пусть $\angle ADE = \alpha$, тогда $DE = AD\cos\alpha$; ~~в ΔDEC по теореме косинусов~~

~~Е~~ $\angle CDE = 180° - \alpha$;

По теореме косинусов в ΔCDE: $CE^2 = (AD\cos\alpha)^2 + \left(\frac{2}{3}AD\right)^2 - 2 \cdot AD\cos\alpha \cdot AD \cdot \frac{2}{3} \cdot \cos(180° - \alpha)$; $CE^2 = AD^2\cos^2\alpha + \frac{4AD^2}{9} + \frac{4AD^2\cos^2\alpha}{3} = AD^2\left(\cos^2\alpha + \frac{4}{9} + \frac{4}{3}\cos^2\alpha\right)$;

По теореме синусов в ΔCDE: $\frac{EC}{\sin(180° - \alpha)} = \frac{DC}{\sin\angle DEC}$;

$$\frac{EC}{\sin\alpha} = \frac{DC}{\sin 45°}; \quad \frac{AD\sqrt{\cos^2\alpha \cdot \frac{7}{3} + \frac{4}{9}}}{\sin\alpha} = \frac{2AD \cdot 2}{3 \cdot \sqrt{2}};$$

$$\frac{\sqrt{\cos^2\alpha \cdot \frac{7}{3} + \frac{4}{9}}}{\sin\alpha} = \frac{4}{3\sqrt{2}}; \quad 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{(1 - \sin^2\alpha) \cdot \frac{7}{3} + \frac{4}{9}} = 4\sin\alpha;$$

$$9 \cdot 2\left(\frac{7}{3}(1 - \sin^2\alpha) + \frac{4}{9}\right) = 16\sin^2\alpha$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

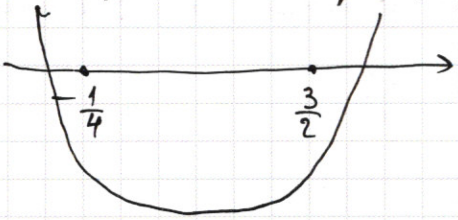
~~т.к. старший коэффициент $=2>0$, то вершина ветви параболы направлены вверх; т.к. при $x\in\left[-\frac{1}{4};\frac{3}{2}\right]$ прямая $f(x)\le 0$, то ур-е парабола 2 раза пересекает ось $Ox\Rightarrow$ $\Rightarrow$ ур-е $f(x)=0$ имеет 2 корня $\Rightarrow$ D дискриминант~~

~~$D>0$; $D=(a+1)^2+8(b+1)>0$;~~

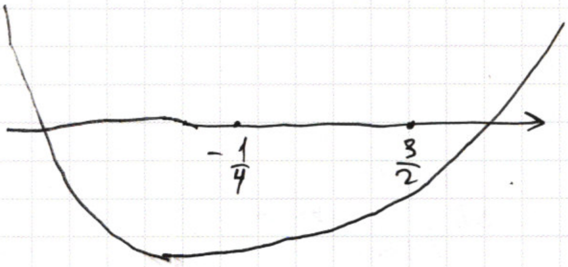
$$f\left(-\frac{1}{4}\right)\le 0;\quad f\left(\frac{3}{2}\right)\le 0;$$

Рассмотрим случаи, как может располагаться парабола относительно оси Ox, если $f\left(-\frac{1}{4}\right)\le 0$; $f\left(\frac{3}{2}\right)\le 0$.

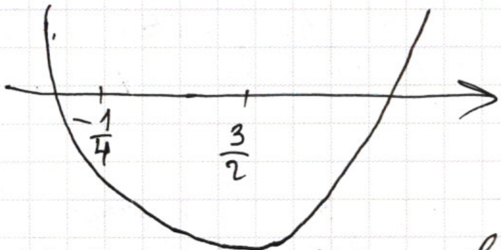
т.к. старший коэффициент $=2>0$, то ветви направлены вверх;



1) вершина между $-\frac{1}{4}$ и $\frac{3}{2}$;



2) вершина левее $-\frac{1}{4}$;



3) вершина правее $\frac{3}{2}$;

Значит, если $f\left(-\frac{1}{4}\right)\le 0$ и $f\left(\frac{3}{2}\right)\le 0$, то $f(x)<0$ при всех $x\in\left[-\frac{1}{4};\frac{3}{2}\right]$;

$f\left(-\frac{1}{4}\right)=2\cdot\frac{1}{16}+\frac{1}{4}(a+1)-b-1$; $f\left(\frac{3}{2}\right)=2\cdot\frac{9}{4}-\frac{3}{2}(a+1)-b-1$;

$$\begin{cases}\frac{1}{8}+\frac{a}{4}+\frac{1}{4}-b-1\le 0,\\ \frac{9}{2}-\frac{3}{2}-\frac{3a}{2}-b-1\le 0,\end{cases}\qquad \begin{cases}\frac{3}{8}+\frac{a}{4}-b-1\le 0,\\ 5-\frac{3a}{2}-b\le 0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}-\frac{5}{8}+\frac{a}{4}-b\le 0,\\ 5-\frac{3a}{2}-b\le 0;\end{cases}\qquad \begin{cases}b\ge\frac{a}{4}-\frac{5}{8},\\ b\ge 5-\frac{3a}{2};\end{cases}$$

2) $x+|2x-1|-ax-b\geq 0$; при $x\in\left[\frac{-1}{4};\frac{3}{2}\right]$;

$|2x-1|=2x-1$, если $x\geq\frac{1}{2}$;

$|2x-1|=1-2x$, если $x<\frac{1}{2}$;

Пусть $g(x)=x+|2x-1|-ax-b$;

$$\begin{cases} g(x)=3x-ax-b-1, \text{ если } x\geq\frac{1}{2}, \\ g(x)=-x-ax+1-b, \text{ если } x<\frac{1}{2}; \end{cases}$$

$3x-ax-b-1\geq 0$ при $x\in\left[\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$;

$-x-ax+1-b\geq 0$ при $x\in\left[\frac{-1}{4};\frac{1}{2}\right]$;

$x(3-a)-(b+1)$ – линейная функция $\Rightarrow$ если

$g\left(\frac{1}{2}\right)\geq 0$ и $g\left(\frac{3}{2}\right)\geq 0$, то $g(x)>0$ при $x\in\left[\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$,

Значит,

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(3-a)-(b+1)\geq 0, \\ \frac{3}{2}(3-a)-(b+1)\geq 0, \end{cases}$$

$-x(1+a)+1-b$ – линейная функция $\Rightarrow$ если $g\left(\frac{-1}{4}\right)\geq 0$

и $g\left(\frac{1}{2}\right)\geq 0$, то $g(x)\geq 0$ при $x\in\left[\frac{-1}{4};\frac{1}{2}\right]$;

Значит;

$$\begin{cases} \frac{1}{4}(1+a)+1-b\geq 0, \\ \frac{-1}{2}(1+a)+1-b\geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{2}-\frac{a}{2}-b-1\geq 0, \\ \frac{9}{2}-\frac{3a}{2}-b+1\geq 0, \\ \frac{1}{4}+\frac{a}{4}+1-b\geq 0, \\ \frac{-1}{2}-\frac{a}{2}+1-b\geq 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} b\leq\frac{1}{2}-\frac{a}{2} \\ b\leq\frac{-3a}{2}+\frac{11}{2}; \\ b\leq\frac{5}{4}+\frac{a}{4}; \\ b\leq\frac{1}{2}-\frac{a}{2}; \end{cases}$$

Изобразим на координатной плоскости $(a;b)$ неравенства, ~~рассмот~~ полученные при решении двух неравенств ($f(x)\leq 0$ и $g(x)\geq 0$):

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cancel{\frac{18\cdot 7}{3}(1-\sin^2\alpha}$ $\quad 18\left(\frac{7}{3}-\frac{7}{3}\sin^2\alpha+\frac{4}{9}\right)=16\sin^2\alpha;$

$42-42\sin^2\alpha+8=16\sin^2\alpha;\quad 58\sin^2\alpha=50;$

$\sin^2\alpha=\frac{25}{29};\quad \cos^2\alpha=1-\frac{25}{29}=\frac{4}{29}$ (осн. триг. тождество)

$\cancel{tg\angle B/}\ \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=tg^2\alpha=tg^2 CBA;=\frac{25}{29}:\frac{4}{29}=\frac{25}{4};$

т.к. $\triangle ABC$ – прямоуг., то $\angle CAB=90°-\angle CBA;\Rightarrow \sin\angle CAB=\cos\angle CBA$, $\cos\angle CAB=\sin\angle CBA$

$tg^2\angle CAB=\frac{\sin^2\angle CAB}{\cos^2\angle CAB}=\frac{\cos^2\angle CBA}{\sin^2\angle CBA}=\frac{1}{tg^2 CBA};$

Значит, $tg^2\angle CAB=\frac{4}{25}$; т.к. $\angle CAB$ – острый угол прямоуг. треугольника, его тангенс >0;

$tg\angle CAB=\frac{2}{5};$

Ответ: $\frac{2}{5}$;

N 4б. $AC=\sqrt{29}$; $S_{\triangle CED}$ – ?

т.к. $AC=\sqrt{29}$ и $AD:AC=3:5$, то $AD=\frac{3}{5}\cdot\sqrt{29};$

$S_{\triangle CED}=\frac{1}{2}\cdot CD\cdot DE\cdot\sin\angle CDE;\quad CD=\frac{2}{3}AD=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}\sqrt{29}=\frac{2\sqrt{29}}{5};$

$ED=AD\cdot\cos\angle ADE=AD\cdot\cos\alpha$ (из пункта а);

$\cos^2\alpha=\frac{4}{29}$, т.к. α – острый, $\cos\alpha>0$; $\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{29}};$

$ED=\frac{3}{5}\cdot\sqrt{29}\cdot\frac{2}{\sqrt{29}}=\frac{6}{5};\quad \sin\angle CDE=\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha=$

$=\frac{5}{\sqrt{29}}$ ~~(т.к.~~ $\quad S_{\triangle CED}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{29}}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{5}{\sqrt{29}}=\frac{6}{5};$

Ответ: $\frac{6}{5}$;

N 6. $2x^2-x-1\le ax+b\le x+|2x-1|$; для всех $x\in\left[-\frac{1}{4};\frac{3}{2}\right]$;

$$\begin{cases}2x^2-x(a+1)-(b+1)\le 0, & x\in\left[-\frac{1}{4};\frac{3}{2}\right];\\ x+|2x-1|-ax-b\ge 0, & x\in\left[-\frac{1}{4};\frac{3}{2}\right];\end{cases}$$

1) $2x^2-x(a+1)-(b+1)\le 0$; Пусть $f(x)=2x^2-(a+1)x-(b+1);$

Запишем условия, при которых выполняется $f(x)\le 0$;
$f(x)$ – парабола;

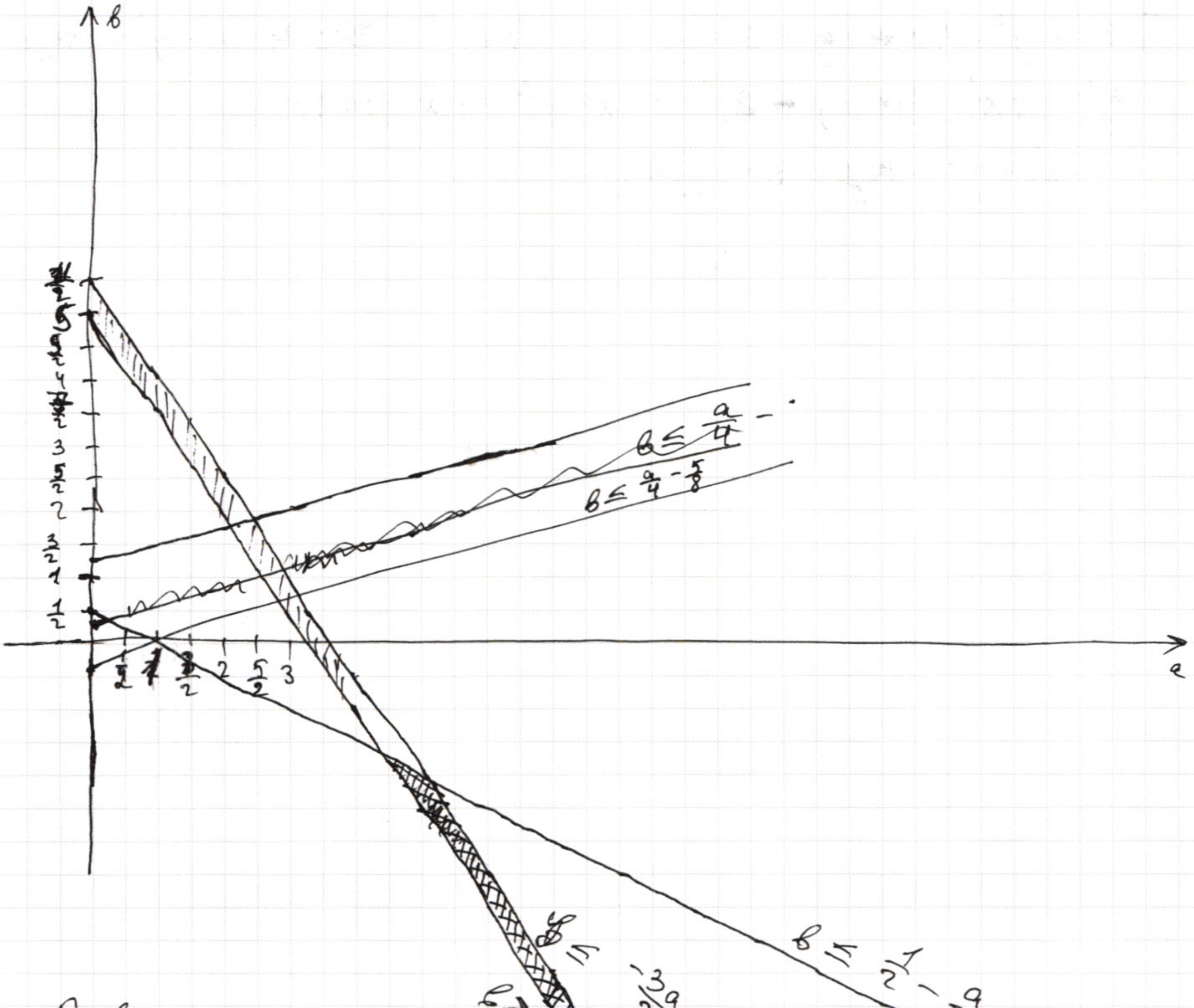
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Ответ:

точки, ограниченные прямыми $b \le \frac{1}{2} - \frac{a}{2}$; $b \le \frac{-3a}{2} + \frac{11}{2}$; $b \ge 5 - \frac{3a}{2}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

N 3.

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2}, \\ 2x^2+y^2-4x+4y+3=0; \end{cases}$$

ОДЗ: $xy-2x+2-y\geq 0$

Возведем в квадрат первое ур-е: $(y-2x\geq 0)$;

$$\begin{cases} y^2+4x^2-4xy=xy-2x-y+2, \\ 2x^2+y^2-4x+4y+3=0; \end{cases}$$

$(x+y)^2 = \cancel{2x}\cdot\cancel{2x} - x^2+y^2-2(x+y)$;

$\cancel{y^2+4x^2 \quad ((x+y)+2)^2 = (x+y)^2-4(x+y)+4 =}$

$\cancel{= x^2+y^2+2xy-4(x+y)+4;}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~№6.~~ №7. Вычислим значения $f(x)$ для ~~$x \in [1; 21]$~~, различных x;

Для простых чисел:

$f(2) = 1$; $f(3) = \left[\frac{3}{2}\right] = 1$; $f(5) = \left[\frac{5}{2}\right] = 2$; $f(7) = 3$;

$f(11) = 5$; $f(13) = 6$; $f(17) = 8$; $f(19) = 9$;

Для составных чисел:

$f(4) = f(2 \cdot 2) = f(2) + f(2) = 1+1 = 2$; $f(6) = f(3 \cdot 2) = f(3) + f(2) = 2$; $f(8) = f(4 \cdot 2) = f(2) + f(4) = 2+1 = 3$; $f(9) = f(3 \cdot 3) = f(3) + f(3) = 2$; $f(10) = f(2 \cdot 5) = f(2) + f(5) = 1+2 = 3$; ~~$f(1$~~ $f(12) = f(4 \cdot 3) = f(4) + f(3) = 1+2 = 3$; $f(14) = f(2 \cdot 7) = f(2) + f(7) = 1+3 = 4$; $f(15) = f(5) + f(3) = 2+1 = 3$; $f(16) = f(4) + f(4) = 4$; $f(18) = f(6) + f(3) = 2+1 = 3$; $f(20) = f(4) + f(5) = 2+2 = 4$; $f(21) = f(3) + f(7) = 1+3 = 4$; Т.к. для простых чисел значения $f(x)$ – натуральные, то $f(n) \in N$, если $n \in N$;

Для $x = 1$:

$f(n) = f(n \cdot 1) = f(n) + f(1) \Rightarrow f(n) = f(n) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$;

Для чисел вида $\frac{1}{n}$, где $n \in N$; $n > 1$;

$f(1) = f(\frac{1}{n} \cdot n) = f(n) + f(\frac{1}{n})$; т.к. $f(1) = 0$, то $f(\frac{1}{n}) = -f(n)$; т.к. $f(n) > 0$ для $n \in N$ и $n > 1$, то $f(\frac{1}{n}) < 0$;

$f(\frac{x}{y}) = f(x \cdot \frac{1}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y})$; $x, y \in N$; ~~$f(x) \geq 0$, т.к. $x \in N$; $f(\frac{1}{y}) < 0$~~ если ~~$f($~~ $x = y = 1$, то $f(\frac{x}{y}) = 0$;

т.к. $f(x) \geq 0$, $f(\frac{1}{y}) \leq 0$, т.к. $y \in N$, ~~найдем такие пары чисел, что~~ если $f(y) > f(x)$, то $f(\frac{x}{y}) < 0$;

Найдем кол-во пар чисел $(x; y)$ таких, что $f(x) < f(y)$

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
$f(x)$	0	1	1	2	2	2	3	3	2	3	5	3	6	4	3	4	8	3	9	4	4

если $f(x) = 0$ (1 число), то кол-во чисел $y = 20$;

если $f(x) = 1$ (2 числа), то кол-во чисел $y = 18$;

если $f(x) = 2$ (4 числа), то кол-во чисел $y = \cancel{13};\ 14$;

если $f(x) = 3$ (6 чисел), то кол-во чисел y: 8;

если $f(x) = 4$ (4 числа) то кол-во чисел y: 4

если $f(x) = 5$ (1 число), то кол-во чисел y: 3

если $f(x) = 6$ (1 число), то кол-во чисел : 2

если $f(x) = 8$ (1 число), то кол-во чисел y : 1;

если $f(x) = 9$ (1 число), то кол-во чисел y: 0

~~Перемножим каждое~~ перемножим для каждого значения $f(x)$ кол-во чисел x и чисел y, таких что $f(y) > f(x)$, сложим эти произведения:

$1 \cdot 20 + 2 \cdot 18 + 4 \cdot 14 + 6 \cdot 8 + 4 \cdot 4 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 =$
$= 20 + 36 + 56 + 48 + 16 + 3 + 2 + 1 = 20 + 92 + 64 + 6 = 20 + 70 + 92 =$
$= 182$;

Ответ: 182 пары;

№3. $\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}; \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0; \end{cases}$ ОДЗ: $xy - 2x - y + 2 \geq 0$;

Возведем в квадрат первое ур-е: $(y - 2x \geq 0)$;

$\cancel{\begin{cases} (y-2x)^2 = (x-1)(y-2); \\ (2x-1)^2 + (y-2)^2 - 2(x^2-1) = 0; \end{cases}}$ ~~$4x^2 + y^2 - 4xy = xy - 2x - 2y + 2$;~~

~~если $x =$~~

~~$(2x-1)^2 + (y-2)^2 - 2(x-1)(x+1) = 0$~~

~~$y - 2 = \frac{}{y}$~~ $x - 1 = \cancel{\frac{(y-2x)^2}{}}$

~~$\frac{(y-2x)}{(y+1)} \cdot \frac{(y-2x)^2}{(2x-1)^2 + (y+2)^2} = \frac{y-2}{x+1}$;~~

$\begin{cases} (y-2x)^2 = (x-1)(y-2); \\ 2(x-1)^2 + (y-2)^2 - 1 = 0; \end{cases}$

Замена переменных:
$a = x - 1$; $b = y - 2$;
$y - 2x = b - 2a$;

$\begin{cases} (b-2a)^2 = ab \\ 2a^2 + b^2 - 1 = 0; \end{cases}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\begin{cases}(b-2a)^2=ab,\\ 2a^2+b^2-1=0;\end{cases}$ $\begin{cases}b^2+4a^2-4ab=ab,\\ 2a^2+b^2-1=0;\end{cases}$

$\begin{cases}b^2=1-2a^2;\\ 1-2a^2+4a^2=5ab;\end{cases}$ $\begin{cases}2a^2+b^2=1,\\ 4a^2+1=5ab;\end{cases}$ ~~сложим эти ур-я.~~

$\cancel{4a^2+1=5ab;}$ $\cancel{4a^2-5ab+1=0;}$ $\cancel{4a^2-4ab-ab+1=0;}$

$\cancel{4a(a-b}$ $\cancel{5a^2-5ab-a^2+1;}$ $\cancel{5a(}$

$\cancel{D=25b^2-16;}$ $\begin{cases}2a^2+b^2-1=0,\\ 4a^2-5ab+1=0;\end{cases}$ $6a^2+b^2-5ab=0;$

$\cancel{a_1=}$ $\cancel{6a^2-6ab+ab+b^2=0;}$

~~$6a(a-b)$ однородное ур-е (отн. a):~~

$\cancel{D=25b^2-24b^2=b^2;}$ $\cancel{D=25b^2-4\cdot b^2\cdot 6=b^2;}$

$\cancel{a_1=5b-b}$ $\cancel{a_1=\frac{5b-b}{12}=\frac{b}{3};}$ $\cancel{a_2=\frac{6b}{12}}=\frac{b}{2};$

~~если $b=3a$:~~

$\cancel{2a^2+(3a-2a)^2=ab;\ a^2-ab=0;}$

~~подставим b^2: $1-2a^2+4a^2-4ab=ab$; $2a^2-5ab$~~

$4a^2-5ab+b^2=0$; (однородное ур-е) относительно a:

$D=25b^2-16b^2=9b^2$; $a_1=\frac{5b-3b}{8}=\frac{b}{4}$; $a_2=\frac{5b+3b}{8}=b$;

если $a=b$:

$\cancel{2a^2+a^2=1;\ 3a^2=1;\ a=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}=b}$ $(b-2b)^2=ab;$ $b^2=ab;$ $b(b-a)=0;$

~~если $a=\frac{b}{4}$;~~

$b^2=1-2b^2$; $3b^2=1$; $b=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}=a$.

если $a=\frac{b}{4}$: $2a^2+16a^2=1$; $a=\pm\frac{1}{3\sqrt{2}}$; $b=\frac{\pm 4}{3\sqrt{2}}$;

$\left[\begin{aligned}y&=2-\frac{\sqrt{3}}{3},\\ y&=2+\frac{\sqrt{3}}{3},\\ y&=2-\frac{4}{3\sqrt{2}};\\ y&=2+\frac{4}{3\sqrt{2}}\end{aligned}\right.$ $\left[\begin{aligned}x&=1-\frac{\sqrt{3}}{3}\\ x&=1+\frac{\sqrt{3}}{3},\\ x&=1-\frac{1}{3\sqrt{2}};\\ x&=1+\frac{1}{3\sqrt{2}}\end{aligned}\right.$

с учетом ОДЗ 2-я и 3-я пара решений не подходят;

Ответ: $\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3};\ 2-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; $\left(1+\frac{1}{3\sqrt{2}};\ 2+\frac{4}{3\sqrt{2}}\right)$;

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$$\begin{cases}(b-2a)^2=ab,\\ 2a^2+b^2=1;\end{cases} \qquad b^2=1-2a^2;$$

$b^2+4a^2-4ab=ab;$ $\qquad 1-2a^2+4a^2$

$1+2a^2=5ab;$ $\qquad 1=2a^2+b^2;$

$2a^2-5ab+1=0;$

$4a^2 \qquad b^2-5ab+4a^2=0;$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-\cancel{2}x-y+2}, \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} y^2+4x^2-4xy=xy-2x-y+2; \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0; \end{cases}$$

~~$y-2x=$~~

$AE=AD\sin\alpha;$

$DE=AD\cos\alpha;$

$DC=\frac{2}{3}AD;$

$\frac{\frac{2}{3}AD}{\sin 45^\circ}=$

$CE^2=DE^2+DC^2-$

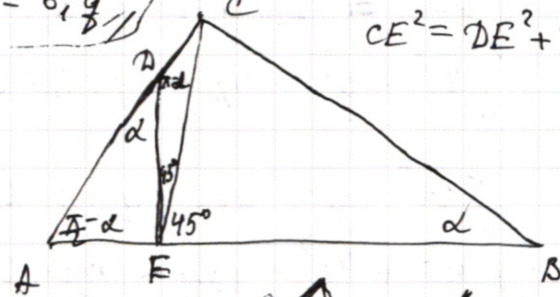
$a=b_1;\quad b=b_1q;\quad c=b_1q^2;\quad d=b_1q^3;$

$ax^2+2bx+c=0;$

$b_1x^2+2b_1qx+b_1q^2=0;$

$x^2+\cancel{2b_1}\,2qx+q^2=0;$

$b_1^2q^6+2b_1q^4+q^2=0;$



$\frac{1}{2}ab\sin\alpha$

$\frac{ab\sin\alpha}{2};$

$\cancel{b_1}\quad b\quad D=4q^8-4q^8=0;$

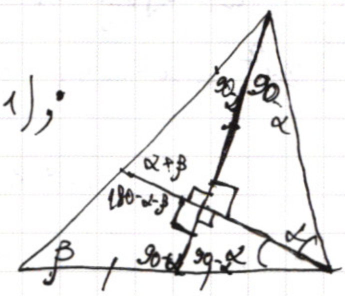
$b_1=\frac{-2q^4}{2q^6}=\frac{-1}{q^2};\qquad c=\frac{-1}{q^2}\cdot q^2=-1;$

№3.

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4(x+y)+3=0; \end{cases}$$

$xy-2x-y+2=y(x-1)-2(x-1)=(y-2)(x-1);$

$$\begin{cases} y^2+4x^2-4xy=(y-2)(x-1); \\ 2x^2+y^2-4(x+y)+3=0; \end{cases}$$



$$\begin{cases} y^2+4x^2-4xy=xy-2x+y+2; \\ 2x^2+y^2-4(x+y)+3=0; \end{cases}$$

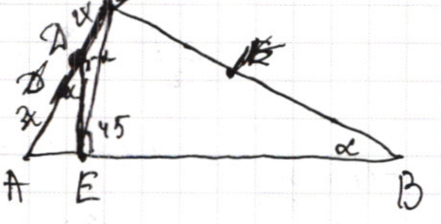
$2x^2-4xy+4(x+y)-3=xy-2x+y+2,$

~~$2x^2-3xy$~~

$2x^2-5xy$

$\alpha+\beta=150^\circ;$

~~90~~ $180-\alpha-\beta$



$AD:AC=3:5;$

$S_1=S_2$

~~Т.о.~~ $AE=AD\sin\alpha;$

$DE=AD\cos\alpha;$

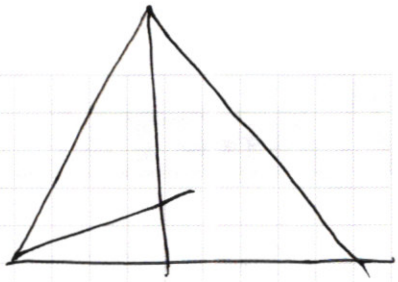
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$2(x-1)^2+(y-2)^2-1=0;$
$(y-2x)^2 = (x-1)(y-2);$

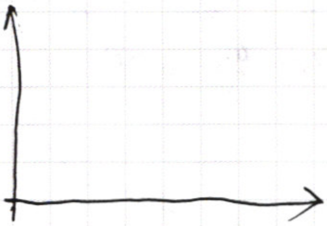


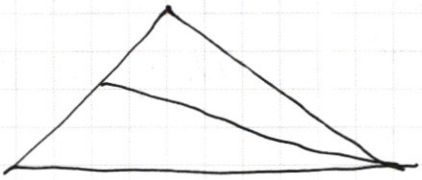
$2x^2 - x - 1 \leq ax + b \leq x + |2x-1|;$

1) $2x^2 - x(a+1) - (b+1) \leq 0;$

2) $x + |2x-1| - ax - b \geq 0;$

1) $D = (a+1)^2 + 8(b+1);$ $x_1 = \frac{a+1-\sqrt{(a+1)^2+8(b+1)}}{}$;





$\begin{cases} y-2x = \sqrt{xy-2x-y+2}, \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0; \end{cases}$

ОДЗ: $xy-2x-y+2 \geq 0;$

$y-2x \geq 0;$

$\begin{cases} 2x^2+y^2-4x-4y+3=0, \\ y^2+4x^2-4xy-xy+2x+y-2=0; \end{cases}$

$\begin{cases} 2x^2+y^2-4(x+y)+3=0, \\ y^2+4x^2-5xy+2x+y-2=0; \end{cases}$

$y^2+x^2+2xy-4+7;$

$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2}, \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0; \end{cases}$

$f(a)+f(b)=f(ab);$

$f(p)=\left[\frac{p}{2}\right]$

$1 \leq x \leq 21;$

$1 \leq y \leq 21;$

$f\left(\frac{x}{y}\right)<0;$

$x=3;$ $y=3;$

$f(x)=3;$ $f(y)=3;$

$f(5)=$

$f(5\cdot 1)=f(5)\cdot f(1)$

$f(1)=\frac{f(5)}{f(5)}$

$x+1-2x-ax-b=$

$=-2x+x-ax-b+1=$

$=-x-ax-b+1$

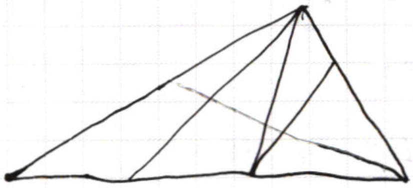
$f(3)+f(4)$

$f(2)+f(6)$

$\frac{1}{2}-\frac{a}{2}=0;$

$a=1;$

$\frac{11}{2}-\frac{3a}{2}=0;$



$11-3a=0;$

$-3a+11=0;$

$a=\frac{11}{3}$

$\frac{-3a}{2}+\frac{11}{2}=0;$

$f(1)=f\left(x\cdot\frac{1}{x}\right)=f($

$0=f(x\cdot$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2}$

$(xy-2x-y+2)=x(y-2)-(y-2)=$

$=(x-1)(y-2);$

$y-2x=$

$\begin{cases} 2x^2+y^2-4x-4y=-3, & \mid \cdot 2 \\ y^2+4x^2-5xy+2x+y=2; & \mid \cdot 3 \end{cases}$

$\begin{cases} 4x^2+2y^2-8x-8y=-6, \\ 3y^2+12x^2-15xy+6x+3y=6, \end{cases}$

$16x^2+6y^2-8(x+y)+6x+3y-15xy=0,$

$16x^2+3y^2-2x-5y-15xy=0;$

$3y^2-5y(3x+1)-2x+16x^2=0,$

$(2x+y)^2=$

$=4x^2+y^2-4xy;$

$y^2-4y+4-1+2(x-2)$

$y^2-4y+4+x^2-4x+4+x^2-5=0,$

$D=25(3x+1)^2-4(16x^2$

$(y-2)^2+(x-2)^2+x^2-5=0,$

$16x^2+3y^2-2x-5y-15xy=0,$

$(y-2x)^2=(x-1)(y-2),$

$16x^2-15xy+y^2=16x^2-15xy+y^2=$

$\cancel{x^2-15xy+x^2}$ $\quad 2x(8x-1)-5;$

$y-2=$

$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2}; \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0; \end{cases}$

$y-2x=(x-1)(y-2);$

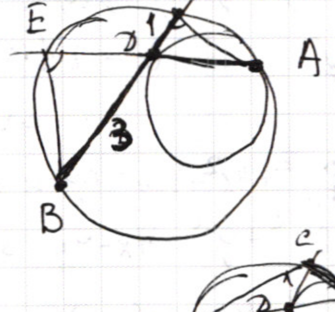
$4x^2+4y^2$

$\cancel{y^2-4x^2=}$

$(y-2x)^2=$

$(y-2x)^2=xy-2x-y+2;$

$(y-2x)^2=y^2+4x^2-4xy;$



$CD=1,$

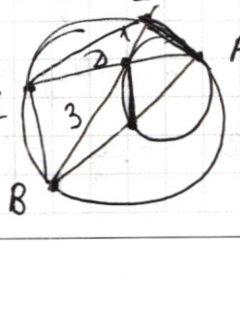
$BD=3;$

$S-?;$

$(y-2x)^2-2x^2+4xy-4(x+y)+3=0,$

$xy-2x-y+2=2x^2+4x+4y-4xy-3;$

$2x^2+6x+5y-5xy-5=0,$



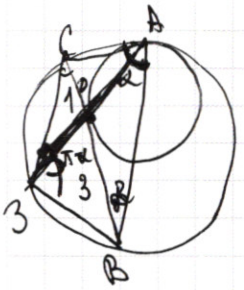
$S_{BACE}=$

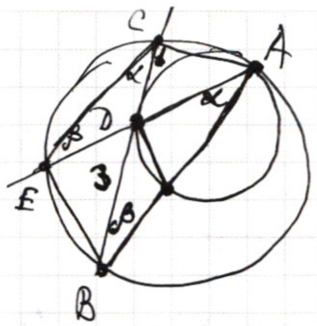
$2x(3x+3)+5(y-x-1)=0,$

$x(6-5y);$

$y-2x$ $\quad y-2x = 2x^2-4x+2$

x^2-2x+1





Дано:

$CD = 1; \; BD = 3;$

$AD \cdot DE = 3;$

$$\begin{cases} y-2x = \sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0; \end{cases}$$

$y-2x = \sqrt{} \quad (y-2x)^2 = (y-2)(x-1)$

$f(ab) = f(a)+f(b);$ $\quad 2x^2+y^2-4x-4y+3 = \cancel{(2x+y)^2}$ $\quad (2x-1)^2+(y-2)^2-2x^2$

$+1+4$

$f(p) = \left[\frac{p}{2}\right];$ $\quad 1 \le x \le 21; \quad 1 \le y \le 21;$

$f(3)=1;$ $\quad f\left(\frac{x}{y}\right)<0;$ $\quad 4x^2-4x+1+y^2-4y+4$

$-2x^2-2$

$f(5)=2;$ $\quad f(3\cdot 5) = 2+1=3;$

$f($ $\quad f(3\cdot 2) = f(3)+f(2) = 1+1=2;$ $\quad +4+4=8;$

$f($ $\quad f(6)=2;$ $\quad +4$

$f(3\cdot 3) = f(3)+f(3) \Rightarrow$

$f(ab)$ $\quad 6\cdot 1{,}5 = 9$

$\Rightarrow f(9)=2;$

$f(3\cdot 3) = f(3+3)=2;$

$\cancel{f(ab)} = f(a$ $\quad f(6\cdot 1{,}5) = f(6)+f(1{,}5)$

$\cancel{f(7{,}5}$

a, b – ~~нат~~ простые числа; $\quad 2 = 2+1{,}5;$

$f(6)\cdot f(1{,}5) = f$

$f(ab) = \cancel{f(a+b)}\; f(a)+f(b);$ $\quad 2x^2-4x+4$

$2x^2-$

$\cancel{x^2+y^2}$

$\cancel{f(c)}$ $\quad ab = cd$

c – целое; d – рациональное;

$y-2 = \sqrt{y-y}$

$$\begin{cases} y-2x = \sqrt{xy-2x-y+2}, \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0; \end{cases}$$

$f(ab) = f(cd) = f(c)+f(d)$

$x=2; \; y=2;$

если

Натуральные числа;

$y^2-4y+2x^2-4x+3=0;$ $\quad y_1+y_2=4,$

$f(1\cdot 3) = f(1)+f(3)$

$D=16$ $\quad y_1y_2 = 2x^2-4x+3;$ $\quad f$ $\quad 0-2\cdot 1\cdot 3$

y

$$\begin{cases} y-2x = \sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2+4x^2-4xy = xy-2x-y+2; \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0; \end{cases}$$

$f(ab) = f(a)+f(b);$

$2x^2-4xy+4(x+y)-3 = xy-2x-y$

$f\left(\frac{x}{y}\right)<0;$ $\quad f\left(\frac{x}{y}\right)<0,$

$2x^2+2x-5xy+4(x+y)-y-5=0;$