

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарём

- ✓ 1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.
- ✓ 2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.
3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

- ✓ 4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC , если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.
- б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED .
- ✓ 5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω , а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D . Луч AD повторно пересекает Ω в точке E . Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1, BD = 3$.
- ✓ 6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leq ax + b \leq x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке $[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leq x \leq 21, 1 \leq y \leq 21$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

 a, b, c пусть q - знаменатель прогрессии, тогда

$$b = aq$$

$$c = aq^2$$

$$d = aq^3 \text{ (д-четвертый член прогрессии)}$$

$$ax^2 + bx + c = ax^2 + aqx + aq^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a(aq^3)^2 + 2aq \cdot aq^3 + aq^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^3q^6 + 2a^2q^4 + aq^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow aq^2(a^2q^4 + 2aq^2 + 1) = 0$$

$$aq^2 \neq 0 \text{ (по определению геом. прогрессии)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2q^4 + 2aq^2 + 1 = 0$$

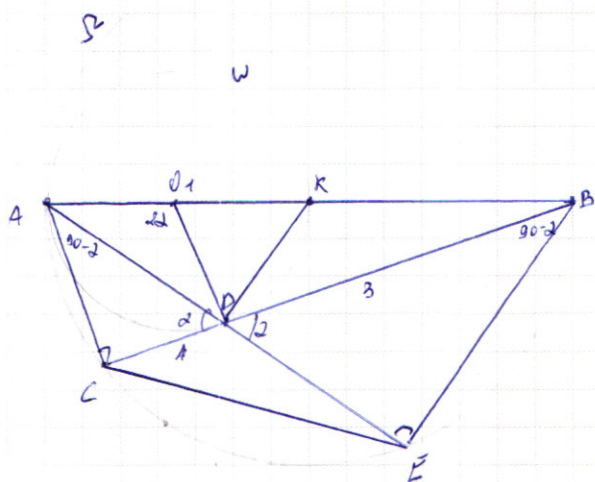
$$(aq^2 + 1)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow aq^2 = -1$$

$$c = aq^2 = -1.$$

Ответ: -1 .

15.



Дано:

$$CD = 1$$

$$BD = 3$$

Найти:

$$R, r, S_{B+CE}$$

1) Пусть O_1 - центр мал. окр. w

2) Пусть $\angle ADC = \alpha \Rightarrow \angle AO_1D = 2\alpha$

3) Пусть K - точка касания AB и w , тогда

AK - диаметр $w = 2r$

AB - диаметр $\Omega = 2R. \Rightarrow$

$$\Rightarrow KB = 2R - 2r$$

4) $\angle ACB = 90^\circ$ (т.к. описана на гипотенузу AB):
 $\angle O_1DB = 90^\circ$ (O_1D - радиус, проведенный в т. касания) \Rightarrow

$\Rightarrow \triangle O_1BD \sim \triangle ABC$ (по двум углам) \Rightarrow

$$\Rightarrow \frac{2R - r}{2R} = \frac{3}{4} \Rightarrow 8R - 4r = 6R \Rightarrow 2R = 4r \Rightarrow R = 2r \Rightarrow K - \text{центр } \Omega.$$

5) $AC = r \cdot \frac{4}{3}$ (из подобия), $AB = 4r \Rightarrow BC = \sqrt{16r^2 - \frac{16}{9}r^2} = \frac{4}{3}r \cdot \sqrt{8} = 4 \Rightarrow$

$$\Rightarrow r = \frac{3}{8} \cdot \sqrt{8}; \quad R = \frac{3}{4} \cdot \sqrt{8}.$$

6) $\sin \alpha = \frac{AC}{AD} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow DE = 3 \cdot \cos \alpha = 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$ (из ост. тригонометрического соотношения)

$$7) AE = AD + DE = \sqrt{3} + \frac{3}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

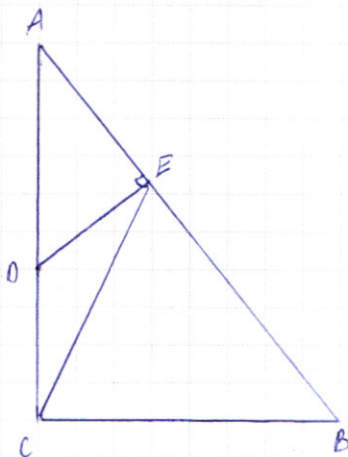
$$8) S_{BACE} = S_{ACE} + S_{AEB} = \frac{AC \cdot AE \cdot \cos \alpha}{2} + \frac{AB \cdot AE \cdot \cos \alpha}{2} = \frac{AE \cdot \cos \alpha}{2} (AB + AC) =$$

$$= \frac{2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}}{2} \left(\frac{3}{2}\sqrt{8} + \sqrt{2} \right) = 4\sqrt{2}.$$

$$\text{Отвеч: } \frac{3}{4} \cdot \sqrt{2}; \quad \frac{3}{2} \cdot \sqrt{2}; \quad 4\sqrt{2}.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

15.



Дано:

$$\angle ACB = 90^\circ$$

$$\frac{AD}{DC} = \frac{3}{5}$$

$$DE \perp AB$$

$$\angle CED = 45^\circ$$

$$AC = \sqrt{29}$$

1) $\angle CED = \angle CEB = 45^\circ$
(по условию)

$$\text{tg} \angle EAD = ?$$

$$S_{CED} = ?$$

2) $\angle DCE + \angle DEB = 180^\circ \Rightarrow$

можно описать окружность вокруг CBED.

3) т.к. $\angle DEC = \angle CEB$ (а CBED вписана, то $DC = CB$)

4) пусть $AC = 5x$, тогда $AD = 3x$; $DC = CB = 2x$.

$$\text{tg} \angle CAB = \frac{CB}{AC} = \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}$$

$$5) S_{ACB} = \frac{5x \cdot 2x}{2} = 5x^2 = 5 \left(\frac{\sqrt{29}}{5} \right)^2 = \frac{29}{5}$$

$$6) S_{AEC} = S_{ACB} \cdot \frac{AE}{AB}$$

$$7) AE = 3x \cdot \cos \angle DAE; \frac{\sin \angle DAE}{\cos \angle DAE} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \angle DAE}}{\cos \angle DAE} = \frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25(1 - \cos^2 \angle DAE) = 4 \cos^2 \angle DAE \Rightarrow \cos \angle DAE = \frac{5}{\sqrt{29}}$$

$$AB = \sqrt{25x^2 + 4x^2} = x \sqrt{29} = \frac{\sqrt{29}}{5} \cdot \sqrt{29} = \frac{29}{5}$$

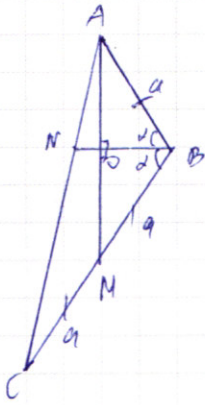
$$\Rightarrow S_{AEC} = \frac{29}{5} \cdot \frac{3}{29} = 3$$

$$8) S_{ADE} = \frac{AE \cdot DE}{2} = \frac{3 \cdot \frac{6}{5}}{2} = \frac{18}{10}$$

$$S_{CED} = S_{AEC} - S_{ADE} = 3 - 1,8 = 1,2$$

Ответ: $\text{tg} = \frac{2}{5}$; $S = 1,2$.

№2.



1) пусть AM - медиана $\Rightarrow CM = MB$

2) пусть BN - биссектриса: $\angle ABN = \angle NBN = \alpha$.

3) $\triangle ABO \cong \triangle OBM$ (по двум углам и стороне) $\Rightarrow BO = OM = AB \Rightarrow BC = AB$.

4) пусть $AB = BM = MC = a \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{AM}{\sin 2\alpha} = \frac{a}{\sin(90-2)} \quad (\text{по теореме синусов}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{AM}{2\sin\alpha \cos\alpha} = \frac{a}{\cos\alpha} \Rightarrow AM = 2a\sin\alpha$$

$$5) \angle AMC = 180 - (90 - 2) = 90 + 2$$

по теореме косинусов:

$$AC^2 = AM^2 + MC^2 - 2\cos(90+2) \cdot AM \cdot MC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AC^2 = 4a^2\sin^2\alpha + a^2 - 2 \cdot \sin 2\alpha \cdot 2a\sin\alpha \cdot a \Rightarrow a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AC = a$$

6) т.е. $AC + AB = BC$ (по предположению из пункта 4) \Rightarrow

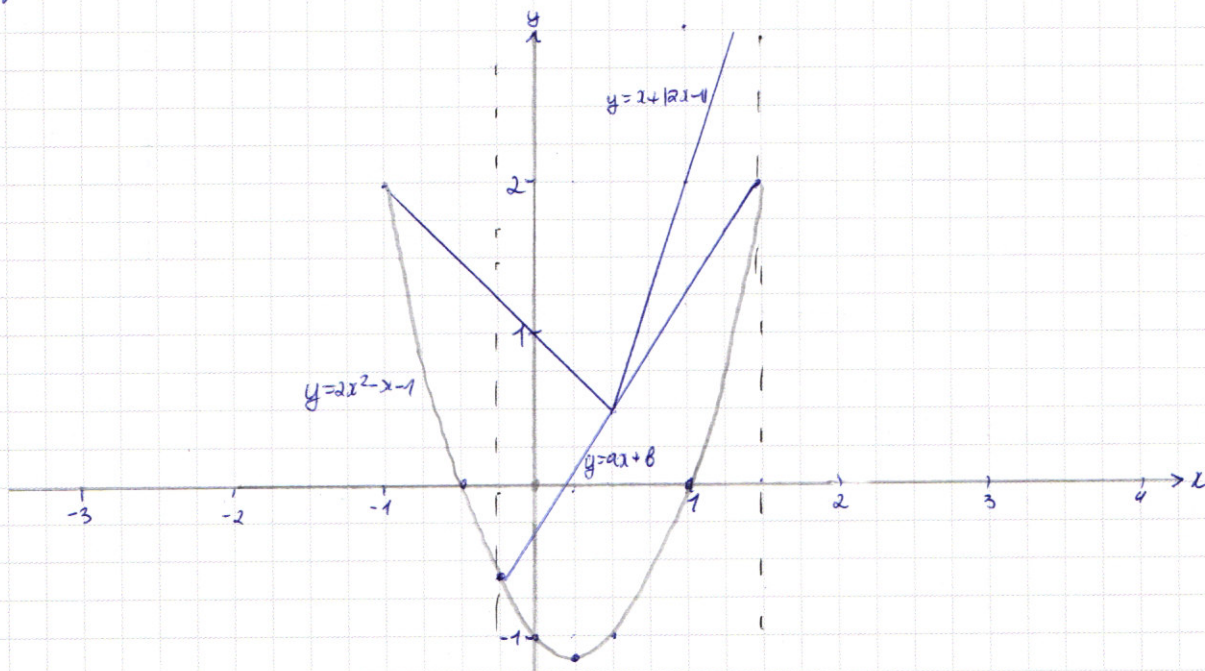
\Rightarrow такая треугольником нет.

Ответ: 0.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6.

Нарисуйте график функции $2x^2 - x - 1$ и $x + |2x - 1|$



У графика функции при $\begin{cases} x \leq \frac{1}{2} & y = -x + 1 \\ x \geq \frac{1}{2} & y = 3x - 1 \end{cases}$

Пунктирными линиями проведем $x = -\frac{1}{4}$ и $x = \frac{3}{2}$.

В этом промежутке все точки параболы строгие и лежат под прямой $ax + b$, все точки „лоуфы“ - над прямой.

Соединим точки пересечения параболы и пункт. линии.

Докажем, что это линия пересекает минимумом точки функции „лоуфы“.

$$y = ax + b \quad a = \frac{2 + \frac{5}{8}}{\frac{3}{4}} = \frac{2 \cdot \frac{4}{8} + \frac{5}{8}}{\frac{3}{4}} = \frac{2 \cdot \frac{4}{7} + \frac{5}{7}}{\frac{3}{4}} = \frac{3}{2} \quad ; \quad 2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} + b \Rightarrow b = -\frac{1}{4}$$

$y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}$, при $x = \frac{1}{2}$ $y = \frac{1}{2} \Rightarrow$ линия пересекает минимумом точку графика „лоуфы“ \Rightarrow это единственная пара:

Ответ: $(\frac{3}{2}; \frac{1}{4})$

№7.

Заметим, что

$$f(1)=0; f(2)=1; f(3)=1; f(4)=2=f(5)=f(6); f(7)=3=f(8)=f(9)=f(10); \\ f(11)=5; f(12)=3; f(13)=6; f(14)=4; f(15)=3; f(16)=4; f(17)=8; \\ f(18)=4; f(19)=9; f(20)=4; f(21)=4.$$

Если $f(x) = y$, где $x < 1$, то $f(x) < 0$.

$$\text{Например. } f\left(\frac{1}{2} \cdot 2\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) + f(2) \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = -1.$$

Но если мы берем такие x и y , что $f(x) = f(y)$, то $f\left(\frac{x}{y}\right) = 0 \Rightarrow$ мы можем выбрать такие x и y , чтобы $x < y$, но ~~$x \neq y$~~ $f(x) = f(y)$

Тогда все сходится:

$$\frac{20 + 19 + 19 + 3 \cdot 18 + 6 \cdot 15 + 5 \cdot 16 + 4 \cdot 20}{2} = 181.$$

Ответ: 181.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~$f(ab) = f(a) + f(b)$~~

$d > 1$

$f(\sqrt{R} \cdot \sqrt{R}) = f(\sqrt{R}) + f(\sqrt{R})$

$f(A) = 2f(\sqrt{A})$
($x \rightarrow x + x$)

$f(1/2 \cdot 2) = f(1) = f(1/2) + f(2)$

$0 = f(1/2) + f(2)$

$f(1/2) = -1$

$f(3/2) = f(3) + f(1/2)$

$0 = f(1/2) + 1$

$f(1/2) = -1$

$f(2 \cdot 1/2) = f(2) + f(1/2)$

$0 = f(2) - 1$

$f(2) = 1$

$f(n \cdot \frac{1}{n}) = f(n) + f(\frac{1}{n})$

$f(\frac{1}{n} \cdot n) = f(\frac{1}{n}) + f(n)$

$0 = f(\frac{1}{n}) + f(n) \Rightarrow f(\frac{1}{n}) = -f(n) \Rightarrow f(\frac{1}{n}) = 0$

$f(1) = 0$

$f(2) = 1$

$f(3) = 1$

$f(4) = 2$

$f(5) = 1$

$f(6) = 1$

$f(8) = 1$

$f(9) = 1$

$f(10) = 2$

$f(11) = 1$

$f(12) = 2$

$f(13) = 1$

$f(14) = 2$

$f(15) = 1$

$f(16) = 2$

$f(17) = 1$

$f(18) = 2$

$f(19) = 1$

$f(20) = 2$

$f(21) = 1$

$f(22) = 2$

$f(23) = 1$

$f(24) = 2$

$f(25) = 2$

$f(26) = 1$

$f(27) = 2$

$f(28) = 1$

$f(29) = 2$

$f(30) = 1$

$f(31) = 2$

$f(32) = 2$

$f(33) = 1$

$f(34) = 2$

$f(35) = 1$

$f(36) = 2$

$f(37) = 1$

$f(38) = 2$

$f(39) = 1$

$f(40) = 2$

$f(41) = 1$

$f(42) = 2$

$f(43) = 1$

$f(44) = 2$

$f(45) = 1$

$f(46) = 2$

$f(47) = 1$

$f(48) = 2$

$f(49) = 2$

$f(50) = 1$

$f(51) = 2$

$f(52) = 1$

$f(53) = 2$

$f(54) = 1$

$f(55) = 2$

$f(56) = 1$

$f(57) = 2$

$f(58) = 1$

$f(59) = 2$

$f(60) = 2$

$f(61) = 1$

$f(62) = 2$

$f(63) = 1$

$f(64) = 2$

$f(65) = 1$

$f(66) = 2$

$f(67) = 1$

$f(68) = 2$

$f(69) = 1$

$f(70) = 2$

$f(71) = 1$

$f(72) = 2$

$f(73) = 1$

$f(74) = 2$

$f(75) = 1$

$f(76) = 2$

$f(77) = 1$

$f(78) = 2$

$f(79) = 1$

$f(80) = 2$

$f(81) = 2$

$f(82) = 1$

$f(83) = 2$

$f(84) = 1$

$f(85) = 2$

$f(86) = 1$

$f(87) = 2$

$f(88) = 1$

$f(89) = 2$

$f(90) = 2$

$f(91) = 1$

$f(92) = 2$

$f(93) = 1$

$f(94) = 2$

$f(95) = 1$

$f(96) = 2$

$f(97) = 1$

$f(98) = 2$

$f(99) = 1$

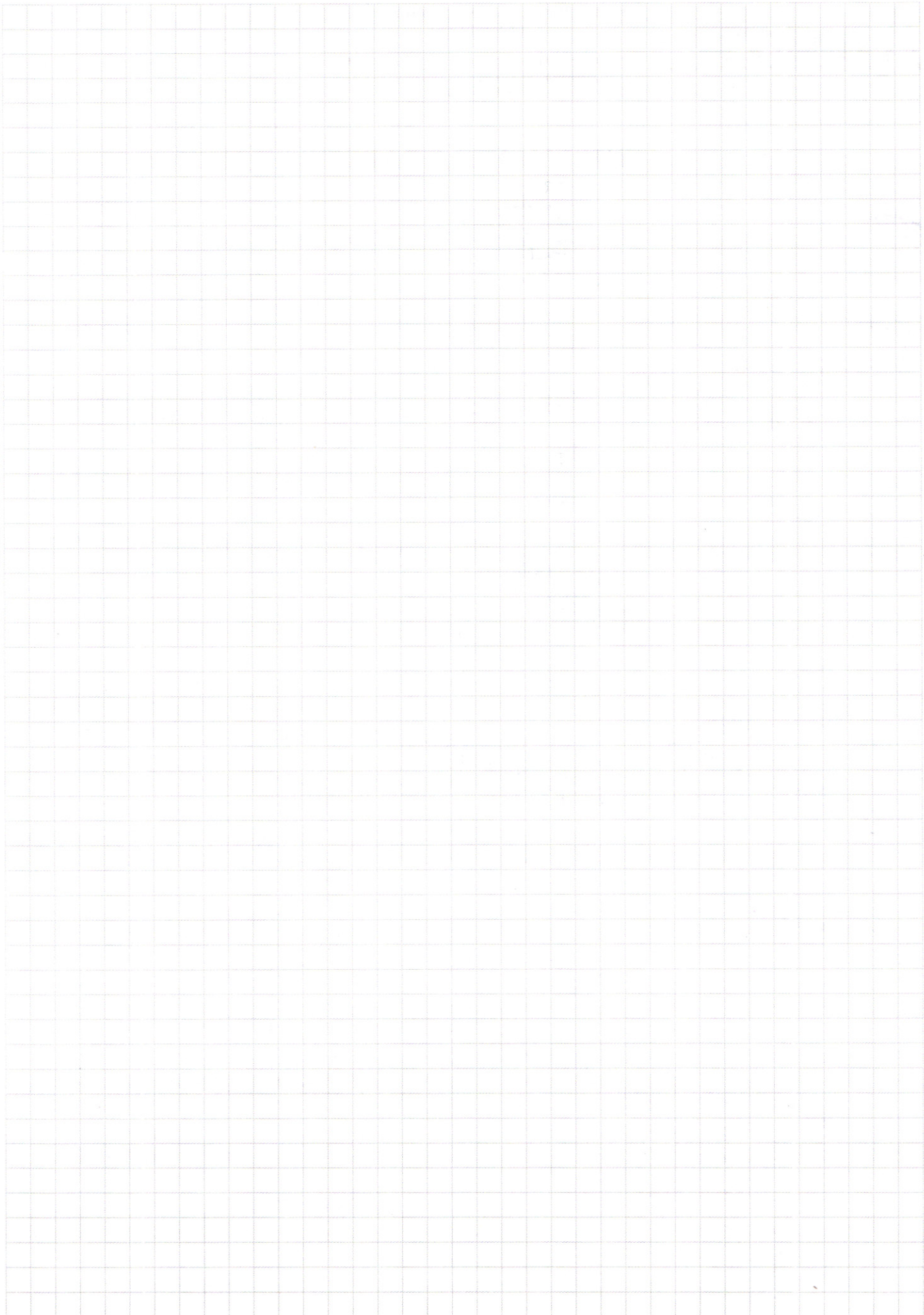
$f(100) = 2$

$20 + 38 + 54 + 90 + 80 + 80$
2

$220 + 92$
2

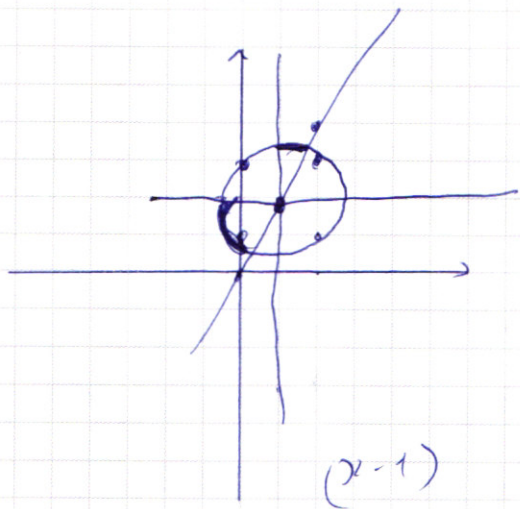
$\frac{270}{3}$

$\frac{362}{2} = 181$



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



$$9 - 5x \pm \sqrt{25x^2 - 90x - 4(-10x + 8)}$$

$$y^2 + 52xy - 60x - 4y + 8 = 0$$

$$x^2 - 500x + 112$$

$$1(x-1)^2 + (y-2)^2 = 3$$

$$y^2 - 4xy + 4x^2 = xy - 2x + y + 2$$

$$y^2 - 4xy + 4x^2 - xy + 2x - y - 2 = 0$$

$$y^2 - 52xy + 60x + 4y - 8 = 0$$

$$2(4x + 4y - 3 - y^2)$$

$$\frac{6}{10} - 1 = -\frac{4}{10}$$

$$2 \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 1$$

$$\frac{2}{10} \times \frac{1}{4} - 1$$

$$2 - 1 - 1$$

$$2 \cdot \frac{9}{4} - \frac{3}{2} - 1$$

$$\frac{9}{2} - \frac{3}{2}$$

$$\frac{9}{2} - \frac{3}{2} - 1$$

$$\frac{6}{10} - \frac{12}{10} = -\frac{6}{10}$$

$$4x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1}{4}$$

$$2 \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 1$$

$$\frac{18}{16} - \frac{12}{16}$$

$$\frac{6}{10} - \frac{12}{10} = -\frac{6}{10}$$

$$2 \cdot \frac{1}{10} - \frac{1}{4} - 1$$

$$-\frac{5}{8} = \frac{3}{2}a - \frac{1}{4} + b$$

$$\frac{1}{8} - \frac{2}{8} - \frac{8}{8} = -\frac{9}{8}$$

$$-\frac{5}{8} = -\frac{3}{8} + b$$

$$b = -\frac{1}{4}$$

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{2 \cdot 9}{10} - \frac{3}{4} - 1$$

$$\frac{18}{10} - \frac{12}{10} - \frac{16}{10}$$

$$2 = \frac{9}{4} + b$$

$$-0 - \frac{22}{10} = -\frac{11}{5}$$

$$2 = 6$$

$$y = ax + b$$

$$y = \frac{3}{2}x +$$

$$a = \frac{3}{2}$$

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{4}$$

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y - 2x = \sqrt{(x-1)(y-2)}$$

$$(2x^2 + y - 1)(x + y - 3)$$

$$2x^2 + 2xy + y^2 - 2x^2 - 2xy - 6x + xy - y^2 - 4xy + 4x^2 = xy - 2x - y + 2$$

$$y^2 - 4xy + 4x^2 = xy - 2x - y + 2$$

$$2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0$$

$$y^2 - 4xy + 4x^2 = xy - 2x - y + 2$$

$$2x^2 + xy - 2x - y - 2 - 4x^2 + 4xy + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0$$

$$y^2 = 4xy - 4x^2 + xy - 2x - y - 2$$

$$2x^2 + 4xy - 4x^2 + xy - 2x - y - 2 - 4x - 4y + 3 = 0$$

$$-2x^2 + 5xy - 6x - 5y + 1 = 0$$

$$2x^2 - 5xy + 6x + 5y - 1 = 0$$

$$2x^2 - 5xy + 6x + 5y - 1 = 0$$

$$x = \frac{5y - 6 \pm \sqrt{25y^2 - 4 \cdot 2(5y - 1)}}{4}$$

$$5y - 6 \pm \sqrt{25y^2 - 40y + 8}$$

$$25y^2 - 40y + 8$$

$$25y^2 - 40y + 8$$

$$4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 8 \cdot 5}$$

$$400 - 100 \cdot 40$$

$$c^2x + c^2y + c^2$$

$$(ax + by + c)(dx + ey + f)$$

$$ad^2x^2 + aedyx + afdx^2 + bdey + beey^2 + bfy + cdx + cey + cf$$

$$ad = 2$$

$$ae + bd = 0$$

$$af + cd = -4$$

$$be = 1$$

$$bf + ce = -4$$

$$cf = 3$$

$$\sin(90 + \alpha) = \frac{\sin(90 - \alpha)}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}$$

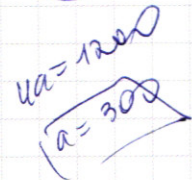
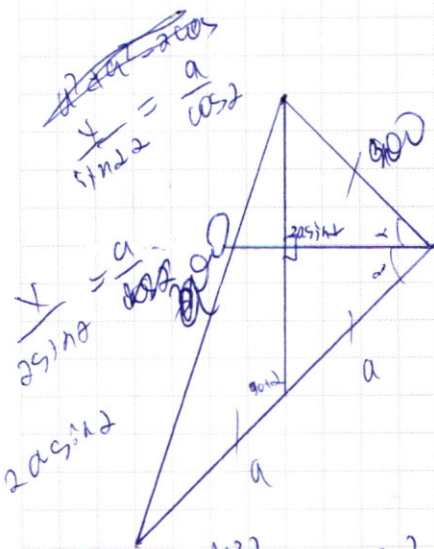
$$\frac{1}{\cos \alpha} = \frac{x}{2 \sin \alpha + \cos \alpha}$$

$$\sin(90 + \alpha) = \cos \alpha$$

$$\theta^2 = a^2$$

$$a^2 + 4a^2 \sin^2 \alpha - 2 \cos(90 + \alpha) \cdot 2a^2 \sin \alpha = \theta^2$$

$$a^2 + 4a^2 \sin^2 \alpha - 2 \cdot 2a^2 \cdot \sin \alpha = \theta^2$$



$$b = a \sqrt{1 + \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$

$$\frac{1}{\cos \alpha} = \frac{x}{2 \sin \alpha + \cos \alpha}$$

$$\sin(90 + \alpha) = \cos \alpha \quad \theta^2 = a^2$$

$$(4r)^2 = 16r^2$$

$$\frac{16 \cdot 9 - 16}{9} r^2$$

$$(2x^2 + y - 1)(x + y - 3)$$

$$2x^2 + 2xy - 8x + xy$$

$$4r \cdot \sqrt{8} = 12$$

$$r \cdot \sqrt{8} = 3$$

$$r = \frac{3 \cdot \sqrt{8}}{\sqrt{8}}$$

$$\frac{16 \cdot 8}{9} r^2$$

$$\frac{4}{3} r \sqrt{8}$$

$$5 - 4 \cos 2$$

$$1 + 4 - 4 \cos 2$$

$$(2x + y + 1)(x + y - 3)$$

$$(2x + y - 1)(x + y - 3)$$

$$(2x + y + 1)(x^2 - y + 3)$$

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{8} \cdot \sqrt{8}$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{8} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2}$$

$$1 + 4(1 - \cos 2)$$

$$1 + 4(1 - \sqrt{1 - \sin^2 2}) = 0$$

$$2x^2 - 2xy +$$

$$25x^2 + 4y^2 = \sqrt{29} x$$



$$(2x + 1)$$

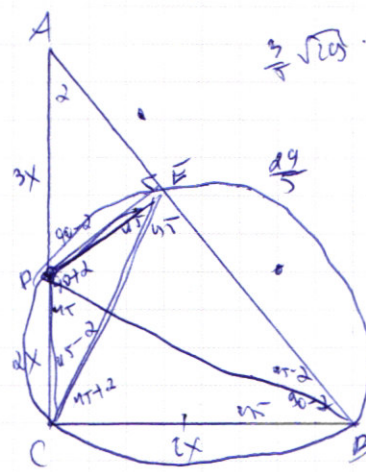
$$3 \cos 2 + 1 \cos 2$$

$$AD = \sqrt{3}$$

$$F(2) = 1$$

$$1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\sqrt{3} + \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{3}$$



$$\frac{3}{5} \sqrt{29} \cdot \sin \alpha$$

$$\sqrt{1 - \cos^2 2} = \sin 2$$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos 2} = \frac{2}{3}$$

$$f(3) = f(0) = f(1) + f(2)$$



$$\frac{9}{25} \cdot 29 - 9 \cdot \frac{3}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2} (y-2)^2$$

$$\frac{3}{8} \cdot 2\sqrt{2}$$

$$y^2 - 2(x -$$

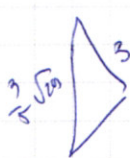
$$CE^2 + BE^2 - 2 \cos 45^\circ CE \cdot BE = BC^2$$

$$f(2) = 1$$

$$f(3) = 1 \quad 5 \sin \alpha = 2 \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

$$25 \sin^2 \alpha = 4(1 - \sin^2 \alpha)$$

$$9 + 9 \sin^2 \alpha = 4 - 4 \sin^2 \alpha$$



$$AE = 3$$

$$9 \times \frac{36}{25}$$

$$4 \cdot 24 + 9 \cdot 4$$

$$\frac{9 \cdot 29}{25}$$

$$\sqrt{29} \cdot \frac{3}{5} \cdot \sqrt{29} = \frac{3}{5} \cdot 29$$

$$\frac{L}{3}$$

$$\frac{9 \cdot 29 - 9 \cdot 25}{25}$$

$$\frac{3}{5} \sqrt{29} \cdot \frac{3}{5} \sqrt{29}$$

$$3$$

$$\frac{9 \cdot 25 + 36}{25}$$

$$15 - 7 \sin \alpha$$

$$25 = 24 \cos^2 2 \alpha$$

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{3 \cdot 29}{29}$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{5} \sin(180^\circ + 2)$$

$$\sqrt{\frac{9 \cdot 4}{25}}$$

$$\frac{3}{5} \sqrt{29} \cdot \frac{5}{5 \sqrt{29}}$$

$$x \sqrt{29}$$

$$\frac{20 \cdot 29}{25}$$

$$\sqrt{29} \quad \frac{3}{5} \sqrt{29} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{29}{2} \cdot \frac{3 \cdot 29}{\sqrt{29}}$$

$$r x = \sqrt{29}$$

$$x = \frac{\sqrt{29}}{5}$$

$$\cos 2 \quad \sin(180^\circ + 2) = \sin(180^\circ + 2)$$

$$\frac{3 \cdot 29}{\sqrt{29}} = \frac{3 \cdot 29 \cdot \sqrt{29}}{29}$$

$$\frac{\sqrt{29}}{5} \cdot \sqrt{29} = \frac{29}{5} \sqrt{29}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}$$

$$x(y-2) - (y-2)(x+1)$$

$$y^2 - 4xy + 4x^2 = xy - 2x - y + 2$$

$$2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0$$

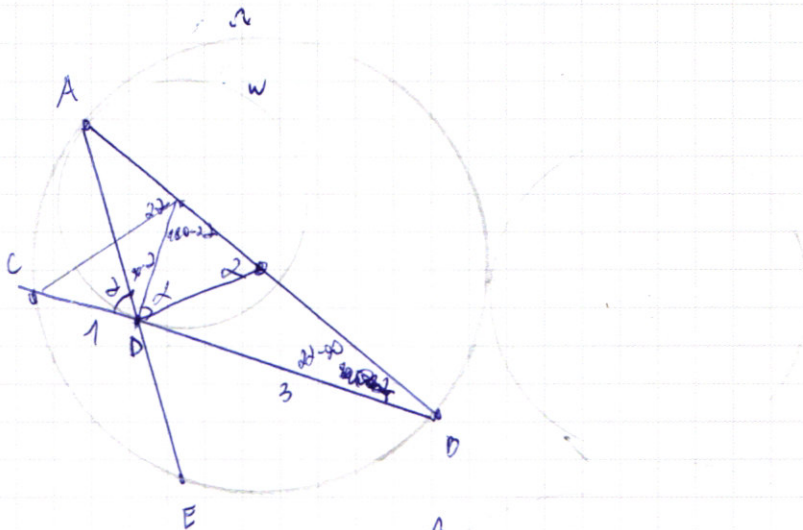
$$2x^2 + 4xy - 4x^2 + 2y - 2x - y + 2 - 4x - 4y + 3 = 0$$

$$0x^2 + 2xy - 0x - 5y + 5 = 0$$

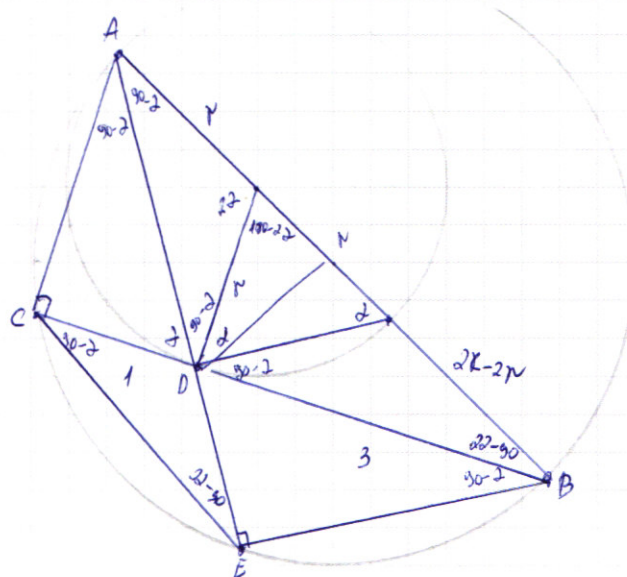
$$0x(x-1) + 5y(y-1) + 5 = 0$$

$$(x-1)(5x+5y) + 5 = 0$$

~~5(x-1)(y-1)~~
~~5x^2~~



$$180^\circ - \alpha + 180^\circ - 2\alpha = 360^\circ -$$



$$\frac{2R - R}{2R} = \frac{3}{4}$$

$$1 - \frac{R}{2R} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{R}{2R} = \frac{1}{4}$$

$$4R = 2R$$

$$R = 2R$$

$$y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}$$

$$y - 2x = \sqrt{(x-1)(y-2)}$$

$$\sqrt{x-1} = a$$

$$2x(2-4) + y(y-4) + 3 = 0$$

$$b^2 + 2 - 2a^2 = ab$$

$$2a^2 - 2 + 2b^2 + 2 =$$

$$(x-1)(2x^2$$

$$-2x > 0$$

$$(2-1)(2x-2)$$

$$2(x-1)^2 + (y-2)^2$$

$$\frac{2x}{x-1} > \frac{y}{y-2}$$

$$y > 2x$$

$$2x^2 - 2x$$

$$2x^2 - 2x - 2x + 2$$

$$2x^2 - 2x + 1$$

$$y > 2x$$

$$2x^2 - 4x +$$

$$(y-2)^2$$

$$2x^2 - 4x + 2 + 2y^2$$

$$2x^2 - 4x + 2 + y^2 - 4y + 4$$

$$2(x-1)^2 + (y-2)^2 - 3 = 0$$

$$y = 3; x = 2$$

$$y^2 - 4xy + 4x^2 = xy - 2x - y + 2$$

$$y^2 - 5xy + 4x^2 + 2x + y - 2 = 0$$

$$(4x + y)(y + x - 2)$$

$$(ax + by + c)(dx + ey + f)$$

$$adx^2 + aeyx + afx + bdx + beyx + by^2 +$$

$$cdx + ce y + cf$$

$$adx^2 + abxy + afx + bdx + beyx + by^2 +$$

$$bcx + ce y + cf$$

$$ad = 4$$

$$ae + bd = -5$$

$$af + cd = 2$$

$$be = 1; b = e = 1$$

$$bf + ce = 1$$

$$cf = -2$$

$$\begin{aligned} cf &= 2 \\ ad &= 4 \\ be &= 1 \\ ae + bd &= -5 \end{aligned}$$

$$ad = 4$$

$$ae + bd = -5$$

$$af + cd = 2$$

$$be = 1$$

$$cf = -2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y - 2x = \sqrt{(x-1)(y-2)}$
 $2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0$
 $y^2 - 4xy + 4x^2 = 2y - 2x - y + 2$
 $2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0$
 $4x + 4y - 2x^2 - 3 - 4xy + 4x^2 =$

$f(1) = 0$
 $f(2) = 1$
 $f(3) = 1$
 $f(4) = 2$
 $f(5) = 2$
 $f(6) = 2$
 $f(7) =$

$f(2 \cdot 2) = 2f(2) = 2$
 $f(2 \cdot 3) = f(2) + f(3)$
 $1 + 1$
 $f(\frac{1}{2} \cdot 2) = f(\frac{1}{2}) + f(2)$
 $0 + f(\frac{1}{2}) = -1$
 $f(d \cdot \frac{1}{d}) = f(d) + f(\frac{1}{d})$
 $>$

$10000 - 4 \cdot 25 \cdot 76$
 $10000 - 7000 = 2400$
 $\frac{10000}{50} = 200$
 $\frac{1}{y} < 1$
 $d > 0$
 $x < y$

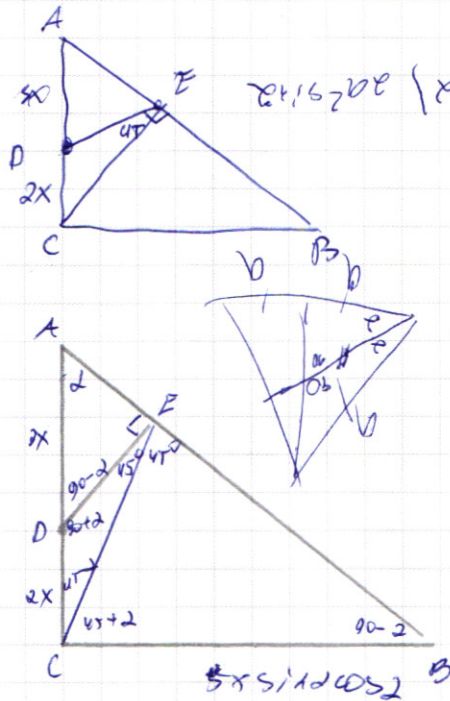
| y | ср. x |
|---|-------|
| 1 | 0 |
| 2 | 1 |
| 3 | 2 |
| 4 | |

$4x + 4y - 2x^2 - 3 - 4xy + 4x^2 = 2y - 2x - y + 2$
 $4x + 4y - 3 - 4xy + 2x^2 = 2y - 2x - y + 2$
 $6x - 2y - 3 - 4xy + 2x^2$
 $0 = f(d) + f(\frac{1}{d})$
 $2d(2d)$

$y^2 - 4xy + 4x^2 = xy - 2x - y + 2$
 $y^2 = 4xy - 4x^2 + xy - 2x - y + 2$
 $y^2 = 5xy - 4x^2 - 2x - y + 2$
 $2x^2 + 5xy - 4x^2 - 2x - y + 2 - 4x - 4y + 3 = 0$
 $-2x^2 + 5xy - 6x - 5y + 5 = 0$
 $2x^2 - 2xy + 6x + 5y - 5 = 0$
 $5y^2 - 100y + 76$
 $27y^2 - 60y + 36 - 40y + 10$

$\frac{0 + 20}{2} = 10$
 $\frac{(1+20) \cdot 20}{2} = 210$
 $x = 5y - 6 \pm \sqrt{25y^2 - 60y + 36 - 4 \cdot 2(5y - 5)}$
 $x = 5y - 6 \pm 0$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$r \cos \alpha = (r \sin \alpha) \cdot \frac{1}{5}$$

$$(2 \sin \alpha)^2 + r^2 - 2 \cos \alpha \cdot r = r^2 + (r \sin \alpha)^2$$

$$(r + 0 \cos \alpha) = r \sin \alpha$$

$$r \cos \alpha - r = (r + 0 \sin \alpha) \cdot \frac{1}{5}$$

$$\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{CB}$$

$$\frac{AE}{3x} = \cos \alpha$$

$$\frac{3x \cos \alpha}{5x} = \frac{3x \sin \alpha}{CB}$$

$$CB =$$

~~$$\frac{3x \sin \alpha}{\cos \alpha} = 3x \sin \alpha \cos \alpha$$~~

$$\frac{1}{\cos \alpha} = \cos \alpha$$

~~$$\frac{3x \sin \alpha}{\cos \alpha}$$~~

$$\frac{DE}{CB} = \frac{AD}{AB}$$

~~$$\cos \alpha = 1$$~~
~~$$\cos \alpha = \pm 1$$~~

$$\frac{DE}{CB} = \frac{3x}{AB}$$

~~$$\cos \alpha$$~~

$$3x \cos \alpha \cdot CB = 3x \sin \alpha \cdot 5x$$

~~$$CB = 5x \sin \alpha$$~~

$$\frac{3x \sin \alpha}{CB} = \frac{3x}{\frac{5x}{\cos \alpha}}$$

$$\frac{5x}{AB} = \cos \alpha$$

$$\frac{3x \sin \alpha \cos \alpha}{CB} = \frac{3}{5}$$

~~$$5x \sin \alpha \cos \alpha$$~~

$$a, aq, aq^2, aq^3$$

$$a \cdot (aq^3)^2 + 2aq \cdot aq^3 + aq^2 = 0$$

$$a^3 q^6 + 2a^2 q^4 + aq^2 = 0$$

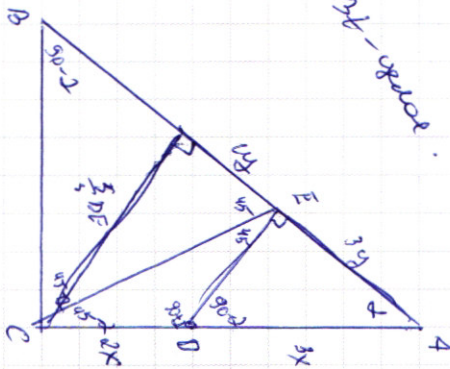
$$aq^2 (a^2 q^4 + 2aq^2 + 1) = 0$$

$$a^2 q^4 + 2aq^2 + 1 = 0$$

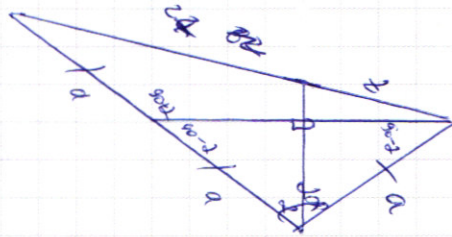
$$(aq^2 + 1)^2 = a^2 q^4 + 2aq^2 + 1$$

$$aq^2 \neq 0$$

$$aq^2 = -1$$



3x - 4x - 5x



delta - ?

$$\frac{BC}{AB} = \frac{3x}{5x}$$

$$\frac{3x}{AB} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{DE}{BC} = \frac{3x}{5x}$$

$$\frac{DE}{3x} = \sin \alpha$$

$$\frac{3}{5} \cdot 3x \sin \alpha = \frac{3x}{2} \sin 2\alpha$$

$$5x = \frac{3x}{2}$$

$$4(1 + \cos 2\alpha) - 2 \cos 2\alpha \cdot 2 \sin 2\alpha = 3 \cdot 2$$

$$4(1 + \cos 2\alpha) - 2 \cos 2\alpha = 3$$

$$2 + 2 \cos 2\alpha = 3$$

$$2 \cos 2\alpha = 1$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1}{2}$$

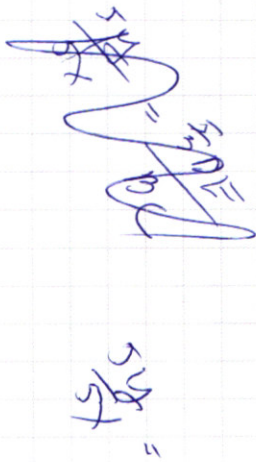
$$2\alpha = 60^\circ$$

$$\alpha = 30^\circ$$

$$1 + 4 - 4 \cos 2\alpha = 3$$

$$4(1 - \cos 2\alpha) = 3$$

$$\frac{5-3}{2}$$



$$\frac{5 \sin \delta}{5x} =$$

$$\frac{DE \cdot AB}{2} + BC \cdot x = \frac{3}{2} DE$$

$$\frac{5x \cdot DE}{2} + 3x \cdot x = \frac{3}{2} DE$$

$$\frac{5}{2} DE \cdot AB = \frac{3x}{2} \cdot BC$$

$$\frac{3}{2} DE \cdot AB = \frac{3x}{2} \cdot AB \cdot \sin 2\alpha$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a \quad b \quad c$

$\theta \quad a \quad aq \quad aq^2$

$$\frac{2b \pm \sqrt{4b^2 - 4ac}}{2a} = aq^3$$

$$\frac{-2b \pm \sqrt{4b^2 - 4ac}}{2a} = aq^3$$

$$b \pm \sqrt{b^2 - ac} = a^2 q^3$$

$$b^2 - ac =$$

$$a(aq^3)^2 + 2aq(aq^3) + aq^2 = 0$$

$$a(a^2 q^6) + 2a^2 q^5 + aq^2 = 0$$

$$a^3 q^6 + 2a^2 q^5 + aq^2 = 0$$

$$aq^2(a^2 q^4 + 2aq^3 + 1) = 0$$

$$q \neq 0, a \neq 0.$$

$$a(a^2 q^4 + 2aq^3 + 1) = 0$$

$$a^2 q^4 + 2aq^3 + 1 = 0$$

$$(a+q)^2 = a^2 + 2aq + q^2$$

$$(a+q^2)^2 = aq^3$$

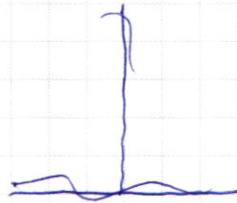
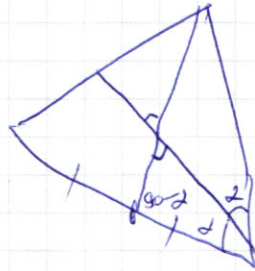
$$a = b = 1$$

$$f(1) = f(1) + f(1) \quad 4a^2 + a^2 - 2\cos 2 \cdot 2a^2 = b^2$$

$$f(1) = 2f(1) \Rightarrow 7a^2 - 2\cos 2 \cdot 2a^2$$

$$f(1) = 0, \quad a^2(5 - 2\cos 2) = b^2$$

$$(\sqrt{5 - 2\cos 2})(\sqrt{5 + 2\cos 2})$$



$$a=2, b=2$$

$$f(2) = f(2) + f(1)$$

$$f(4) = f(2) + f(2)$$

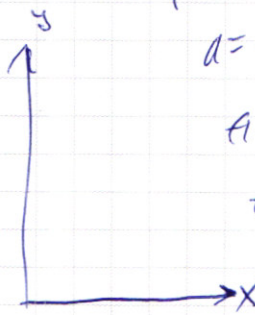
$$f(4) = 2f(2)$$

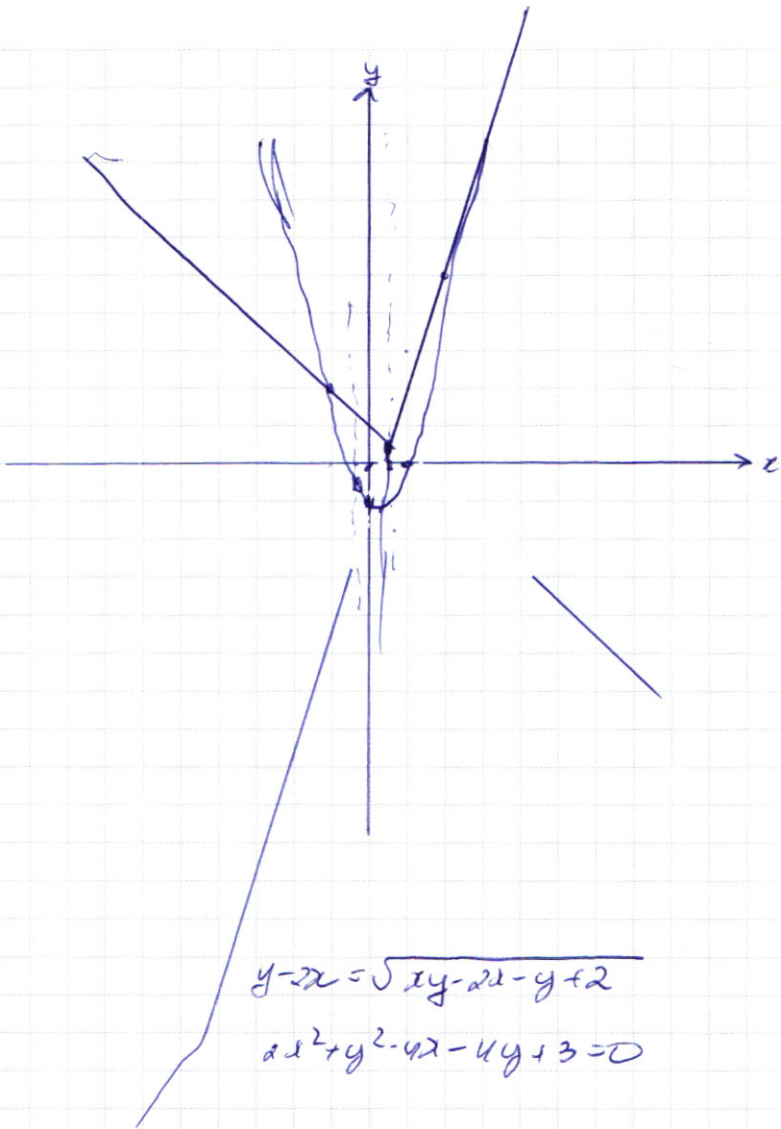
$$f(4) = 2f(2)$$



$$(1 - 2\cos 2)^2$$

$$5 - 4\cos 2 = c^2$$





$$y - 2x = \sqrt{x(y-2) - y + 2}$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0$$

$$2 \cdot 4 - 2 - 1 = 5$$

$$2 \cdot 1 + 1 - 1$$

$$4x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1}{4}$$

$$2 \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{4} - 1$$

$$\frac{1}{8} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{8} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8} = -\frac{1}{8} - \frac{1}{8} = -\frac{1}{4}$$

$$x + 1(2x - 1)$$

$$x \geq \frac{1}{2} \quad 3x - 1$$

$$x \geq \frac{1}{2} \quad x + 1 - 2x$$

$$y(x-1) - 2x + 2$$

$$y(x-1) - 2(x-1)$$

$$y - 2x = \sqrt{(x-1)(y-2)}$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0$$

$$y^2 - 4xy + 4x^2 = xy - 2x - y + 2$$

$$y^2 - 5xy + 4x^2 = -2x + y + 2$$

$$2x(x-2) + y(y-4) + 3 = 0$$

