



# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

## ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

### 10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР \_\_\_\_\_

Заполняется ответственным секретарём

- ✓ 1. [2 балла] Числа  $a, b, c$  являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа  $a, b, c$  не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения  $ax^2 - 2bx + c = 0$ . Найдите третий член прогрессии.
- ✓ 2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.
- ✓ 3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

- ✓ 4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике  $ABC$  на катете  $AC$  и гипотенузе  $AB$  отмечены точки  $D$  и  $E$  соответственно, такие что  $AD : AC = 1 : 3$  и  $DE \perp AB$ . Найдите тангенс угла  $BAC$ , если известно, что  $\angle CED = 30^\circ$ .
- б) Пусть дополнительно известно, что  $AC = \sqrt{7}$ . Найдите площадь треугольника  $CED$ .
- ✓ 5. [5 баллов] Окружности  $\Omega$  и  $\omega$  касаются в точке  $A$  внутренним образом. Отрезок  $AB$  – диаметр большей окружности  $\Omega$ , а хорда  $BC$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $D$ . Луч  $AD$  повторно пересекает  $\Omega$  в точке  $E$ . Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника  $BACE$ , если известно, что  $CD = 2, BD = 3$ .
- ✓ 6. [5 баллов] Найдите все пары чисел  $(a; b)$  такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leq ax + b \leq -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех  $x$  на промежутке  $[-\frac{1}{2}; 1]$ .

- ✓ 7. [5 баллов] Функция  $f$  определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел  $a$  и  $b$  из этого множества выполнено равенство  $f(ab) = f(a) + f(b)$ , и при этом  $f(p) = [p/2]$  для любого простого числа  $p$  ( $[x]$  обозначает наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ ). Найдите количество пар натуральных чисел  $(x; y)$  таких, что  $2 \leq x \leq 22, 2 \leq y \leq 22$  и  $f(x/y) < 0$ .







$a; 2a; 900-3a$  — макс. число — либо  $2a$ , либо  $900-3a$ .

$$2a < a + 900 - 3a = 900 - 2a$$

$$4a < 900$$

$$a < \frac{900}{4} = \frac{450}{2} = 225$$

пер-ва  $\Delta$  для 2 базис. макс. сторон

$$900 - 3a < a + 2a$$

$$6a > 900$$

$$a > \frac{900}{6} = 150$$

$$225 > a > 150$$

и

$$a \in [150; 225] \Rightarrow \text{есть } 225 - 150 + 1 = 225 - 150 = 74 \text{ варианта}$$

знач.  $a$ . заметим, что подойдет только такое, никакие

2 знач.  $a$  не дадут одинак. 3-ки сторон (т.к.

не  $\exists$  тр-ка со сторонами  $k; 2k; 4k$  (пер-во  $\Delta$ ))

$\Rightarrow$  Ответ: 74.

№3

$$x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} = \sqrt{(x-6)(y-1)} \Rightarrow (x-6)(y-1) \geq 0; x \geq 6y$$

$$x^2 + 36y^2 - 12xy = xy - 6y - x + 6$$

$y=1$  и  $x=6$   
в 0  $\Delta$  3 подходят

$$(4y - x + 2)(9y - x - 3) = 0$$

$$x = \begin{cases} 4y + 2 \\ 9y - 3 \end{cases}$$

$$x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0$$

$$(x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18$$

$$1) x = 4y + 2$$

$$x \geq 6y \Rightarrow 2 \geq 2y \Rightarrow y \leq 1$$

$$\Rightarrow (x-6)(y-1) = \begin{cases} 0 \\ > 0 \end{cases}$$

$$x - 6 < 0$$

$$4y + 2 - 6 < 0$$

$$4y - 4 < 0$$

$$y < 1 \checkmark$$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18; \quad x = 4y + 2$$

$$\cancel{x} (4y-4)^2 + 2(y-1)^2 = 18$$

$$(y-1)^2 (2+16) = 18$$

$$(y-1)^2 = 1 \Rightarrow |y-1| = 1 \Rightarrow y = \begin{cases} 2 \Rightarrow x = 2 \\ 0 \Rightarrow x = 10 \end{cases} \text{ - не подходит в ОДЗ случая}$$

$$2) \quad x = 9y - 3 \quad x \geq 6y: \quad 9y - 3 \geq 6y \quad 3y \geq 3 \quad y \geq 1 \Rightarrow x - 6y \geq 0$$

$$9y - 3 - 6y \geq 0 \text{ - верно.}$$

$$(9y-3-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18$$

$$(y-1)^2 (81+2) = 18$$

$$(y-1)^2 = \frac{18}{83} \Rightarrow |y-1| = \sqrt{\frac{18}{83}} = 3\sqrt{\frac{2}{83}} \Rightarrow y = 1 \pm \sqrt{\frac{2}{83}}$$

если -, то  $y < 1$ .

$$y = 1 + 3\sqrt{\frac{2}{83}} \Rightarrow x = 6 + 81\sqrt{\frac{2}{83}}$$

Пока ответы: ~~x=2~~;  $x=2; y=0$ ;  $x=6+81\sqrt{\frac{2}{83}}; y=1+3\sqrt{\frac{2}{83}}$

ещё случаи:  $x=6$  и  $y=1$

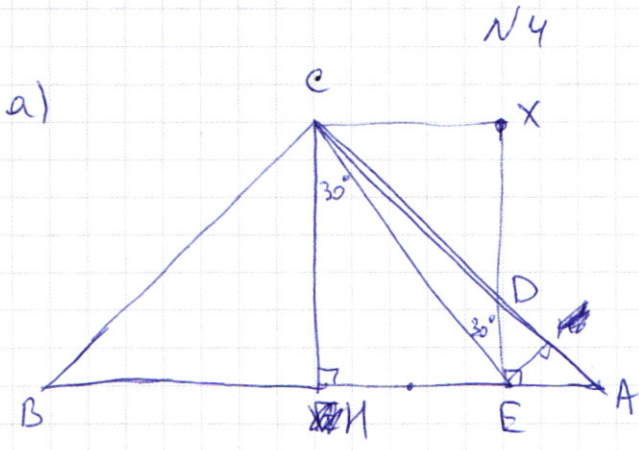
$$x=6: \quad x-6y = \sqrt{0} = 0 \Rightarrow x=6y=6 \Rightarrow y=1$$

$$(x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18 \text{ - не верно.}$$

$$y=1: \quad x-6y = \sqrt{0} = 0 \Rightarrow x=6y=6 \Rightarrow x=6, \text{ это все.}$$

Ответ: (остался тот же)  $x=2; y=0$ ;  $x=6+81\sqrt{\frac{2}{83}}; y=1+3\sqrt{\frac{2}{83}}$





] H - высота из C на AB;  
 X - ч.ая верши. прямые - на CKEK  
 тогда  $\triangle CHA \cong \triangle DEA$   
 $\leftarrow$   
 $CH = 3DE$ ;  
 $CH \parallel DE \Rightarrow \angle HCE = 30^\circ \Rightarrow$

$$\Rightarrow HE = \frac{CH}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3} AH \Rightarrow AH = \frac{CH \cdot 3}{\sqrt{3} \cdot 2} = \frac{\sqrt{3}}{2} CH;$$

$\angle HCA = 180^\circ - \angle BAC - 90^\circ = \angle CBA \Rightarrow \triangle AHC \sim \triangle ACB$

$$\tan(\angle BAC) = \frac{BC}{CA} = \frac{HC}{AH} = \frac{HC}{\frac{\sqrt{3}}{2} HC} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

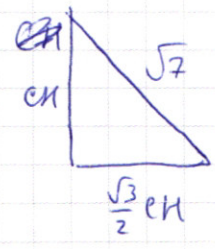
Ответ:  $\tan(\angle BAC) = \frac{2}{\sqrt{3}}$

д) считаем известным все, что узнали в а)

~~$S(CED) = S(CHA) - S(AHE) = S(AED) = S(\dots)$~~

$$S(CED) = \frac{CD \cdot EH'}{2} = \frac{AC \cdot \frac{2}{3} \cdot EH'}{2}$$

$$EH' = \frac{S(CED)}{\frac{2}{3} AC} = \frac{CH \cdot ED}{2} = \frac{\frac{2}{3} HA \cdot \frac{1}{3} CH}{2} = \frac{1}{9} HA \cdot CH = (*)$$



$$CH^2 + \frac{3}{4} CH^2 = 7 \text{ - Т. пиф. } \triangle CHA$$

$$CH^2 \left(\frac{7}{4}\right) = 7$$

$$\frac{CH^2}{4} = 1 \Rightarrow CH = 2$$

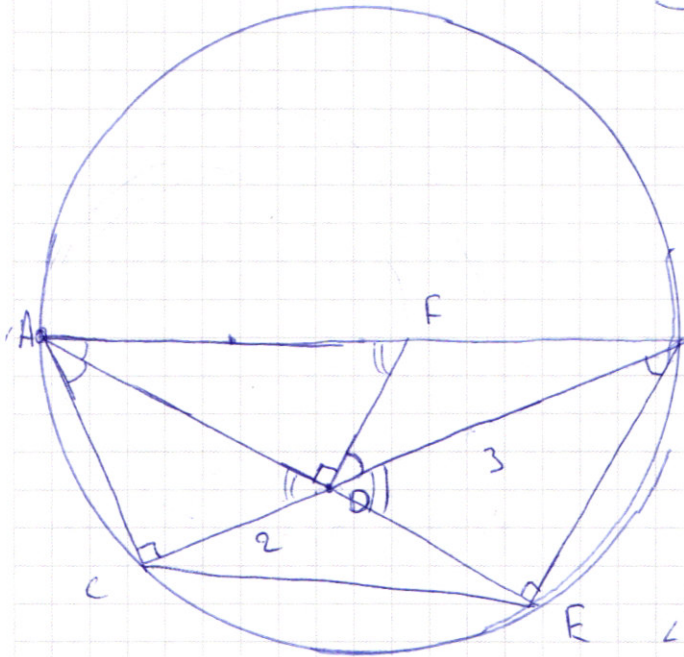
$$(*) = \frac{1}{9} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

Ответ:  $S(CED) = \frac{2\sqrt{3}}{9}$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5



~~т.к. AB - диаметр~~

$$\} F = AB \cap \omega \Rightarrow$$

$\angle FAD = \angle FDB$  ( $\angle BDB$  - кас.  
к опис. окр-ти  $\triangle ADF$ )

$\angle ADF = 90^\circ$  т.к. диаметр  
кас.  $\Rightarrow$  не пересекаются на прямой  
(точкой A) кас.  $\Rightarrow$

$\Rightarrow AF$  - диаметр  $\omega$

$$\angle ADC = 90^\circ - \angle FDB = 90^\circ - \angle FAD$$

$$90^\circ - \angle CAD \Rightarrow \angle CAD = \angle FAD \Rightarrow AD - \text{высота } \triangle ABC$$

как известно  $\frac{AC}{AB} = \frac{CD}{DB} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{2}{3}$  и  $BC = 5$

Т. пирамиды  $\triangle ABC$ :

$$AC^2 + \frac{3}{4} BC^2 = \frac{9}{4} AC^2$$

$$\frac{5}{4} AC^2 = 25$$

$$AC^2 = \frac{25 \cdot 4}{5} = 20 \Rightarrow AC = 2\sqrt{5} \Rightarrow AB = 2 \cdot (\text{радиус } \omega) = \frac{3}{2} \cdot 2\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$$

$\Rightarrow$  радиус  $\omega = \frac{3\sqrt{5}}{2}$   
т.к.  $\triangle APC$ :

$$AD = \sqrt{4 + 20} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6} \quad \triangle APC \sim \triangle ACD \sim \triangle ADF \text{ по углам} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AD}{AF} \Rightarrow AF = \frac{AD^2}{AC} = \frac{24}{2\sqrt{5}} = \frac{12}{\sqrt{5}} \Rightarrow \text{радиус } \omega = \frac{12}{2\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$$

$$S(ABEC) = \frac{1}{2} AE \cdot BC \cdot \sin \angle ADC; \sin \angle ADC = \frac{AC}{AD} = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$$

$$S(ABEC) = \frac{1}{2} \cdot (2\sqrt{6} + \sqrt{\frac{3}{2}}) \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = 5\sqrt{5} \left(1 + \sqrt{\frac{3}{2 \cdot 4}}\right) = 5\sqrt{5} \left(1 + \frac{1}{4}\right) = \frac{25\sqrt{5}}{4}$$

Ответ:  $\frac{3\sqrt{5}}{2}; \frac{6}{\sqrt{5}}; \frac{25\sqrt{5}}{4}$



$$f(ab) = f(a) + f(b)$$

$x = \prod_{i=1}^k p_i^{d_i}$ ;  $y = \prod_{i=1}^k q_i^{b_i}$  - разложение на простые множители

~~мысль  $f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y)$~~   
мысль:

$$f(x) = f(\frac{x}{y} \cdot y) = f(\frac{x}{y}) + f(y) \Rightarrow f(x/y) = f(x) - f(y)$$

$y \neq 0$

$$f(x) = f(a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n) = f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n) \text{ - ореб.}$$

$$f(x) = \sum_{i=1}^k d_i \cdot f(p_i) = \sum_{i=1}^k d_i \cdot \left[ \frac{p_i}{2} \right]$$



$$f(\frac{x}{y}) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(y)$$

| x  | f(x) |
|----|------|
| 2  | 1.0  |
| 3  | 1.0  |
| 4  | 2.0  |
| 5  | 2.0  |
| 6  | 2.0  |
| 7  | 3.0  |
| 8  | 3.0  |
| 9  | 2.0  |
| 10 | 3.0  |
| 11 | 5.0  |
| 12 | 3.0  |
| 13 | 6.0  |
| 14 | 4.0  |
| 15 | 3.0  |
| 16 | 4.0  |
| 17 | 8.0  |
| 18 | 3.0  |
| 19 | 9.0  |
| 20 | 4.0  |
| 21 | 4.0  |
| 22 | 6.0  |

$$\text{// } f(2) = \left[ \frac{2}{2} \right] = 1; f(3) = 1; f(5) = 2; f(7) = 3;$$

$$f(11) = 5; f(13) = 6; f(17) = 8; f(19) = 9;$$

~~f(3) не важно~~

для любых  $x, y: f(x) \neq f(y) \exists!$

порядок  $(\frac{x}{y}$  или  $\frac{y}{x})$  не важен.

$$f(x/y) \cdot (\text{или } f(y/x)) > 0; \text{ всего пар } \frac{21 \cdot 20}{2} = 210$$

попарно:

$$f(x)=1 \quad f(x)=2 \quad f(x)=3 \quad f(x)=4 \quad f(x)=5 \quad f(x)=6 \quad f(x)=7 \quad f(x)=8 \quad f(x)=9$$

$$1 + \frac{4 \cdot 3}{2} + \frac{6 \cdot 5}{2} + \frac{4 \cdot 3}{2} + 0 + 0 + 0$$

$$6 \quad 15 \quad 6$$

$$+ f(x)=6 + 1 = 1 + 6 + 15 + 6 + 1 = 29$$

// может это закономерность?

$$\Rightarrow \text{пор } x, y: f(x) \neq f(y) = 210 - 29 = 181 \text{ штук}$$

$$\Rightarrow \exists 181 \text{ число вида } \frac{x}{y} \text{ подх. усл. мн.}$$

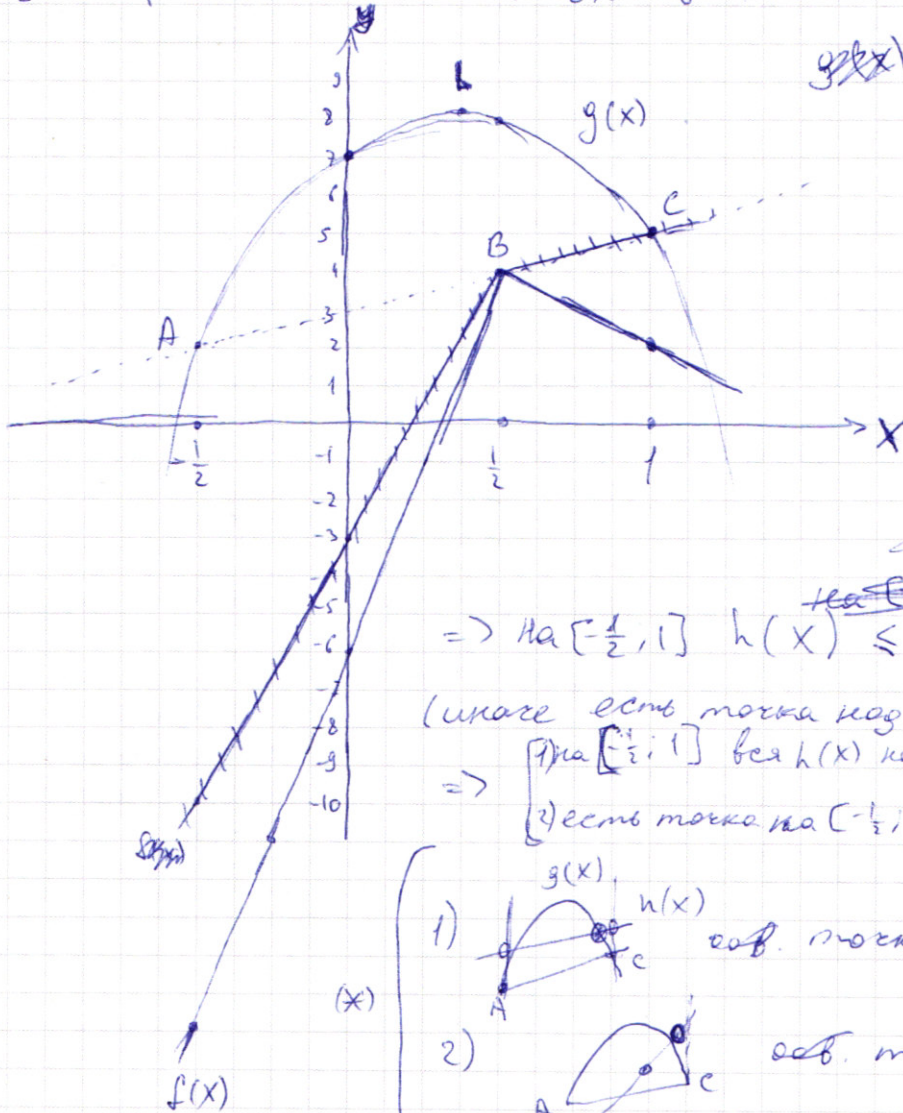
Ответ: 181



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(x) = 2x - 6$   $h(x) = 2ax + b$   $N \neq 6$   $g(x) = -8x^2 + 6x + 7$

(есть еще 8 стр. с 6 зог)



все точки кривых на графике (-) - подставленные значения

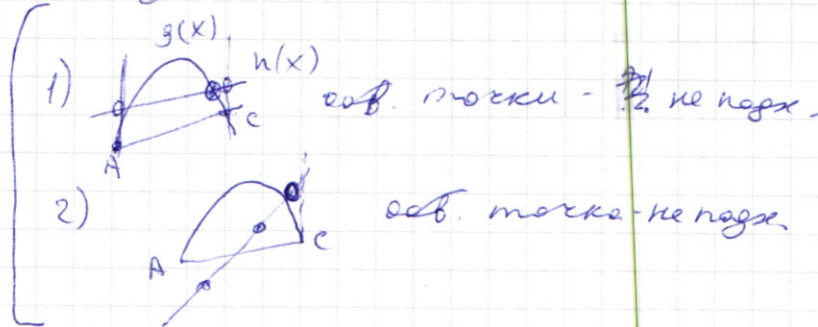
$g(x) > h(x)$  на  $[-\frac{1}{2}; 1]$   
 $h(-\frac{1}{2}) < g(-\frac{1}{2})$   
 $h(1) < g(1) \Rightarrow$

~~h под прямой AC~~  
~~на  $[-\frac{1}{2}; 1]$~~   
 $h$  под прямой AC  
 $AC$

$\Rightarrow$  на  $[-\frac{1}{2}; 1]$   $h(x) \leq 3 + 2x$  - ур-е прямой AC

(укаже есть точка под пр. AC  $\Rightarrow$ )

- $\Rightarrow$  1) на  $[-\frac{1}{2}; 1]$  вся  $h(x)$  над AC.
- $\Rightarrow$  2) есть точка на  $[-\frac{1}{2}; 1]$ :  $h(x)$  ниже AC



ко при этом  $h(x) \geq f(x) \Rightarrow h(\frac{1}{2}) \geq 4$ ; точка  $(\frac{1}{2}; 4)$  - на прямой AC  
 $\Rightarrow h(\frac{1}{2}) = 4 \Rightarrow h$  - прямая AC (если  $h$  выше  $g$ )

(если  $h$  больше или меньше  $g$  коэф. при ст. члене ур-ия прямой AC  $(= 2) \Rightarrow$  будет точка над AC,?!)

$\Rightarrow h = 2x + 3 = ax + b \Rightarrow$  Ответ:  $a = 2, b = 3$



а теперь поясним что это (\*) значило (а потом и это (\*\*))  
 (\*):

1) график  $h(x)$  лежит выше прямой  $AC$  на  $[-\frac{1}{2}; 1]$

~~$\exists a \in [-\frac{1}{2}; 1] : h(a) = g(a)$  по непрерывности  $h(x) > g(x)$  в концах интервала~~

значения  $h(x) >$  значения  $g(x)$ , ?!

2) график  $h(x) \cap AC$ , т.к.  $h(x)$  - прямая  $\Rightarrow$  либо  $b = \frac{1}{2}$ ; либо

$b \neq \frac{1}{2}$  и не равен  $AC$   
 $\forall x \quad h(x) > g(x)$ , ?!

а теперь (\*\*\*) - аналогично, просто известно, что  $B$  - точка

пересечения  $\Rightarrow$  ни 1), ни 2) не верн.  $\Rightarrow$  график  $h(x) = AC$ ,  $\square$ .

//  $h(x) = 2x + 3$  - прям. т.к. на интервале  $[-\frac{1}{2}; 1] \leq g(x)$  - (см. 2 (1))

перес. в концах, больше быть не может  $\Rightarrow$  на  $[-\frac{1}{2}; 1]$

$h(x) \geq g(x)$ ;  $h(x) \geq f(x)$  т.к.  $f(x)$  график  $f(x)$  -

2 луча, вых. из  $B$  на соотв. интервалах  $h(x)$  ~~больше~~  $\Rightarrow$  каская  
 прямая.

Теперь про картинку:  $f(x) = \begin{cases} x > \frac{1}{2} & f(x) = 6 - 4x \\ x < \frac{1}{2} & f(x) = -6 + 20x \end{cases}$  это, как не трудно видеть, соответствует графику  $f(x)$

$g(x)$  - ~~еще раз~~ тем более понятно.

еще раз Ответ:  $a = 2$ ;  $b = 3$

### ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$ac = b^2$$

$$bd = c^2$$

$$d = \frac{2b \pm \sqrt{4b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} = \frac{b}{a}$$

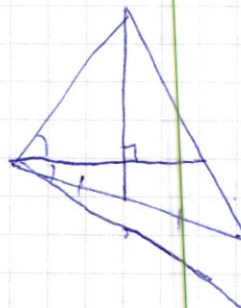
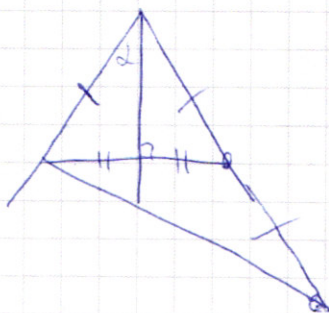
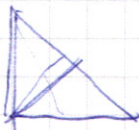
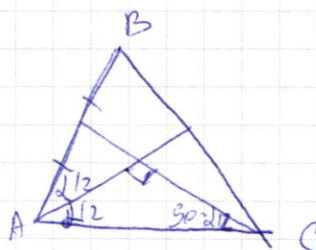
$$a, ar, ar^2, ar^3$$

$$a, ar, ar^2, P$$

$$ar^3 =$$

$$P = ar^3$$

$$ar^2 = 1$$



$$\sqrt{x-6y} = \sqrt{xy-6y-x+6}$$

$$x-6y \geq 0$$

$$\underline{\underline{x \geq 6y}}$$

$$y(x-6) - (x-6) =$$

$$\underline{\underline{=(y-1)(x-6) \geq 0}}$$



$$x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0$$

$$(x-6)^2 + 2(y-1)^2 = x^2 - 12x + 36 + 2y^2 - 4y + 2$$

-18 = 20                      -11 + 38

45107  
225

$$\begin{array}{r} 22 \\ -15 \\ \hline 7 \\ 12-5 \\ \hline 7 \\ 224 + \\ -150 \\ \hline 74 \end{array}$$

$$x^2 + 36y^2 - 12xy = xy - 6y - x + 6$$

$$x^2 + 36y^2 - 13xy + 6y + x + 6 = 0$$

$$(6y \mp x + \dots)(6y \mp x + \dots)$$

$$x(x - 6y + 1) + 6y(6y - x + 1)$$

$$x^2 + 36y^2 - 12xy = xy - 6y - x + 6$$

$$x^2 + 36y^2 - 13xy + 6y + x - 6 = 0$$

$$x(x - 6y + 1) + 6y(6y - x + 1) + xy$$

$$x = 6y + 1$$

$$36x^2 + 12y + 1 + 36y^2 - 136y^2$$

$\begin{array}{r} 13 \\ \times 13 \\ \hline 3 \end{array}$

$$x^2 + 36y^2 \quad x = ky$$

$$k^2 + 36 - 13k = 0$$

$$k^2 - 13k + 36 = 0$$

$$k = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 4 \cdot 36}}{2}$$

$$\frac{13 \pm 5}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

$$x = 4y + 9$$

$$(4y + 9)^2$$

$$l^2 + l - 6 = 0$$

$$-1 + 5 = 4$$

$$l = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2}$$

$$4y + 2$$

$$(4y - x + 2)(9y - x - 3)$$

$$-12y + 18y + 60$$

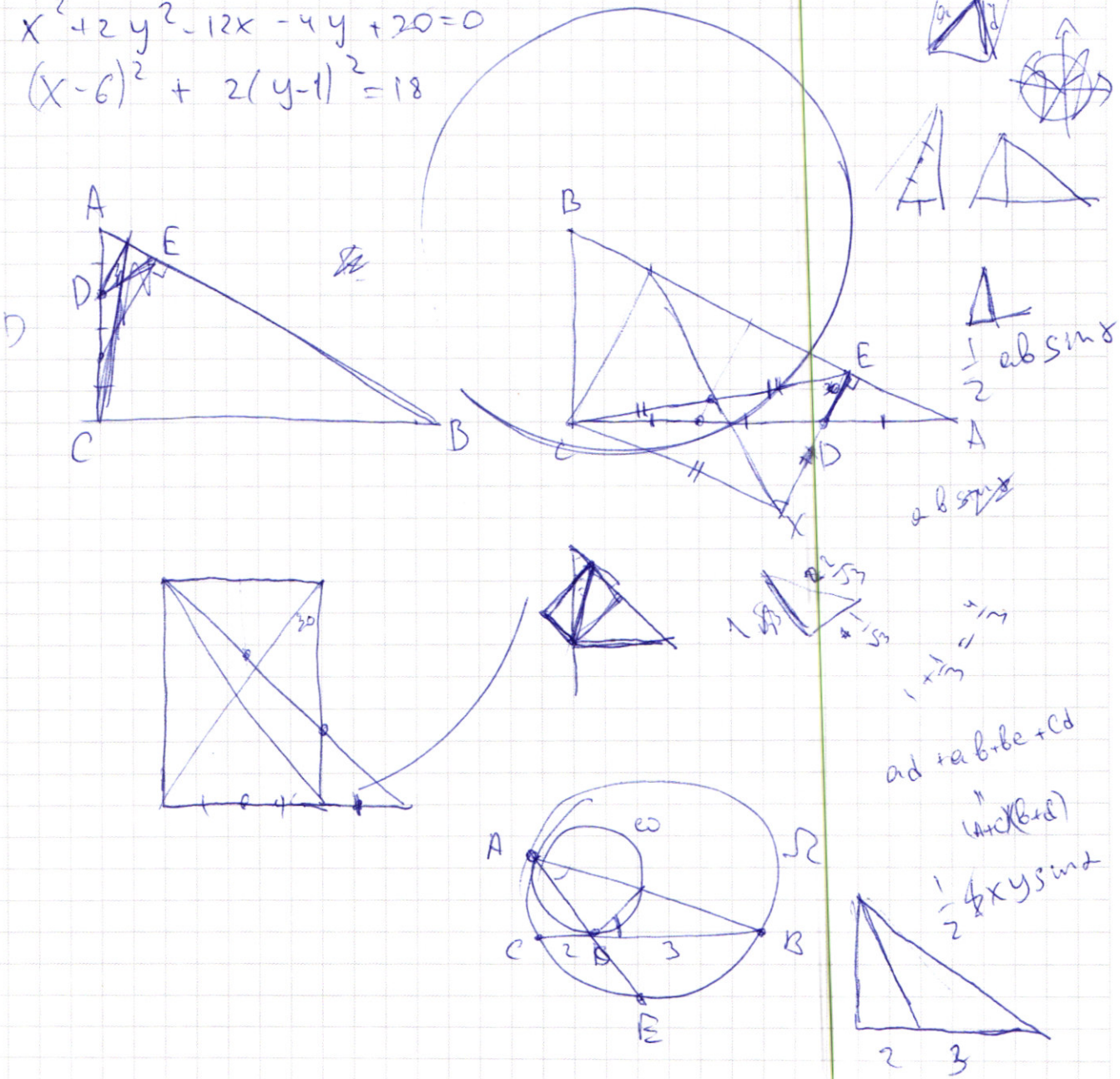
### ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$xy(4y - x + 2)(9y - x - 3) = 0 \quad x \geq 6y \quad (y-1)(x-6) \geq 0$$

~~$$(x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18$$~~

$$x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0$$

$$(x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18$$





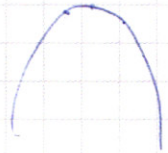
$$8x - 6 \mid 2x - 1 \leq ax + b \leq -8x^2 + 6x + 7$$

$$-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 7 \cdot 8}$$

$$8x + 12x = 14x$$

$$\begin{array}{r} 8 - 6 \\ 2x \\ -8 + 6 + 7 \\ -x \\ \hline 5 \end{array}$$

$$-2 + 3 + 7$$



$$8x^2$$

$$-6 \cdot 1$$

$$-2 - 3 + 7$$

$$2$$

$$\frac{46}{16} = \frac{23}{8}$$

$$\begin{array}{r} 290 \\ -109 \\ \hline 181 \end{array}$$

8

$$14 + 15 \\ \hline 29$$