МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9 ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1 Послед. $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$a = a_1$

$b = a_1 q = aq$

$c = a_1 q^2 = aq^2$

$ax^2 + 2bx + c = 0$

$ax^2 + 2aqx + aq^2 = 0$

$a = 0$ или $a \neq 0$

$c = aq^2 = 0$

$x \in \mathbb{R}$

$x^2 + 2qx + q^2 = 0$

Если четвёртый член послед. удовл. равенству, то при $x = aq^3$:

$a^2q^6 + 2aq^4 + q^2 = 0$

$q = 0$ или $q \neq 0$

$c = aq^2 = 0$

$a^2q^4 + 2aq^2 + 1 = 0$

$(aq^2+1)^2 = 0$

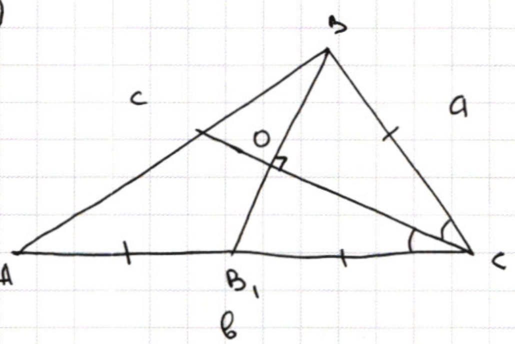
$(c+1)^2 = 0$

$c = -1$

Т.к. для геом. послед. верно, что $a_1 \neq 0$ и $q \neq 0$, тогда $c = -1$

$\boxed{\text{Ответ: } c = -1}$

②



Т.к. $CO \perp BB_1$ и ~~...~~ CO- бисс. $\angle B_1CB$, то в $\triangle B_1CB$ CO - бисс. и высота, тогда $\triangle B_1CB$ - равноб. по призн., $B_1C = BC$

Обозначим $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Верно из доказанного, что $b = 2a$ (BB_1 - мед., $AB_1 = B_1C = BC$)

$$P = a + b + c = 3a + c$$

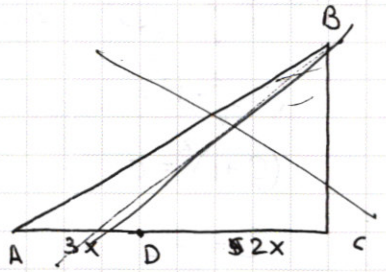
$$a = \frac{P - c}{3}$$

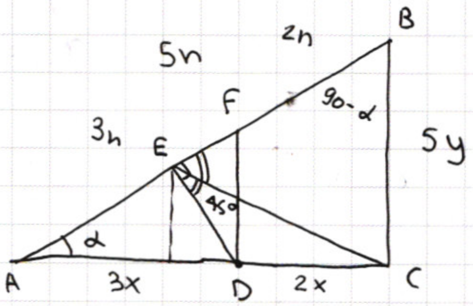
Надо найти все числа от 1 до 1199 (мы не берём 0, т.к. тогда длина стор. 0, и 1200, т.к. тогда длина **c** 0), кот. кратны 3, т.к. стор. должны быть целочисл.

Таких чисел: $\frac{1200}{3} - 1 = 399$, тогда, т.к. каждое число задаёт единств. конфиг. треуг. $(a, 2a, 1200 - 3a)$, то всего треуг. 399

$\boxed{\text{Ответ: } 399}$

④





1. Провед. $FD \perp AC$, тогда $\triangle AFD \sim \triangle ABC$ по 2 угл. (пр. и $\angle A$ общ.), тогда:

$$\frac{AF}{AB} = \frac{AD}{AC} = \frac{3}{5} = \frac{AF}{5n} \Rightarrow AF = 3n$$

2. В ~~пр~~ $\triangle AED$:

$$\frac{AE}{AD} = \cos\alpha = \frac{5x}{5n} \Rightarrow AE = 3x\,\frac{x}{n}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$EF = AF - AE = 3n - 3x\frac{x}{n} = 3\frac{n^2-x^2}{n} = 3\frac{y^2}{n}$

По теор. синусов для $\triangle EBC$:

$$\frac{BC}{\sin(90°-45°)} = \frac{EB}{\sin(180-(90-\alpha)-45°)}$$

$BC = 5y$

$EB = EF + FB = 3\frac{y^2}{n} + 2n$

$\sin(180-(90-\alpha)-45) = \sin(45+\alpha) = \sin 45° \cos\alpha + \cos 45° \sin\alpha = \frac{\sqrt2}{2}(\cos\alpha + \sin\alpha) =$

$= \frac{\sqrt2}{2}\left(\frac{x}{n} + \frac{y}{n}\right)$

$$\frac{5y}{\frac{\sqrt2}{2}} = \frac{3\frac{y^2}{n} + 2n}{\frac{\sqrt2}{2}\left(\frac{x}{n}+\frac{y}{n}\right)}$$

$5y\left(\frac{x}{n}+\frac{y}{n}\right) = 3\frac{y^2}{n} + 2n$

$5\frac{xy}{n} + 2\frac{y^2}{n} = 2n$

$5xy + 2y^2 = 2n^2 = 2(x^2+y^2)$

$\cancel{tg\alpha = \frac{y}{x}}$

$5xy + \cancel{2y^2} = 2x^2 + \cancel{2y^2}$

$5y = 2x \Rightarrow y = \frac{2}{5}x$

$tg\alpha = \frac{y}{x} = \frac{2}{5}$

б) $5x = \sqrt{29} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{29}}{5}$

$5y = 5\cdot\frac{2}{5}x = 2x = \frac{2}{5}\sqrt{29} \Rightarrow y = \frac{2}{25}\sqrt{29}$

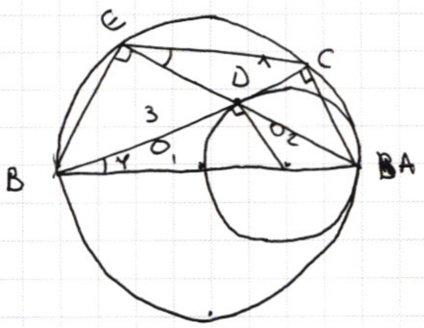
Высота в $\triangle AED$: $h = AE\sin\alpha = 3x\frac{x}{n}\cdot\frac{y}{n} = \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = \frac{6\sqrt{29}}{29}$

Высоты в $\triangle AED$ и $\triangle CED$ из т. E совпад., тогда площадь:

$S_{CED} = \frac{1}{2} h \cdot DC = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot h = xh = 2 \cdot \frac{\sqrt{29}}{5} \cdot \frac{6\sqrt{29}}{29} = \frac{12}{5} = 2{,}4$

Ответ: а) $tg\alpha = \frac{2}{5}$, б) $S_{CED} = 2{,}4$

(5)



1. Т.к. $\angle BCA$ опир. на диам. Ω, то $\angle BCA = 90°$
   Т.к. BD - кас. к ω, то $\angle BDO_2 = 90°$

2. Для $\triangle BDO_2$ и $\triangle BCA$:

$\cos\varphi = \frac{3}{BO_2} = \frac{4}{BO_2 + r}$

$BO_2 = 2R - r$

$3(2R - r) + 3r = 4(2R - r)$

$3r = 2R - r$

$2R = 4r \Rightarrow R = 2r$, тогда O_1 лежит на ω $(R = 2r = d)$

3. Для $\triangle BDO_2$:

$(3r)^2 = r^2 + 9 = 9r^2$

$8r^2 = 9 \Rightarrow r = \frac{3}{2\sqrt{2}}$, $R = 2r = \frac{6}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$

4. По св. пересек. хорд (для BC и AE):

$BD \cdot DC = AD \cdot DE \Rightarrow \frac{BD}{AD} = \frac{DE}{DC}$

Тогда $\triangle BED \sim \triangle ACD$ по углу и 2 стор., $\triangle EDC \sim \triangle BDA$ по углу и 2 см.

5. $CA = AB\sin\varphi = AB \cdot \frac{DO_2}{BO_2} = 4r \cdot \frac{r}{3r} = \frac{4}{3} r = \frac{2}{\sqrt{2}}$

$AD = \sqrt{CD^2 + CA^2} = \sqrt{1 + \frac{4}{2}} = \sqrt{3}$

$ED = \frac{BD \cdot DC}{AD} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$BE = \sqrt{BD^2 - ED^2} = \sqrt{9-3} = \sqrt{6}$

$\frac{EC}{AB} = \frac{ED}{BD} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$EC = \frac{\sqrt{3}}{3} AB = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{6}{\sqrt{2}} = \sqrt{6}$

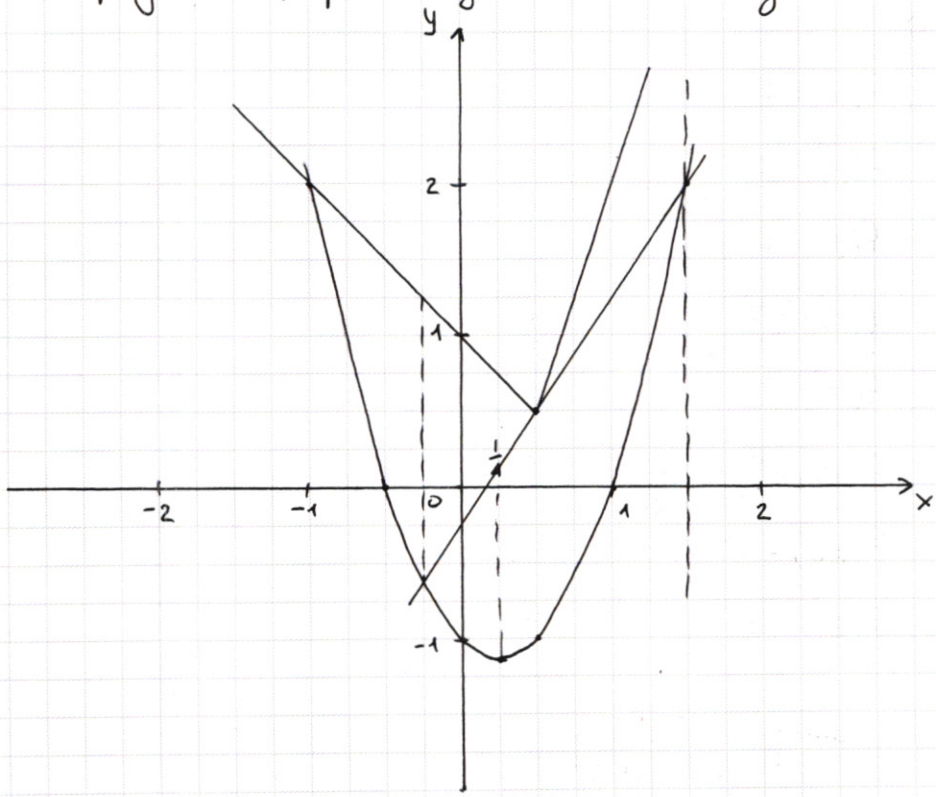
Тогда $S_{EBAC} = S_{CEB} + S_{CAB} = \frac{BE \cdot EC \cdot BC}{4 \cdot R} + \frac{BC \cdot CA \cdot BA}{4R} = \frac{BC}{4R}(BE \cdot EC + BA \cdot CA) =$

$= \frac{\sqrt{2}}{3}(6+6) = 4\sqrt{2}$

Ответ: $r = \frac{3}{2\sqrt{2}}$, $R = \frac{3}{\sqrt{2}}$, $S_{EBAC} = 4\sqrt{2}$

(6) $2x^2 - x - 1 \le ax + b \le x + |2x-1|$

Нарисуем 2 графика: $y = 2x^2 - x - 1$ и $y = x + |2x-1|$



$ax+b$ – лин. функция, необход., чтобы на промежутке $[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}]$ она лежала между графиками функций

Такое возможно только в одном случае - когда $ax+b$ проходит через точки $\left(-\frac{1}{4}; -\frac{5}{8}\right)$, $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$ - они лежат на одной пр.

$$\begin{cases} a\left(-\frac{1}{4}\right)+b=-\frac{5}{8} \\ a\cdot\frac{1}{2}+b=\frac{1}{2} \\ a\cdot\frac{3}{2}+b=2 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$a=\frac{3}{2}$, $b=-\frac{1}{4}$

Ответ: $a=\frac{3}{2}$, $b=-\frac{1}{4}$

7. $f\left(\frac{m}{n}\cdot n\right)=f\left(\frac{m}{n}\right)+f(n)=f(m)$

$f\left(\frac{m}{n}\right)=f(m)-f(n)$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$

Найдём $f(a)$ для всех натур. a от 1 до 21

$f(1)=0$

$f(2)=1$	$f(14)=4$
$f(3)=1$	$f(15)=3$
$f(4)=2$	$f(16)=4$
$f(5)=2$	$f(17)=8$
$f(6)=2$	$f(18)=3$
$f(7)=3$	$f(19)=9$
$f(8)=3$	$f(20)=4$
$f(9)=2$	$f(21)=4$
$f(10)=3$	
$f(11)=5$	
$f(12)=3$	
$f(13)=6$	

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~Тогда~~ $f(x)-f(y)<0$ ~~при $(x;y)=(2;4)$~~

Если $f(x)=0$, то у нас 20 вариантов y и 1 вар. x

Если $f(x)=1$ 2 вар. x и 18 вар. y

Если $f(x)=2$ 4 вар. x и 14 вар. y

Если $f(x)=3$ 6 вар. x и 8 вар. y

Если $f(x)=4$ 4 вар. x и 4 вар. y

Если $f(x)=5$ 1 вар. x и 3 вар. y

Если $f(x)=6$ 1 вар. x и 2 вар. y

Если $f(x)=8$ 1 вар. x и 1 вар. y

Тогда суммарное кол-во вариантов:

$20\cdot 1+2\cdot 18+4\cdot 14+6\cdot 8+4\cdot 4+1\cdot 3+1\cdot 2+1\cdot 1=182$ варианта

Ответ: 182 варианта

3) $y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2}$, $y\geq 2x$, $xy-2x-y+2\geq 0$

$y-2x=\sqrt{y(x-1)-2(x-1)}$

$y-2x=\sqrt{(y-2)(x-1)}$

$2x^2+y^2-4x-4y+3=0$

$2(x^2-2x+1)+(y^2-4y+4)-3=0$

$2(x-1)^2+(y-2)^2=3$

Заменим $y-2=a$

$x-1=b$

$a+2-2(b+1)=\sqrt{ab}=a-2b$

$2b^2+a^2=3$

$a^2+4b^2-4ab=ab \quad |:b^2$

$\left(\frac{a}{b}\right)^2-5\frac{a}{b}+4=0$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$\frac{a}{b}=1$ или $\frac{a}{b}=4$

$a=b$ $\quad$ $a=4b$

$2b^2+a^2=3$

$2a^2+a^2=3$ $\quad$ $2b^2+16b^2=3$

$a=\pm 1$

$b=\pm 1$

$b^2=\frac{3}{18}=\frac{1}{6}$

$b=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}$

$a=\pm 2\sqrt{\frac{2}{3}}$

$a=1;\ b=1:$ $y=3$, $x=2$, но $y<2x$, не подходит

$a=-1;\ b=-1:$ $y=1$, $x=0$, подходит

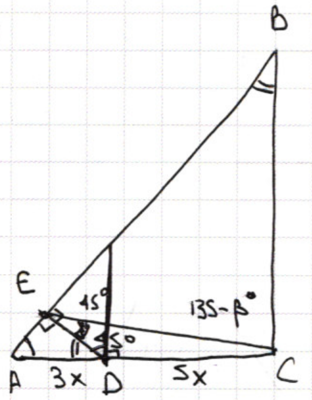
$a=2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $b=\frac{1}{\sqrt{6}}$: $y=2\sqrt{\frac{2}{3}}+2$, $x=\frac{1}{\sqrt{6}}+1$, но $xy-2x-y+2<0$, не подходит

$a=-2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $b=-\frac{1}{\sqrt{6}}$: $y=2-2\sqrt{\frac{2}{3}}$, $x=1-\frac{1}{\sqrt{6}}$, но $y<2x$, не подходит

Ответ: $x=0$, $y=1$

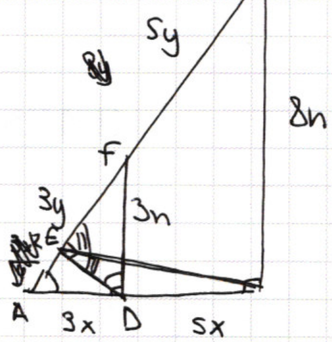
☐ черновик ☑ чистовик

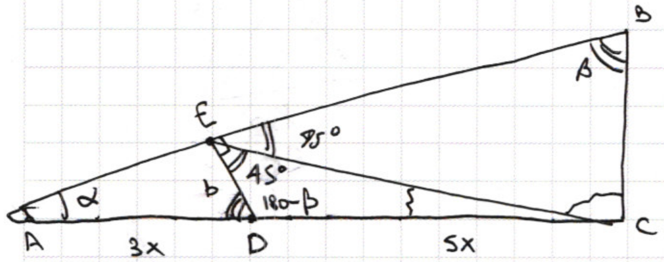
(Поставьте галочку в нужном поле)



$$9x^2 = ED^2 + \frac{9x^4}{y^2}$$

$$ED^2 = 9x^2\left(1 - \frac{x^2}{y^2}\right)$$





$$\frac{8x}{8y} = m$$

$$\frac{3x}{m} = \frac{8x}{8y}$$

$$m = 3y$$

$$\frac{m}{3x} = \frac{8x}{8y}$$

$$m = 3\frac{x^2}{y}$$

$$\frac{8x}{AB} = \frac{AE}{3x}$$

$$24x^2 = AB \cdot AE$$

$$180 - (180 - \beta) - 45° = \beta - 45°$$

$$180 - \beta - 45°$$

$$\beta - 45° + 135 - \beta = 90°$$

$$180 - \beta - 45° = 45°$$

$$0 = 0$$

$$\cancel{180 - \beta - 45° + 180 - \beta - 45° = 90°}$$

$$-\frac{1}{4}$$

$$\boxed{tg\alpha = \frac{n}{x}}$$

$$n = y^2 - x^2$$

$$AE \cdot EF = ED^2 \qquad \frac{AE}{3x} = \frac{8x}{8y} \qquad \frac{ED}{AD} = \frac{EF}{3n}$$

$$9xn\left(\frac{x}{y}\right)^2 = ED^2$$

$$AE = 3x\frac{x}{y}$$

$$ED = 3\frac{x}{y}\sqrt{xn}$$

$$EC^2 = \left(3n\frac{x}{y} + 5y\right)^2 + 64n^2 - 2 \cdot 3n\frac{x}{y} \cdot 8n \cdot \frac{x}{y}$$

$$180 - 45 - (90 - \alpha)$$

$$3n = \frac{EF}{FD} = \frac{8n}{8y}$$

$$45 + \alpha$$

$$EF = 3n\frac{x}{y}$$

$$9n^2\frac{x^2}{y^2} + 25y^2 - 30nx + 64(y^2 - x^2) - 48(y^2 - x^2)\frac{x^2}{y^2}$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$b = qa$

$c = q^2 a$

$ax^2 + 2bx + c = 0$

$ax^2 + 2qax + q^2 a = 0$

$a = 0$ | $a \neq 0$

$x \in \mathbb{R}$ | $x^2 + 2qx + q^2 = 0$

$c = 0$ | $x = aq^3$

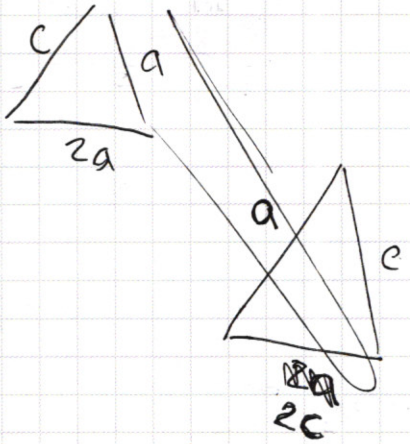
$a^2 q^6 + 2aq^4 + q^2 = 0$

$q = 0$ или $a^2 q^4 + 2aq^2 + 1 = 0$

$c = 0$ | $(aq^2 + 1)^2 = 0$

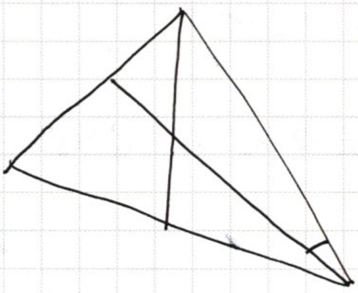
$c^2 = 0$

$c = 0$



$c = 2a$

$c = a$



9

$\frac{30}{3} - 1$

10

30, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30

15, 3, 6, 9, 12

$a = 2b$

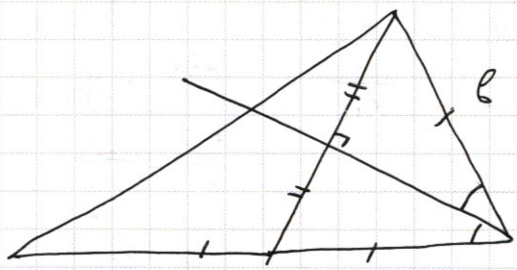
$P = a + b + c$

$P = 3b + c$

$\frac{P - c}{3} = b$

$a = c$

$c = 2a$



1200

4 $\frac{1200}{3} - 1$ 3, 6, 9, ...

400

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

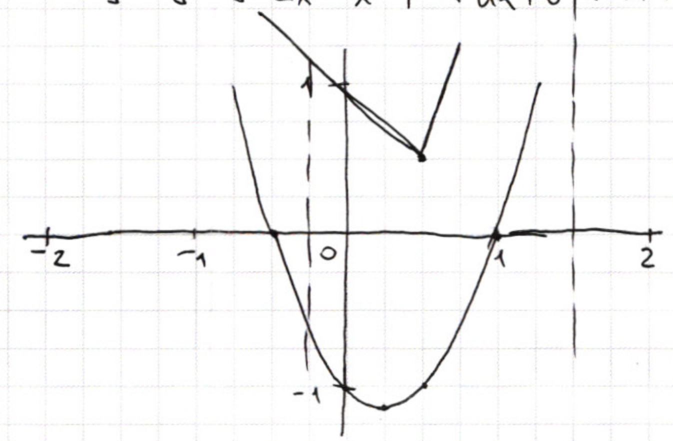
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$2\cdot\frac{1}{16}-\frac{1}{4}-1$ $\quad x_0=\frac{1}{4}$ $\quad y>2x$ $\quad 2+1-1$

2

$\frac{1}{8}-\frac{1}{4}-1$ $\quad y_0=$ $\quad 0,5$ $\quad 0,25$

$-\frac{9}{8}$ $\quad \frac{1}{8}-\frac{2}{8}-\frac{8}{8}$ $\quad 2x^2-x-1\le ax+b\le x+|2x-1|$



$y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2}$

$2x^2+y^2-4x-4y+3=0$

$2(x^2-2x+1)+(y^2-4y+4)-3=0$

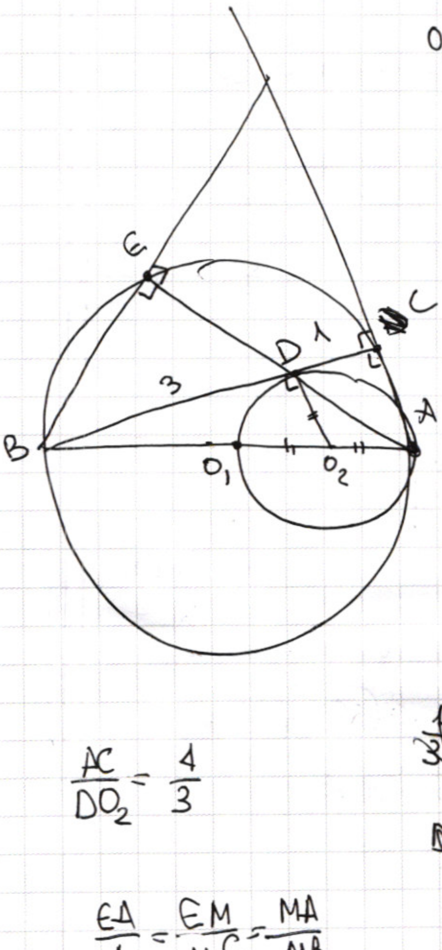
2 $\quad$ 4

$2(x-1)^2+(y-2)^2=3$

$y-2x=$

$y^2+4x^2-4xy=xy-2x-y+2$

$y^2+4x^2+2x+y-5xy-2=0$



0,5

1,5

$x+|2x-1|$

При $x\ge 0,5$

$3x-1$

При $x<0,5$

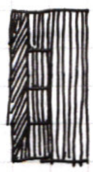
$x-2x+1$

$1-x$

$\frac{a\cdot b\cdot 2R}{4R}$

$2R=\frac{6}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{8}}$

$R=2r$



$2+1-1$

$\frac{AC}{DO_2}=\frac{4}{3}$

$\cancel{\frac{1}{3}=\frac{ED}{DA}}$

$\frac{1}{DA}=\frac{ED}{3}$

$3=ED\cdot DA$

$\frac{DO_2}{3}=\operatorname{tg}\alpha=$

$\frac{3}{BO_2}=\frac{4}{BO_2+r}$

$3BO_2+3r=4BO_2$

$BO_2=3r$

$2R=4r$

$\frac{ED}{4}=\frac{EM}{MC}=\frac{MA}{MB}$

$CA=MA-MC$

$2R-r$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$EC^2 = \cancel{25}\ 89y^2 - 64x^2 -$

$\cancel{AC}$ $\frac{BC}{\sin 45°} = \frac{EB}{\sin(135-\alpha)}$

$BC = 8n$

$$\frac{8n}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{5y + 3n\frac{x}{y}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{x}{y} + \frac{n}{y}\right)}$$

$$\frac{\frac{3}{25}\sqrt{29}}{\frac{\cancel{25}}{25} + \frac{4\cdot 29}{25\cdot 25}} \quad \frac{2}{25}\sqrt{29}$$

$\sin(135-\alpha) = \sin 135 \cdot \cos\alpha - \sin\alpha\cos 135°$

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha$

$$\frac{\frac{6}{25}\sqrt{29}}{1 + \frac{4}{25}}$$

$8n\left(\frac{x}{y} + \frac{n}{y}\right) = 5y + 3n\frac{x}{y}$ $\quad \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{x}{y} + \frac{n}{y}\right)$

$8n\frac{x}{y} + 8n\frac{n}{y} = 5y + 3n\frac{x}{y}$

$\frac{6\sqrt{29}}{25+4}$

$tg\alpha = \frac{n}{x}$

$5n\frac{x}{y} + 8n\frac{n}{y} = 5y$

$n = tg\alpha x$

$5nx + 8n^2 = 5y^2 = 5(n^2 + \cancel{y}\ x^2)$

$5\cancel{x^2}tg\alpha + 8\cancel{x^2}tg^2\alpha = 5(\cancel{x^2}tg^2\alpha + \cancel{x^2})$

$5tg\alpha + \cancel{8tg^2\alpha} = 5 + \cancel{5tg^2\alpha}$

$3tg^2\alpha$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2}$

$2x^2+y^2-4x-4y+3=0$

$2(x-1)^2+(y-2)^2=3$

$4x^2+y^2-4xy+4xy-2x^2-4x-4y+3=0$

$(y-2x)^2+4xy-2(x-1)^2-4y+5=0$

$\left(2\sqrt{\frac{2}{3}}+2\right)\left(\frac{1}{\sqrt{6}}+1\right)-$

-2

$xy-2x-y+2+4y(x-1)-2(x+1)^2+5=0$

$\cancel{(4y-2(x-1))(x-1)}$

$(y-2)(x-1)\geq 0$

$2\sqrt{\frac{2}{3}}-2$

$xy-2x-y+2+4xy-4y-2x^2+4x-2+5=0$

$xy-2x-y+2$

$5xy-6x-5y-2x^2+5=0$

$2\left(\sqrt{\frac{2}{3}}-1\right)$

$y-2x=\sqrt{y(x-1)-2x+2}=\sqrt{y(x-1)-2(x-1)}=$

$=\sqrt{(y-2)(x-1)}$

$a+2-2(b+1)=$

$=a-2b$

Заменим $y-2=a$

$x-1=b$

$\frac{a}{b}=1$

$\frac{a}{b}=4$

$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ 2b^2+a^2=3 \end{cases}$

$a^2-4ab+4b^2=ab$

$a^2-5ab+4b^2=0$

$0-0-1+2$

$a^2+4b^2=5ab$

$\left(\frac{a}{b}\right)^2-5\frac{a}{b}+4=0$

$b=\frac{1}{4}a \quad 2b^2+a^2=3$

$2b^2+a^2=3$

$2\cdot\frac{1}{16}a^2+a^2=3$

$\frac{a}{b}$

$3-2b^2+4b^2=5ab$

$\frac{9}{8}a^2=3$

$\frac{2}{\sqrt{6}}+2=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+2=$

$3+2b^2=5ab$

$a=\sqrt{\frac{8}{3}}$

$2+\sqrt{\frac{2}{3}}$

$\frac{4}{\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}=2\sqrt{\frac{2}{3}}$

$2-\sqrt{\frac{2}{3}}-\sqrt{\frac{2}{3}} < 2-\sqrt{\frac{2}{3}}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

⑥ $2x^2 - x - 1 \le ax + b \le x + |2x-1|$

Нарисуем 2 графика: $y = 2x^2 - x - 1$ и $y = x + |2x-1|$

112

$48 + 16 + 6$

$48 + 22 = 70$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) + f(1) - f(y)$

$14 \times 4 = 56$

$f(x) - f(y)$

$f(-2) = -1$

$f(-3) = -2$

$f(a) = f(m) + f(b)$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(a) = f(ab) - f(b) < 0$

$f(ab) < f(b)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$-\frac{1}{4}$

20, 36, 56, 48, 16, ~~36~~

$8 \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{4} - 1$

$\frac{1}{8} + \frac{2}{8} - \frac{8}{8}$

$\frac{5}{8}$

~~$f(2) = f(2) + f(1)$~~ При $y = 1$

$\frac{1}{y} \le 1$

$-\frac{1}{4}; -\frac{5}{8}$

$f(3) = f(1{,}5) + f(2)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$\frac{1}{2}; \frac{1}{2}$

$56 + 56 = 112$

1 1

$f(1{,}5) = 0$

$f\left(\frac{1}{y}\right) = f(1) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$\frac{3}{2}; 2$

$f(1) = 0$

$\frac{3}{4} + b = \frac{1}{2}$

$56 + 56 = 112$

$ab = 2$

$b = 5$

$f\left(\frac{1}{y}\right) = f(2) + f\left(\frac{1}{2y}\right)$

$b = -\frac{1}{4}$

$\frac{1}{2}a + b = \frac{1}{2}$

2 1

$f\left(\frac{1}{y}\right) - f\left(\frac{1}{2y}\right) =$

$\frac{3}{2}x - \frac{1}{4} = y$

$\frac{3}{2}a + b = 2$

$f(5) > f(2)$

$a = \frac{3}{2}$

$a = \frac{2}{5}$

$a = \frac{m}{n}$

$-\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{4} =$

$b = n$

$f\left(\frac{m}{n} \cdot b\right) = f\left(\frac{m}{n}\right) + f(b)$

$-\frac{3}{8} - \frac{2}{8}$

$f(m) - f(n) = f\left(\frac{m}{n}\right)$