МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №1.

Пусть q - знаменатель прогрессии. Тогда $b = a\cdot q$; $c = a\cdot q^2$:

$ax^2 - 2bx + c = 0$

$ax^2 - 2a\cdot q\cdot x + a\cdot q^2 = 0$

$a(x-q)^2 = 0$

$\left[\begin{array}{l} a = 0 \\ q = x \end{array}\right.$ (тогда 3-й член прогрессии $= 0$)

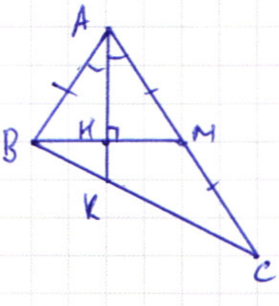
x - 4-й член прогрессии $\Rightarrow x = a\cdot q^3 = q$.

$a\cdot q^3 = q$

$\left[\begin{array}{l} a\cdot q^2 = 1 = c \text{ - 3-й член прогрессии} \\ q = 0 \text{ (тогда 3-й член прогрессии } = 0) \end{array}\right.$

Ответ: либо 0, либо 1.

Задача №2.



AK - биссектриса, BM - медиана

$BM \cap AK = H$

В $\triangle ABM$ AH - высота и биссектриса

$\Rightarrow \triangle ABM$ - равнобедренный $\Rightarrow AB = \frac{1}{2}AC$.

Пусть $AB = a$, тогда $AC = 2a$ и пусть $BC = b$.

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

$\angle AMB$ - острый $\Rightarrow \angle BMC$ - тупой $\Rightarrow BC > MC \Rightarrow b > a$.

$3a + b = 900$

$3a + b > 4a$

$4a < 900$

$a < 225$

$a + b > 2a$ – выполняется всегда $(b > a)$

$3a > b \Rightarrow b < 675$

$b = 900 - 3a$

$900 - 3a < 675$

$3a > 225$

$a > 75$

$a \in (75; 225)$, $a \in \mathbb{N}$; $b = 900 - 3a$

все нер-ва треугольника выполняются, $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$

Всего 149 вариантов $a \Rightarrow$ всего существует 149 таких треугольников.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №3.

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} & (1) \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 & (2) \end{cases}$$

1) $x-6y=\sqrt{(x-6)(y-1)}$

2) $(x-6)^2+2(y-1)^2-18=0$

Пусть $x-6=a$, $y-1=b$.

Тогда $\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ a^2+2b^2=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-12ab+36b^2=ab \\ a^2+2b^2=18 \\ ab>0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2-13ab+36b^2=0 & (1) \\ a^2+2b^2=18 & (2) \\ ab>0 \end{cases}$$

1) Решим относительно a:

$D=169b^2-144b^2=25b^2$

$a=\dfrac{13b\pm 5b}{2}$

$$\left[\begin{array}{l} a=9b \\ a=4b \end{array}\right.$$

Подставим в (2)

$$\left[\begin{array}{l} 83b^2=18 \\ 18b^2=18 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=\pm\sqrt{\frac{18}{83}}, \quad a=\pm 9\sqrt{\frac{18}{8}} \\ b=\pm 1, \quad a=\pm 4 \end{array}\right.$$

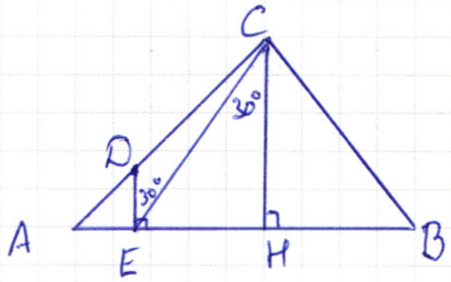
$x=a+6$, $y=b+1$.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=9\sqrt{\frac{18}{83}}+6\\ y=\sqrt{\frac{18}{83}}+1\end{cases}\\ \begin{cases}x=-9\sqrt{\frac{18}{83}}+6\\ y=-\sqrt{\frac{18}{83}}+1\end{cases}\\ \begin{cases}x=10\\ y=2\end{cases}\\ \begin{cases}x=2\\ y=0\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{\left(9\sqrt{\frac{18}{83}}+6;\sqrt{\frac{18}{83}}+1\right),\left(-9\sqrt{\frac{18}{83}}+6;-\sqrt{\frac{18}{83}}+1\right),(10;2),(2;0)\right\}$.

Задача №4

а)



$\angle ACB$ – прямой

$AD:AC=1:3 \Rightarrow AD:DC=1:2$

CH – высота в $\triangle ABC$

$\Rightarrow CH \parallel ED$

$\Rightarrow \frac{AE}{EH}=\frac{AD}{DC}=\frac{1}{2}$ (по т. Фалеса)

Пусть $AE=k$, тогда $EH=2k$.

$CH \parallel ED \Rightarrow \angle DEC=\angle ECH=30^\circ$

$\Rightarrow CH=EH\cdot \operatorname{ctg}30^\circ=2k\cdot\sqrt{3}$.

$\operatorname{tg}\angle BAC=\frac{CH}{AH}=\frac{2k\sqrt{3}}{3k}=\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Ответ: $\frac{2}{\sqrt{3}}$

б) $CH=\frac{2AH}{\sqrt{3}}$.

$CH^2+AH^2=7$ $(=AC^2)$

$\frac{7AH^2}{3}=7$

$AH=\sqrt{3}$. $\Rightarrow CH=2$, $AE=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $EH=\frac{2}{\sqrt{3}}$., $DE=\frac{2}{3}$

$S_{\triangle AED}=\frac{1}{3\sqrt{3}}$, $S_{\triangle ECH}=\frac{2}{\sqrt{3}}$; $S_{\triangle ACH}=\sqrt{3}$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

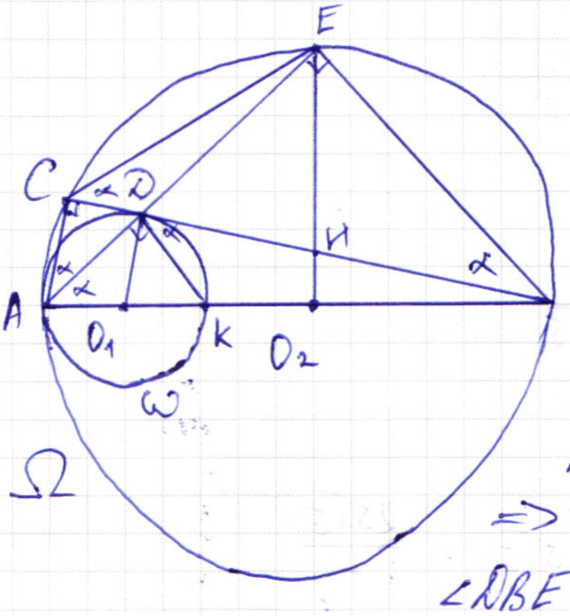
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$S_{\triangle CED} = S_{\triangle ACH} - S_{\triangle AED} - S_{\triangle ECH} = \sqrt{3} - \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{9-1-6}{3\sqrt{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Ответ: $\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

Задача №5.



Пусть ω пересекает AB в K. Тогда $\angle BDK = \angle DAK$, как углы между касательной и хордой $=\alpha$

$\angle ADK$ - прямой, опирается на диаметр. $\angle AEB$ - прямой, опирается на диаметр. $\Rightarrow DK \parallel BE \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BDK = \angle DBE = \alpha$

$\angle DBE = \angle CAE = \alpha$ (опираются на дугу CE)

$\angle ECB = \angle EAB = \alpha$ (опираются на дугу EB)

O_1, O_2 - центры ω и Ω соответственно.

$$\left.\begin{array}{l} O_1D \perp CB \\ O_2E \parallel O_1D \end{array}\right\} \Rightarrow O_2E \perp CB$$

$\triangle ECB$ - равнобедренный $\Rightarrow$ EH - медиана $\Rightarrow BH = CH = \frac{5}{2}$.

$DH = CH - CD = \frac{1}{2}$.

EH - высота в прямоугольном треугольнике BED $\Rightarrow$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$\Rightarrow EH = \sqrt{DH \cdot BH} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$

$BE = CE = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{30}}{2}.$

$tg\alpha = \frac{EH}{BH} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$AC = \frac{CD}{tg\alpha} = 2\sqrt{5}$

$AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = \sqrt{25 + 20} = 3\sqrt{5}$

$\Rightarrow$ радиус $\Omega = \frac{3\sqrt{5}}{2}.$

$AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = \sqrt{20 + 4} = 2\sqrt{6}$

$DK = AD \cdot tg\alpha = 2\sqrt{6} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$

$AK = \sqrt{AD^2 + DK^2} = \sqrt{24 + \frac{24}{5}} = \frac{12}{\sqrt{5}}.$

$\Rightarrow$ радиус $\omega = \frac{6}{\sqrt{5}}$

$S_{ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{2\sqrt{5} \cdot 5}{2} = 5\sqrt{5}$

$S_{BEC} = \frac{EH \cdot BC}{2} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{2} \cdot 5}{2} = \frac{5\sqrt{5}}{4}$

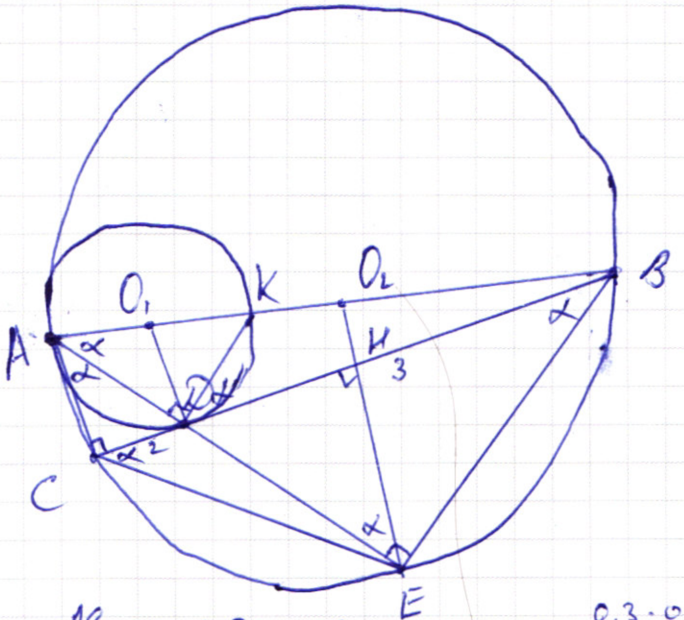
$S_{BACE} = S_{ABC} + S_{BEC} = \frac{5\sqrt{5}}{4} + 5\sqrt{5} = \frac{25\sqrt{5}}{4}.$

Ответ: радиус $\omega = \frac{6}{\sqrt{5}}$

радиус $\Omega = \frac{3\sqrt{5}}{2}.$

площадь $BACE = \frac{25\sqrt{5}}{4}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$\frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AK} = \frac{CD}{DK}$

$0{,}3 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5, 0{,}5$

$\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2}$ $\quad \frac{5}{2}$ $\quad \frac{25}{4} + \frac{15}{4} = \frac{40}{4} = 8$

$24 = 4 \cdot 6$

$DH = 1{,}5 \quad BH = 2{,}5.$

$EH = \sqrt{DH \cdot BH} = \sqrt{1{,}5 \cdot 2{,}5} = \frac{\sqrt{15}}{2}.$

$\frac{DK}{AD} \cdot AD$

$BE = CE = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{15}{4}} = \sqrt{10}$

$\frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{\frac{5}{2}}$

$tg\alpha = \frac{EH}{BH} = \frac{\frac{\sqrt{15}}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{15}}{5} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}.$

$\frac{CD}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}.$

$AC = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}}.$

$AB = \sqrt{25 - \frac{20}{3}} = \sqrt{\frac{65}{3}}.$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

q - знаменатель прогрессии $\Rightarrow b = a \cdot q$, $c = a \cdot q^2$

$ax^2 - 2bx + c = 0$

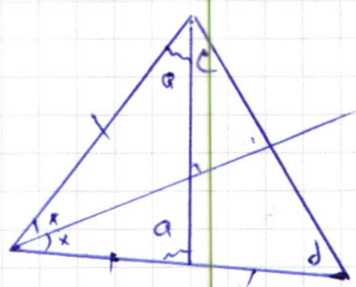
$ax^2 - 2aqx + aq^2 = 0$

$\left[\begin{array}{l} x^2 - 2qx + q^2 = 0 \\ a = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-q)^2 = 0 \\ a = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = q \\ a = 0 \end{array}\right.$

$a \cdot q^3 = q$

$\begin{cases} \boxed{a \cdot q^2 = 1} = c \\ q \neq 0 \end{cases}$

$\boxed{\text{Ответ: } 1.}$



$c + d = a$

№3. $\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} & (1) \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 & (2) \end{cases}$

1) $x - 6y = \sqrt{y(x-6) - (x-6)}$

$x - 6y = \sqrt{\underbrace{(x-6)}_{a}\underbrace{(y-1)}_{b}}$

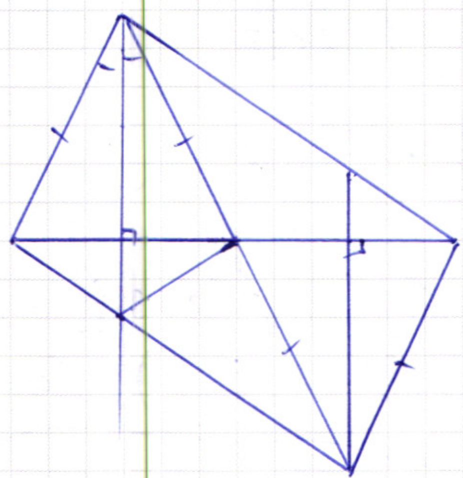
2) $x^2 - 12x + 36 + 2y^2 - 4y + 2 - 18 = 0$

$(x-6)^2 + 2(y-1)^2 - 18 = 0$

$a^2 + 2b^2 - 18 = 0$

$a^2 = 18 - 2b^2$

$a = \sqrt{18 - 2b}$



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-6y=\sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2+2(y-1)^2-18=0 \end{cases}$$

$x-6=a$

$y-1=b \quad -6b=6-6y$

$$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ a^2+2b^2=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-12ab+36b^2=ab \\ a^2+2b^2=18 \\ ab\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2-13ab+36b^2=0 \quad (1) \\ a^2+2b^2=18 \\ ab\geq 0. \end{cases}$$

1) $D=169b^2-144b^2=25b^2$

$a=\dfrac{13b\pm 5b}{2}$

$$\left[\begin{array}{ll} a=9b & (1) \\ a=4b. & (2) \end{array}\right.$$

1) $81b^2+2b^2=18$

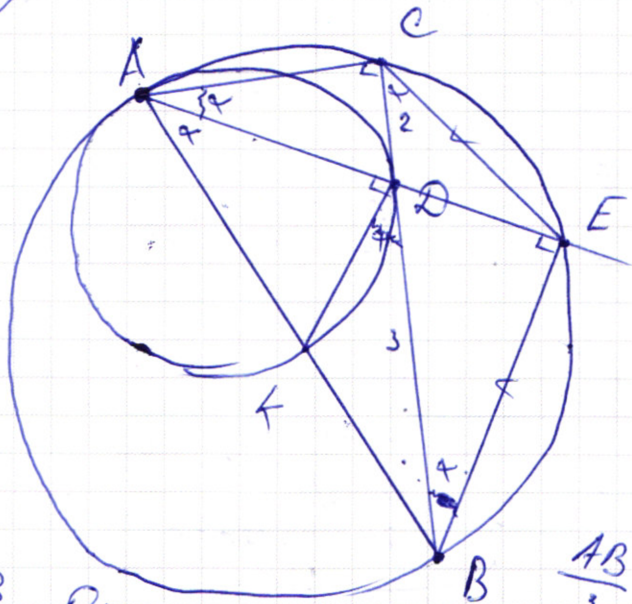
$83b^2=18$

$b=\pm\sqrt{\frac{18}{83}}$.

2) $18b^2=18$

$b=\pm 1.$

Ответ: $\left\{\left(a=9\sqrt{\frac{18}{83}};\ b=\sqrt{\frac{18}{83}}\right), \left(a=-9\sqrt{\frac{18}{83}};\ b=-\sqrt{\frac{18}{83}}\right), (a=1;\ b=1), (a=-1;\ b=-1)\right\}.$



$\dfrac{DB}{AB}=\dfrac{DE}{EB}$

$\dfrac{DB}{AD}=\dfrac{DE}{DC}$

$\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{CD}{EB}$

$\dfrac{AB}{3}=\dfrac{AC}{2}$

$\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{EB}{2}.$

$\dfrac{AK}{KB}=\dfrac{AD}{DE},\quad \dfrac{AK}{AD.}=\dfrac{DK}{2.}$

$\dfrac{DK}{2KB}=\dfrac{1}{DE}$

$\dfrac{DK}{CD}=\dfrac{DB}{CE}$

$\dfrac{DK}{2}=\dfrac{3}{CE}$

$DK\cdot CE=6$

$DK\cdot BE=6$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

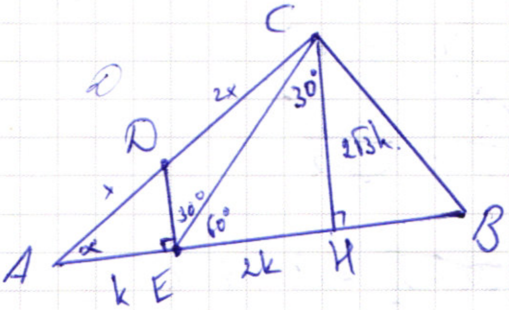
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

а)



$$tg\alpha = \frac{2\sqrt{3}k}{3k} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

б) $AC = \sqrt{7}.$

$$\frac{DE}{AE} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{CH}{AH}$$

$$CH = \frac{2AH}{\sqrt{3}}.$$

$$CH^2 + AH^2 = 7.$$

$$\frac{4AH^2}{3} + AH^2 = 7.$$

$$7AH^2 = 21$$

$$AH = \sqrt{3}. \Rightarrow CH = 2$$

$$\frac{CH}{EH} \cdot EH$$

$$\frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{2}{6\sqrt{3}}$$

$$\frac{\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 2}{2} =$$

$$8x - 6|2x-1| \le ax + b \le -8x^2 + 6x + 7$$

$$x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$$

$$8x - 12x + 6 \le ax + b \le -8x^2 + 6x + 7$$

$$8x - 12x + 6 \le -8x^2 + 6x + 7$$

$$8x^2 - 10x - 1 \le 0$$

$f(2) = 1$ $\quad f(x/y) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f(3) = 1$

$f(5) = 2$

$f(7) = 3$

$f(11) = 5$

$f(13) = 6$

$f(17) = 8$

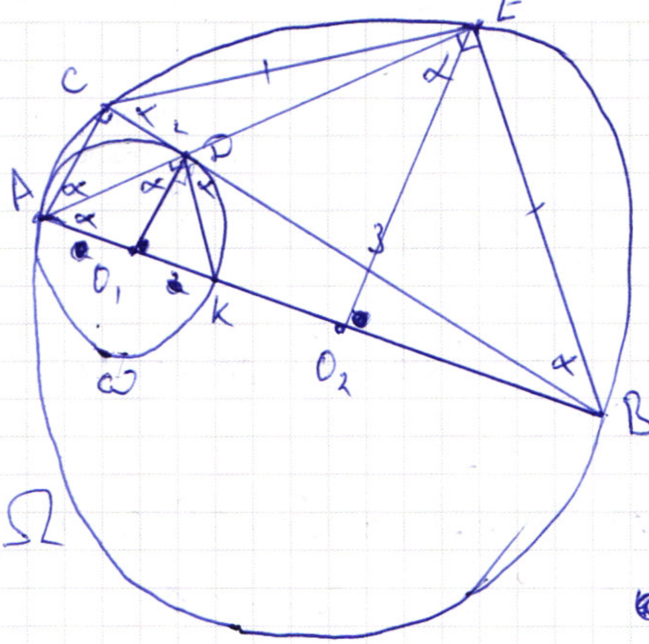
$f(18) = 9$

$f(23) = 11$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$224 - 75 = 149 - 1 = 148.$



Ω

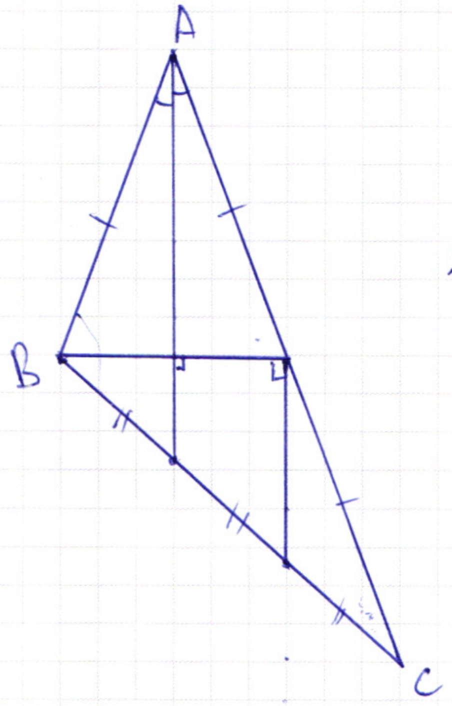
ω

$675 > 3a > b$

720

180

360



$a\ ;\ 2a;\ b.$

$b < 2a.$

$3a + b < 900$

$2{,}5b < 3a + b < 900$

$b < 360$

$b \vdots 3 - 360 \ ,\ b \vdots 3.$

$a = \frac{900 - b}{3}$

$b > a$

$3a + b = 900$ $\boxed{a = 180}$

$4a < 900$

$a < 225$

$b = \frac{900 - 3a}{}$

$b < 675.$

$900 - 3a < 675.$

$3a > 225$

$a > 75$

$a + b > 2a$

$b = 2a$

$900 = 5a$

$3a > b$

75

☐ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)