1 60 186 26

80 80

20+32+64+48+16+6

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2+2bx+c=0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2}, \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0. \end{cases}$$

$(-y+2)(-x+1)$

$2x^2 - 4x+2+y^2-4y+4 = 2(x-1)^2+(y-2)^2=3$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD:AC=3:5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED=45^\circ$.

б) Пусть дополнительно известно, что $AC=\sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD=1$, $BD=3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$1-x=a$

$2-y=b$

$$2x^2-x-1 \leqslant ax+b \leqslant x+|2x-1|$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4};\frac{3}{2}\right]$.

20^x $2\cdot18^x$ $4\cdot14^x$ $6\cdot8^x$ 16^x

$2a^2+b^2=3$ $2a-b=\sqrt{ab}$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y)<0$.

$\begin{cases} 2a \geq b \\ 4a^2+b^2-4ab=ab \\ 2a^2+b^2=3 \end{cases}$

$\begin{cases} 2a \geq b \\ 2a^2-5ab=3 \end{cases}$

x, xy, xy^2, xy^3

a b c

$3^x 2^x 1$

$xy^3=\dfrac{-2xy \pm \sqrt{4x^2y^2-4x^2y^2}}{2x} = -y$

$xy^2=-1$

$x - y \geq 2$

$7 \geq x + y$

1) $2a - 8b \leq 5$
2) $2 \leq 3a - 2b$
3) $a + 2b \leq 1$
4) $4b - a \leq 5$
5) $3a + 2b \leq 7$

$3a \leq 4\frac{1}{2} = \frac{9}{2}$

$a \leq \frac{3}{2}$

$\cancel{10 \geq 2a - 8b \geq}$

$4b \leq {}^{13}/_{2}$

$b \leq$

$8b \leq 2$

$5 \geq 2a - 8b \geq -10$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

Так как a, в, c - члены геом. прогрессии, они представляются как $в = ax_0$, $c = ax_0^2$.

Тогда запишем корни уравнения $ax^2 + 2вx + c = 0$:

$$\frac{-2в \pm \sqrt{4в^2 - 4ac}}{2a}$$ подставим a, в, c:

$$\frac{-2ax_0 \pm \sqrt{4a^2x_0^2 - 4a^2x_0^2}}{2a} = -x_0 = ax_0^3$$ - 4й член геом. прогрессии.

Откуда $ax_0^2 = -1$.

Ответ: -1

№ 7

Заметим, что для $x, y \in \mathbb{N}$ $f(y) + f(\frac{x}{y}) = f(x)$ (т.к. $f(ab) = f(a) + f(b)$). Откуда $f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y)$.

Запишем $f(x)$ для $x \in \mathbb{N}$, $0 < x \leq 21$:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
f(x)	0	1	1	2	2	2	3	3	2	3	5	3	6	4	3	4	8	3	9	4	4

Теперь запишем ответ: все такие пары (x, y) что $f(x) < f(y)$:

$(0; y > 1)$

$(x = 2, 3; y > 3)$

$(x = 4, 5, 6, 9; y > 6, y \neq 9)$

$(x = 7, 8, 10, 12, 15, 18; y = 11, 13, 14, 16, 17, 19, 20, 21)$

$(x = 14, 16, 20, 21; y = 11, 13, 17, 19)$

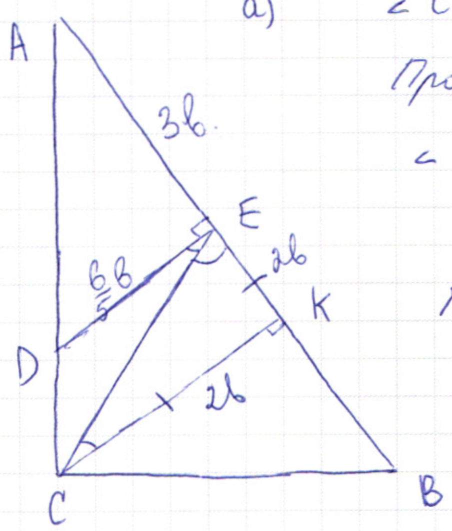
$(x = 11, y = 13, 17, 19)$

$(x = 13, y = 17, 19)$

$(x = 17, y = 19)$

Ответ: 186 пар.

№ 4



а) $\angle CED = 45^\circ \Rightarrow \angle CEB = 180^\circ - \angle DEA - \angle CED = 45^\circ$

Проведем CK – высоту к AB

$\angle ECK = 180^\circ - \angle CKE - \angle CEK = 45^\circ = \underset{\angle CEB}{\angle CEK}$.

Тогда $\triangle EKC$ – равнобедр., т.е. $CK = KE$.

Пусть $AD = 3a$. Тогда:

$DC = 2a$, т.к. $\frac{AD}{AC} = \frac{3}{5}$.

По теореме Фалеса $\frac{AE}{EK} = \frac{AD}{DC} = \frac{3}{2}$.

Тогда, т.к. $Ek = KC$, $\frac{AK}{KC} = \frac{5}{2}$. Пусть $Ck = 2в$, тогда

$EK = 2в$ и $AE = 3в$. Откуда $AC = в\sqrt{29}$ в прямоуг. $\triangle CKA$.

~~$DE = CK \cdot \frac{AE}{AK} = 2в \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{5}в$~~ $DE = Ck \cdot \frac{AE}{AK} = \frac{6}{5}в$

Заметим так же, что $\triangle AED \sim \triangle CKB$.

Отсюда $CB = AD \cdot \frac{Ck}{AE} = \frac{3}{5}AC \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{5}AC$#

Тангенс $tg\angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{2}{5}$

Ответ: $\frac{2}{5}$

б) По пункту (а) $AC = в\sqrt{29}$. Раз $AC = \sqrt{29}$, то $в = 1$.

$S_{CED} = S_{ABC} - S_{AED} - S_{EKC} - S_{CKB} =$

$\frac{1}{2}(AC \cdot BC - AE \cdot ED - EK \cdot Ck - Ck \cdot KB) =$

$\frac{1}{2}(\sqrt{29} \cdot \frac{2}{5}\sqrt{29} - 3 \cdot \frac{6}{5} - 2 \cdot 2 - 2 \cdot \frac{4}{5}^{*}) =$

$\frac{1}{2}\left(2 \cdot \frac{29}{5} - 2 \cdot \frac{3}{5} - 2 \cdot 2 - 2 \cdot \frac{4}{5}\right) = \frac{6}{5}$.

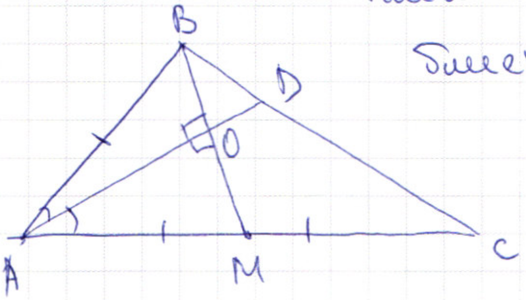
Ответ: $\frac{6}{5}$

* KB нашли как $DE \cdot \frac{CK}{AE} = \frac{6}{5}в \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{5}в = \frac{4}{5}$, по $\triangle AED \sim \triangle CkB$

☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2



Рассмотрим треугольник ABC, AD - биссектриса, BM - медиана.

Треугольники $\triangle ABO$ и $\triangle AMO$ (O - точка пересечения AD и BM) равны по 2-м углам и стороне.

Тогда $AB = AM = MC$. Заметим, что условие $AB = AM = MC$ является так же и достаточным для того, чтобы $BM \perp AD$. Откуда нам необходимо найти количество треугольников со целочисленными сторонами a, b, c таких, что $a = 2b$ и $a + b + c = 1200$.

Заметим, что все стороны известны, если мы знаем одну - например, c. Тогда количество треугольников = кол-ву вариантов выбрать c. Так как стороны целочисленны, $c \vdots 3$ чтобы $1200 - c$ было кратно 3 (иначе b не целое). Кол-во выбрать c - $\frac{1200}{3} - 1 = 399$ (вычитаем случай, когда $c = 1200$).

Но подходят не все: должно выполняться нер-во треугольника.

$a + c > b$ - всегда, т.к. $a = 2b$

$a + b = 1200 - c > c$ при $c < 600$

$b + c = 1200 - a > a$ при $a < 600$, т.е. при $c > 300$.

Откуда из 399 случаев подойдут только те, где $300 < c < 600$. Таких будет $100-1=99$

Ответ: $100-1=99$.

№3

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(1-x)-(2-y)=\sqrt{(1-x)(2-y)} \\ 2(x-1)^2+(y-2)^2=3 \end{cases}$$

ОДЗ: $(1-x)(2-y)\geq 0$

$y \geq 2x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a-b=\sqrt{ab} \\ 2a^2+b^2=3 \\ a=1-x;\ b=2-y \end{cases} \qquad \begin{cases} 2a-b\geq 0;\ ab\geq 0 \\ (2a-b)^2=ab \\ 2a^2+b^2=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a-b\geq 0;\ ab\geq 0 \\ (4a-b)(a-b)=0 \\ 2a^2+b^2=3 \end{cases}$$

1) $a=b \quad 3a^2=3 \quad \boxed{a=b=1}$

подходит под ОДЗ

2) $4a=b \quad 18a^2=3$

$\boxed{a=\sqrt{6},\ b=\frac{\sqrt{6}}{4}}$

подходит под ОДЗ

Подставим в изначальные условия:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{6}=a=1-x \Rightarrow x=1-\sqrt{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{4}=b=2-y \Rightarrow y=2-\frac{\sqrt{6}}{4} \end{cases} \\ \begin{cases} 1=a=1-x \Rightarrow x=0 \\ 1=b=2-y \Rightarrow y=1 \end{cases} \end{array}\right.$$

– подходят под ОДЗ

Ответ: $(0,1);\ (1-\sqrt{6},\ 2-\frac{\sqrt{6}}{4})$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6

$2x^2-x-1 \le ax+b \le x+|2x-1|$

Найдем такие (a,b), что выполнено (1) неравенство:

$f(x)=2x^2-x-ax-1-b\le 0$ на $[-\frac{1}{4},\frac{3}{2}]$ если

$f(-\frac{1}{4})$ и $f(\frac{3}{2})$ ≤ 0 (т.к. старший коэф. >0).

$f(-\frac{1}{4})=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}a-1-b\le 0$ $\quad 2a-8b\le 5$

$f(\frac{3}{2})=\frac{9}{2}-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}a-1-b\le 0$ $\quad 2\le 3a-2b$

Теперь аналогично для 2ого неравенства, но на 2х отрезках:

1) $x\in[-\frac{1}{4},\frac{1}{2}]$

$ax+b\le 1-x$ чтобы $f_1(x)=(-a-1)x+(1-b)\ge 0$

выполнялось, $f_1(-\frac{1}{4})$ и $f_1(\frac{1}{2})$ ≥ 0.

$f_1(-\frac{1}{4})=(1+a)\frac{1}{4}+1-b\ge 0$ $\quad 5\ge -a+4b$

$f_1(\frac{1}{2})=(a-1)\frac{1}{2}+(1-b)\ge 0$ $\quad -a\cancel{+}2b\ge -1$

2) $x\in[\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$

$f_2(x)=(3-a)x+(-b-1)\ge 0$ при $f_2(\frac{1}{2})$ и $f_2(\frac{3}{2})\ge 0$

$f_2(\frac{1}{2})=(3-a)\frac{1}{2}+(-b-1)\ge 0$ $\quad 1\ge a+2b$

$f_2(\frac{3}{2})=(3-a)\frac{3}{2}+(-b-1)\ge 0$ $\quad 7\ge 2b+3a$

Получаем след. условия:

(1) $2a-8b\le 5$ (3) $1\ge a+2b$

(2) $2\le 3a-2b$ (4) $5\ge 4b-a$ (5) $7\ge 2b+3a$

Домножим (4) на -2:

$2a - 8b \geq -10$. Соединим с (1): $-10 \leq 2a - 8b \leq 5$

Ответ: подходят (a, b) в пересечении этих условий:

(1) $-10 \leq 2a - 8b \leq 5$

(2) $2 \leq 3a - 2b$

(3) $a + 2b \leq 1$

(4) $3a + 2b \leq 7$

☐ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

ЧЕРНОВИК

№ 1

Запишем корни и

$2x^2-x-1=$ ~~$2(x-\frac{1}{2})^2-\frac{3}{2}$~~

$2(x^2-\frac{1}{2}x + \frac{1}{16})=$

$2(x-\frac{1}{4})^2-\frac{9}{8}$

1) $2x \geq 1$ $\quad 3x-1$

2) $2x \leq 1$ $\quad 1-x$

1) $x > \frac{1}{2}$

$ax+b \leq 3x-1$

$b+1 \leq (3-a)x$

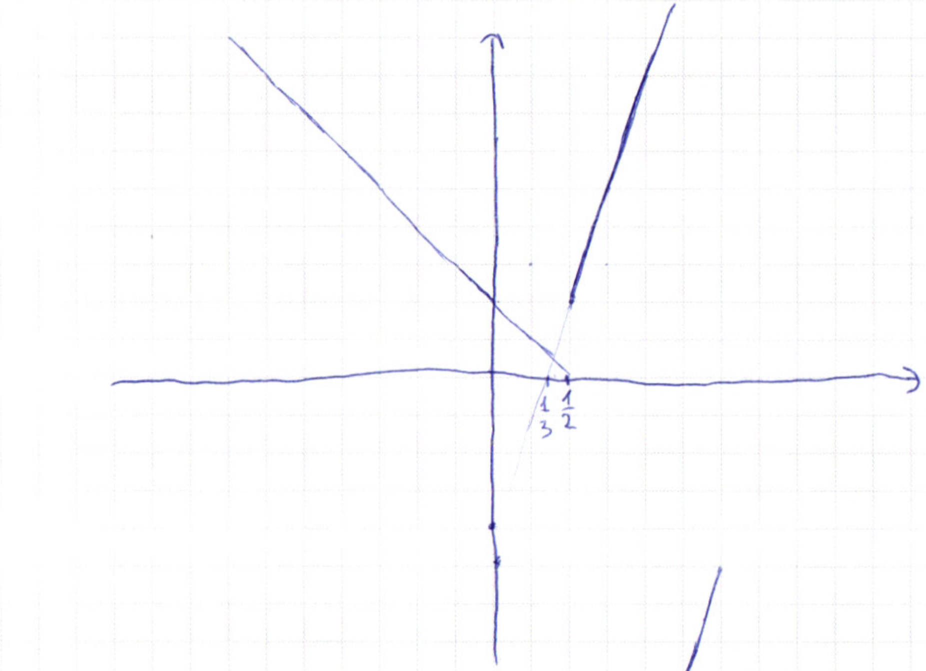
при $x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$

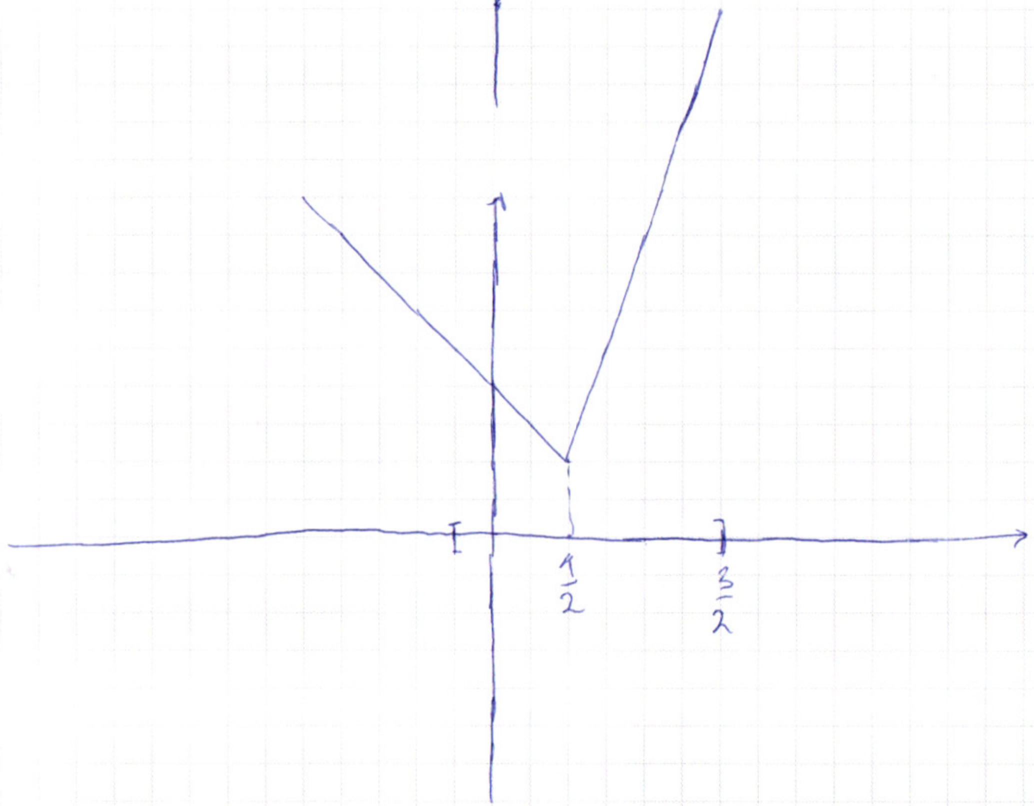
$\frac{1}{4}$

2) $x \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$

$ax+b \leq 1-x$

$b-1 \leq -(a+1)x$





☒ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 1

(Нумеровать только чистовики)

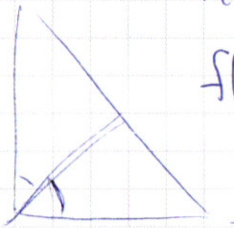
$\frac{b}{a}$?

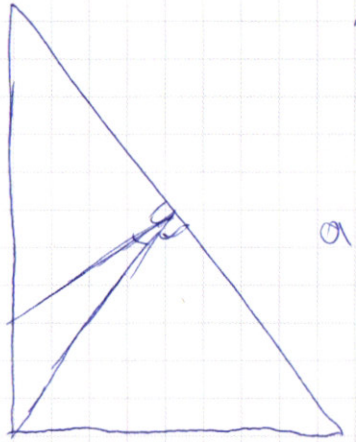
$\frac{ab}{a^2+b^2} = x$

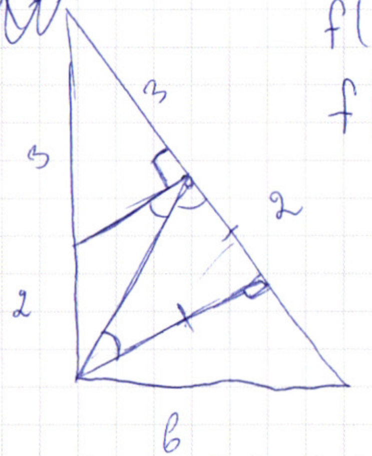
$f(p) = \frac{p-1}{2}$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f([p]) = [\frac{p}{2}]$, p- простые.



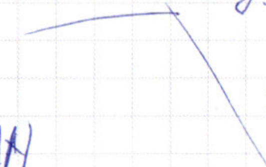




$f(2) = 1$

$f(4) = 2$

x

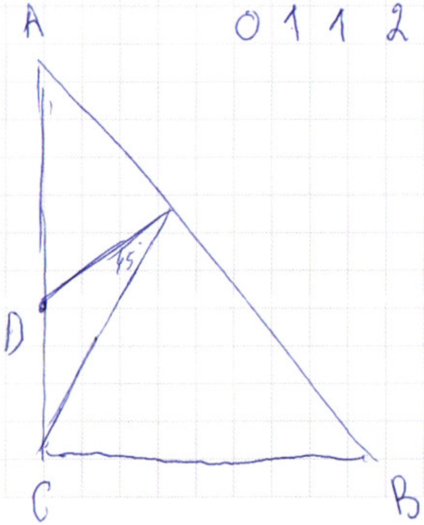


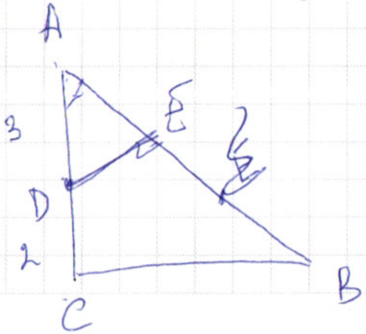
$f(y) + f(\frac{x}{y}) = f(x)$

$f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y)$

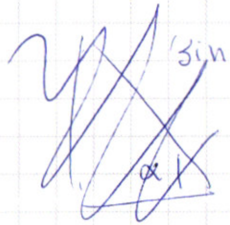
$f(y) > f(x)$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
0	1	1	2	2	2	3	3	2	3	5	3	6	4	3						





$\frac{BC}{AC}$ - ?



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

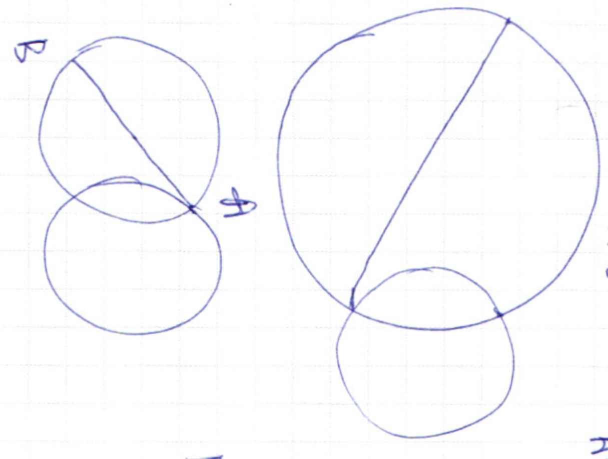
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



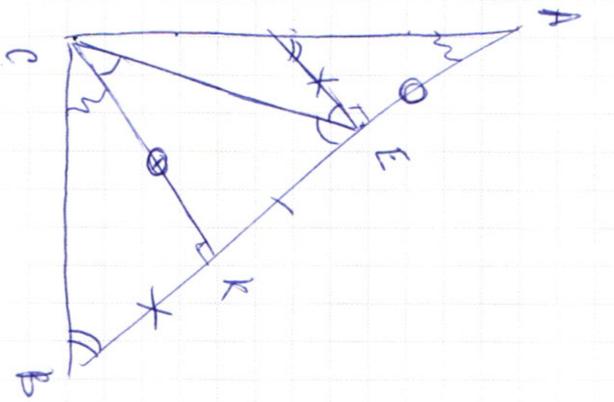
$KD=$

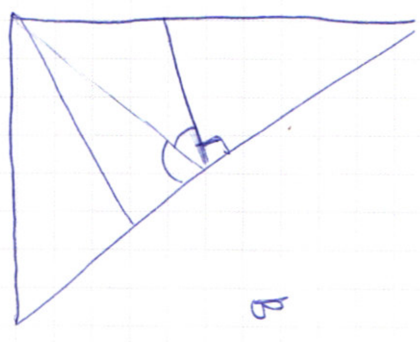
$\frac{BC}{AC}$?

$\frac{AD}{DC}=\frac{AE}{EK}=\frac{3}{2}$

$\frac{DE}{CK}=\frac{3}{5}$

$KB=DE\cdot\frac{CK}{AE}=\frac{6}{5}a\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{5}a$

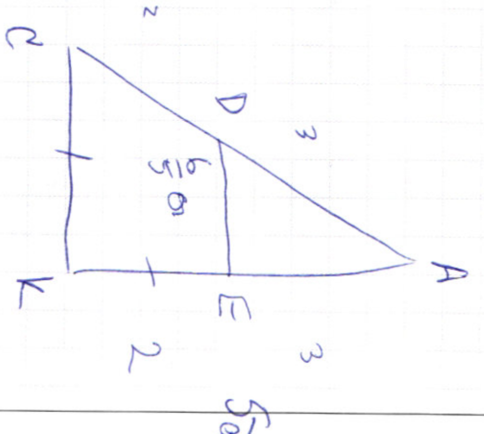


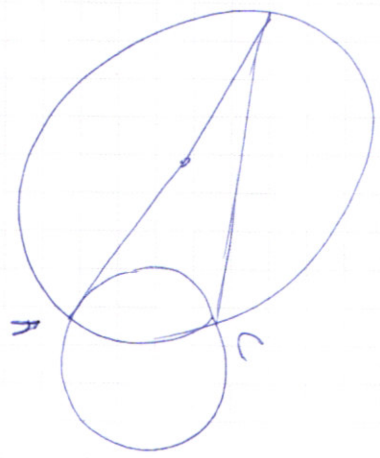


$\frac{CB}{AD}=\frac{CK}{AE}$

$a\sqrt{29}$

$\frac{29}{5}-\frac{9}{5}-\frac{10}{5}-\frac{4}{5}$



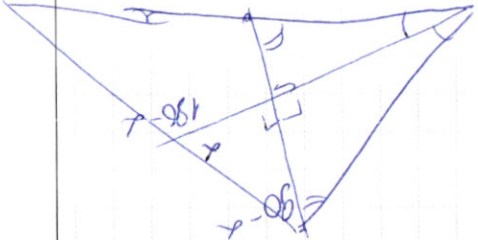


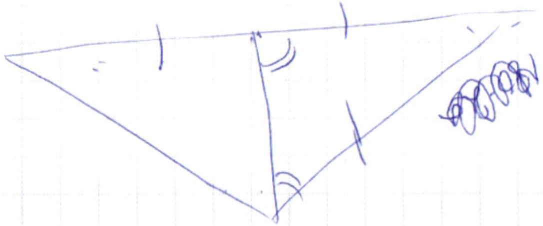
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



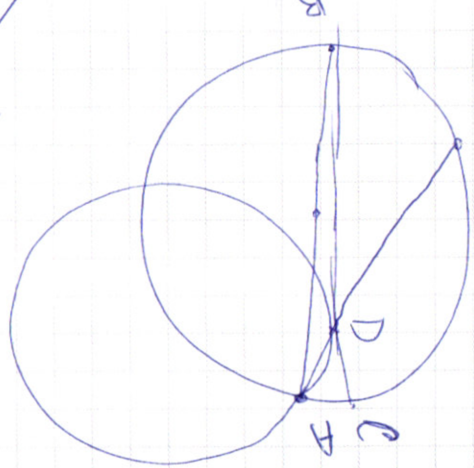


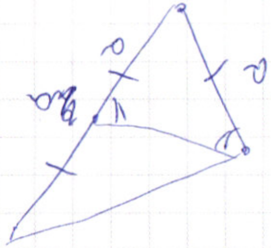
$\frac{3}{10} \le a$

$3 \le 10a$

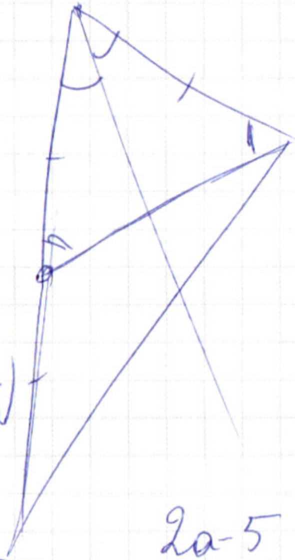
$2a-5 \le 12a-8$

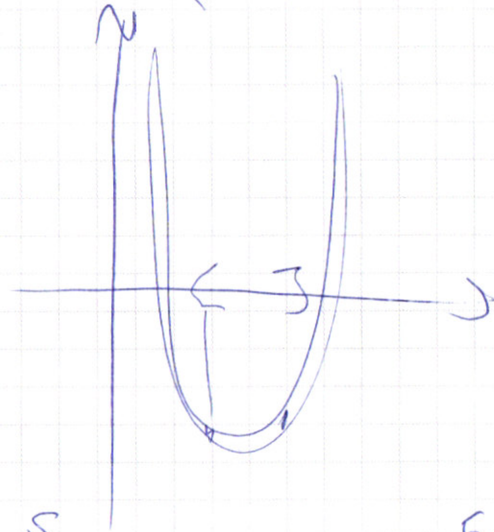
$\frac{1}{8}+\frac{1}{4}-1$





$2x^2-x-1-ax-b \le 0$





$2b + c = 1200$

$2a+\sqrt{4a^2+ab} - 4\sqrt{ab} = 3$

$\begin{cases} 2a-b=\sqrt{ab} \\ 2a^2+b^2=3 \end{cases}$

$a = 1-x$

$b = 2-b$

$CD=1$

$BD=3$

$= 5ab$

$(4a-b)(a+b)$

$\frac{1}{2}-\frac{a}{2}-b$

$\frac{2a-5}{4}$

$\le 2b \le 3a-2$

$-\frac{5}{8}$

$b-2b^2$

$2a-8b \le 5$

$\frac{3}{8}$

$2 \le \quad 4 \le 3a-2b$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)