МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

МФТИ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

72

18

$\frac{\cos 3x}{\sin 3x} = \frac{\frac{\sqrt3}{2}}{\frac12}$ $36 \times 4 = 144$

$9 \cdot 33 = 27 + 720 = 757$

$449 : 3 = 149$

~~№1~~

~~$ax^2-2bx+c=0 \Rightarrow$~~

~~$x_{1,2} = \frac{2b\pm\sqrt{4b-4ac}}{2a} = \frac{2b\pm2\sqrt{b-ac}}{2a} = \frac{b\pm\sqrt{b-ac}}{a}$~~

~~т.к x_1 или $x_2 = d$, x_1 или $x_2 =$~~

~~$(x-6)(y-3)$ $2y-6y-x+6$~~

$9 \quad 36 \quad 63$
$18 \quad 45 \quad 72$
$27 \quad 54 \quad 81$

№1

$ax^2-2bx+c=0$ (1)

a, b, c - члены геом. посл

$a=a$

$b=a\cdot q$

$c=a\cdot q^2$

$d=a\cdot q^3$

$x_{1,2} = \frac{2aq\pm\sqrt{4a^2q^2-4a^2q^2}}{2a} = q \Rightarrow$

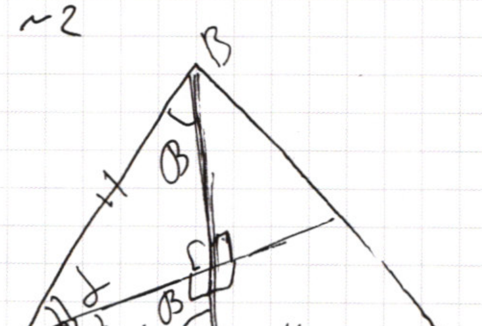
$d = x_{1,2} = a\cdot q^3 = q \Rightarrow a\cdot q^2 = 1 \Rightarrow c = 1$

~~$16m^2 - 84m + 36m^2$~~ ~~$\frac{23}{24} = \sqrt{\frac{23}{24}}+6$~~

~~$81 - 117 + 36$~~

Ответ: 1

№2



$AB+BC+CA=900$

$AB \in N$ по условию $\Rightarrow$

AC - чётное и $=2AB \Rightarrow$

$AB+2AB+BC=900$

$3AB = 900-BC$

$AB = \frac{900-BC}{3} = 300 - \frac{BC}{3}$

т.к AB-целое $\Rightarrow$

по неравенству △

$3AB > CB \Rightarrow$

$CB \in [449; 1]$

$BC \,\vdots\, 3$ } $\Rightarrow$

среди чисел 1-449

$[\frac{449}{3}] = 149$ делятся на 3 $\Rightarrow$ Возможно 149 вариантов

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

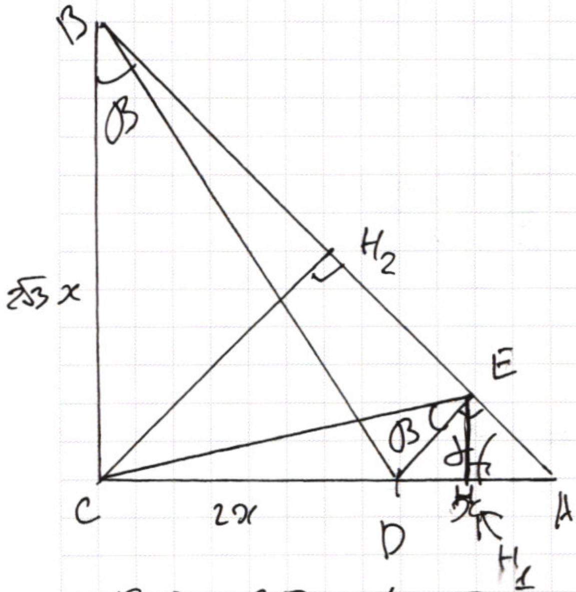
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



а) Найти $tg\,\alpha$, если $\beta = 30^\circ$, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle BED = 90^\circ$, $CD : DA = 2:1$

1) четырёхугол. BEDC – вписаный, т.к $\angle BED = 90^\circ$, $\angle BCD = 90^\circ \Rightarrow$ углы опирающиеся на дугу $\frown CD$ равны, $\Rightarrow \angle CBD = \beta \Rightarrow$

$BC = CD \cdot ctg\,\beta = 2x \cdot ctg\,30^\circ = 2\sqrt{3}x \Rightarrow$

$tg\,\alpha = \frac{2\sqrt{3}x}{3x} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

б) $BA = \sqrt{BC^2 + CA^2} = x\sqrt{4 \cdot 3 + 3 \cdot 3} = x\sqrt{3 \cdot 7} = \sqrt{21} \cdot x$

$BA \cdot H_2C = BC \cdot AC = x\sqrt{21} \cdot H_2C = 2\sqrt{3} \cdot 3x^2 = 6\sqrt{3}x^2 \Rightarrow$

$H_2C = \frac{6\sqrt{3}x^2}{\sqrt{21}x} = \frac{6}{\sqrt{7}}x = \frac{6\sqrt{7}}{7}x$

ΔBCA и ΔDEA подобны по 2 углам: $\angle\alpha$ и $\angle = 90^\circ \Rightarrow$

$\frac{H_2C}{H_1E} = \frac{AB}{AD} \Rightarrow H_1E = H_2C \cdot \frac{AD}{AB} = \frac{6}{\sqrt{7}}x \cdot \frac{x}{\sqrt{21}x} = \frac{6}{7\sqrt{3}}x$

$S_{\Delta CDE} = \cancel{2x} \cdot CD \cdot H_1E \cdot \frac{1}{2} = 2x \cdot \frac{6}{7\sqrt{3}}x \cdot \frac{1}{2} = \frac{6}{7\sqrt{3}}x^2$

$AC = \sqrt{7} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{7}}{3} \Rightarrow x^2 = \frac{7}{9}$

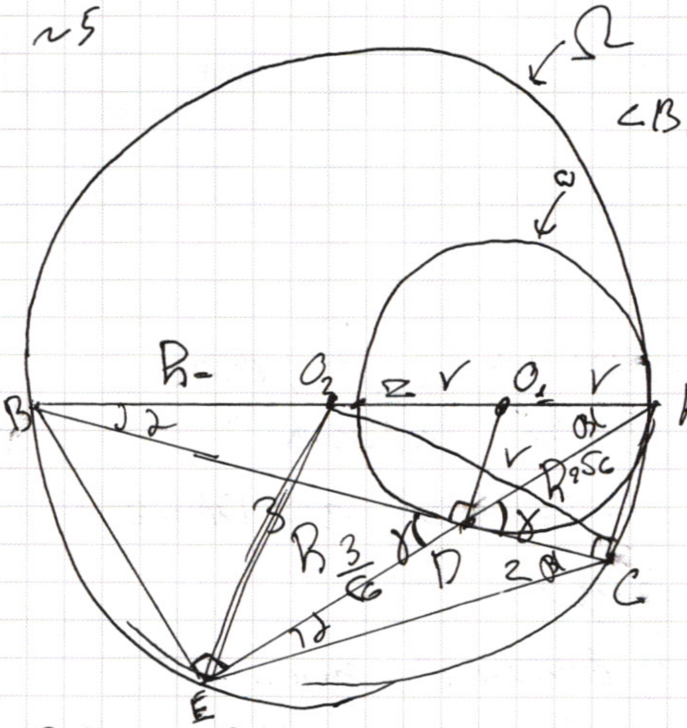
$\Rightarrow$

$S_{\Delta CDE} = \frac{7}{9} \cdot \frac{6}{7\sqrt{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

№5



BD - касательная к ω ⇒

$\angle BDO_1 = 90^\circ$

BA - диаметр ⇒

$\angle BCA = 90$

} ⇒

$\triangle BDO_1 \overset{k}{\sim} \triangle BCA$ по $\angle ABC$ и $\angle = 90^\circ$

$k = \frac{5}{3}$ ⇒

$\frac{BO_1}{BA} = \frac{3}{5}$ ⇒

$BO_1 = 2R - r = 3x$

$BA = 2R = 5x$

} ⇒ $r = 2x = 4y$

$R = 2{,}5x = 5y$

$DB^2 = BZ \cdot BA$ ~~⇒ BD = 2R~~

$BZ = 2R - 2r = 10y - 8y = 2y$

$BA = 2R = 10y$

} ⇒ $20y^2 = 9$

$y^2 = \frac{9}{20} = \frac{3^2}{2^2 \cdot 5}$ ⇒

$y = \frac{3}{2\sqrt{5}}$ ⇒

$r = 4y = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$

$R = 5y = \frac{3\sqrt{5}}{2}$

⇒ $BA = 3\sqrt{5}$

$S_{BACE} = S_{BDE} + S_{ADC} + S_{ADB} + S_{CDE}$

$AC = OD \cdot \frac{5}{3} = r \cdot \frac{5}{3} = \frac{6\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{5}{3} = \frac{6\sqrt{5}}{3}$ ⇒ $AD = \frac{36 \cdot 5}{9} + 4 =$

$\frac{36 \cdot 5}{9} + 36 = \frac{6\sqrt{6}}{3} = 2\sqrt{6}$ ⇒ $2\sqrt{6} \cdot AE$

$\triangle BDA \sim \triangle ECD$ по углам γ и β, опирающимся на одни дуги

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{BD}{DE} \Rightarrow \frac{2\sqrt{6}}{2} = \frac{3}{DE} \Rightarrow \frac{3}{DE} = \sqrt{6} \Rightarrow DE = \frac{3}{\sqrt{6}}$

$\cos\gamma = \frac{2\sqrt{6}}{2} = \frac{3}{3} = \frac{1}{\sqrt{6}} \Rightarrow \sin\varphi = \sqrt{1 - \frac{1}{6}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$

$\sin(180 - \varphi) = \sin(\varphi) \Rightarrow \sin\angle BDE = \sin\angle EDC = \sin\angle CDA = \sin\angle ADB$

$\Rightarrow S_{BACE} =$

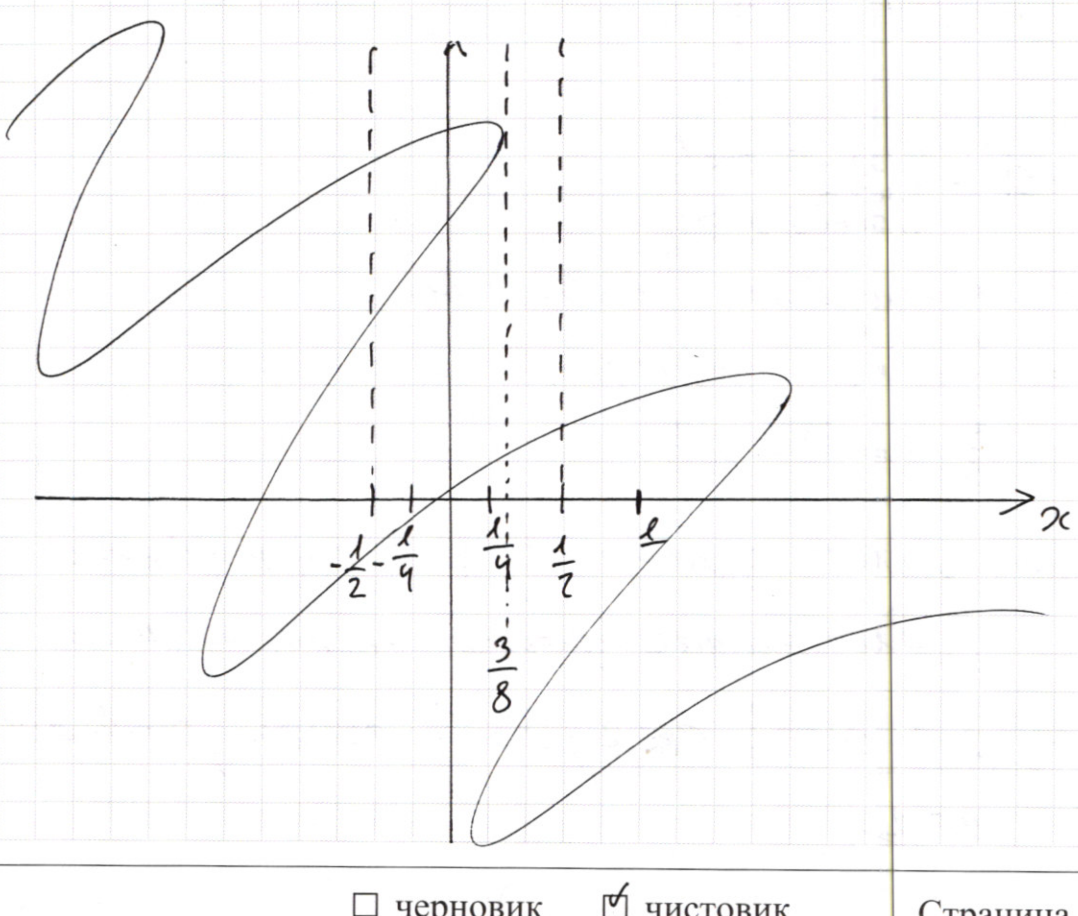
$= \frac{1}{2}\sin\gamma(ED\cdot DC + DC\cdot DA + DA\cdot DB + DB\cdot DE) =$

$= \frac{1}{2}\sin\gamma\left(\sqrt{6} + 4\sqrt{6} + 6\sqrt{6} + \frac{9}{\sqrt{6}}\right) =$

$\frac{1}{2\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}(6 + 24 + 36 + 9) = \frac{\sqrt{5}}{12}(75) = \frac{75\sqrt{5}}{12} = \frac{5^2\cdot 3\sqrt{5}}{3\cdot 4} =$

$= \frac{25\sqrt{5}}{4}$

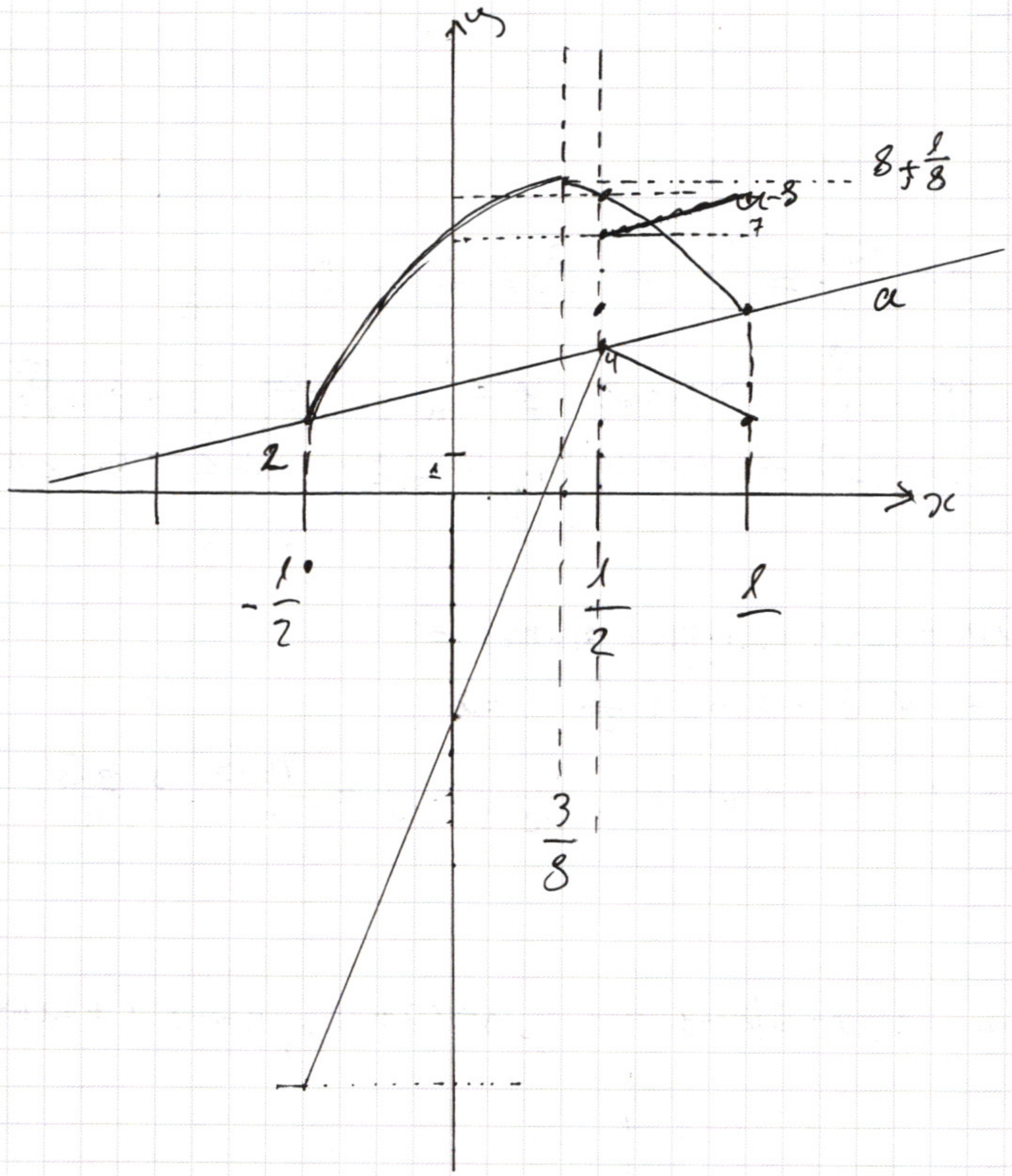
№6 Отобразим $18x - 6|2x-1| = y$, $y = ax + b$, $y = -8x^2 + 6x + 7$



☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)



$3x-6|2x-1| = \begin{cases} 20x-8, & x<\frac{1}{2} \\ -4x+6 & \\ \cancel{2x+6} & x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$

$-8x^2+6x+7$ – парабола с ветвями вниз

при $x=-\frac{1}{2}$, $=2$ при $x=1$, $=5$

при $x=\frac{3}{8}$; $=\frac{65}{8}=8\frac{1}{8}$

Графически можно заметить, что единственная прямая, удовлетворяющая условию – есть прямая a

т.к в $\cancel{\frac{1}{2}\,a}$ $x=-\frac{1}{2}$ $a(x)=2$, $x=\frac{1}{2}$ $a(x)\geq 4$, $x=1$ $a(x)\leq 5 \Rightarrow$

$\cancel{\Rightarrow}$ $b=3$ $a=2$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

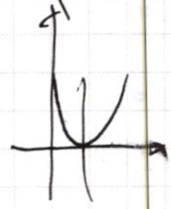
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases} \qquad x-6y\geq 0$$

$$\begin{cases} x^2-12y+36y^2=xy-6y-x+6 \\ x^2+2y-12x-4y+20=0 \end{cases}$$

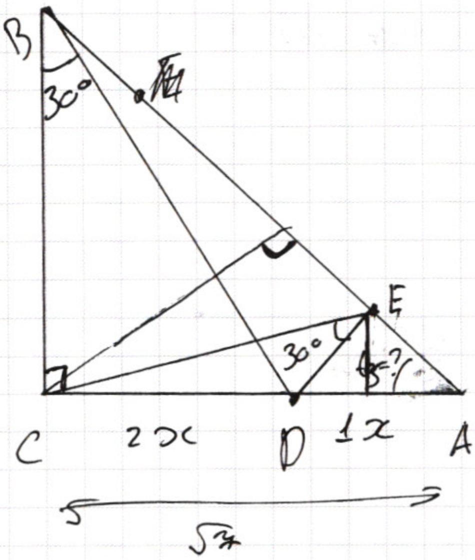


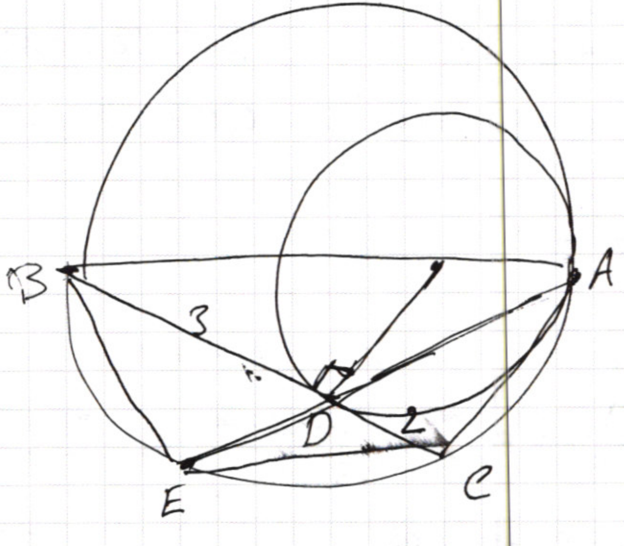
$x=\frac{-b}{2a}=\frac{-2}{-2}=1$

$(x-1)^2=x-2+1$

$x-6y=\sqrt{(x-6)(y-1)}$

№4





D $R(R-2r)=9$

$8x-6\cdot(1-2x)=8x-6+12x=\cancel{4x}\,2x-6x$

$-8x+6+7=5 \qquad 1 \qquad -\frac{6}{16}=\frac{3}{8} \qquad \frac{1{,}5}{4}$

$=\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot 8\cdot\cancel{3x}-3+7 \qquad \cancel{4\cdot 2-3+7=9-3=6}$

$-8+6+7=-2+7=-5$

$\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot -8\mp 3+7= \qquad -8+6+7$

$-2-3+7$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

~~624~~

$2x-1<0$

$2x<1$

$x<\frac{1}{2}$

$\cancel{|x|}<\frac{1}{2}\ x\frac{1}{2}$

$8x-12x+6=$

$-4x+6$

$x>\frac{1}{2}$

$8x-6(1-2x)$

$8x-6+12x=20x-6$

$10-6=4$

$\cancel{10x}-10-6=-16$

$8x-6x+6$

$2x+6$

$1+6=7$

$2+6=8$

$8x-6(2x-1)$

$8x-12x+$

$-2-3+7=2$

$-8+6+7=13-8=5$

~~$4-12\cdot 2+20=0$~~

~~$100+8-120-8+20=0$~~

$-8x^2+\frac{6\cdot 3}{8}+7$

$-8\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^2+\frac{9}{4}+7$

$7\cdot 8=49+7=56$

$-\frac{9}{8}+\frac{9}{4}+7=\frac{56+18-9}{8}=\frac{56+9}{8}=\frac{65}{8}\approx$

$-2+\frac{3}{6}+7=13-2=\cancel{18}$

$2=\sqrt{6-2}$

$\frac{1}{2}=\cancel{2x}\frac{1}{2}$

$m=1\Rightarrow$

$y=0$

$n=2$

$x=\sqrt{6-x}$

$x^2-6+x=0$

$x=$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 ~~№7~~ $n^2+2m^2=18$

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(p)=[\frac{p}{2}]$ если p-простое

~~Ответ к задаче 3: $(x; y)$~~

$\left(\sqrt{\frac{2}{747}}+6; \sqrt{\frac{18}{83}}+1\right)\left(-\sqrt{\frac{2}{747}}+6; -\sqrt{\frac{18}{83}}+1\right)$

$\left(\frac{25}{4}; 2\right); \left(\frac{23}{24}; 0\right)$

1) $n=9m$ $\qquad$ $n=4m$

$81m^2+2m^2=18$ $\qquad$ $16m^2+2m^2=18$

$83m^2=18$ $\qquad$ $18m^2=18$

$\begin{cases} m=\pm\sqrt{\frac{18}{83}} \\ n=\pm 9\sqrt{\frac{18}{83}} \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} m=\pm 1 \\ n=\pm 4 \end{cases}$

Делаем обратную замену, учитывая одз даём ответ:

Ответ:

$\left(\pm\sqrt{\frac{18}{83}}+1; 9\sqrt{\frac{18}{83}}+6\right)$; $\cancel{\left(-\sqrt{\frac{18}{83}}+1; -9\sqrt{\frac{18}{83}}+6\right)}$

$\cancel{(2; 10)}$; $(0; 2)$

каждая пара обозначает решение $(y; x)$ системы

№3

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$$

(1) $x-6y=\sqrt{(x-6)(y-1)}$

(2) $\cancel{x^2-2\cdot 6x+\sqrt{6}=x^2-2\cdot 6x+\sqrt{6}+\sqrt{2}y^2-2\cdot 2y+\sqrt{2}-\sqrt{2}-\sqrt{6}+20=0}$

$\cancel{(x-\sqrt{6})^2}$

$x-6\cdot 2x+36+(\sqrt{2})^2y^2-\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}y+\sqrt{2}^2-36-2+20=0$

$(x-6)^2+2(y-1)^2-18=0$

$x-6=n \qquad y-1=m$

$$\begin{cases} n^2+\sqrt{2}m^2=18 \\ n+6-6(m+1)=\sqrt{nm} \end{cases} \qquad \begin{cases} n^2+2m^2=18 \\ n-6m=\sqrt{nm} \end{cases} \quad n\cdot m>0$$

$n^2-12nm+36m^2=nm \Rightarrow n^2-13nm+36m^2=0$

$n=\dfrac{13m\pm\sqrt{169m^2-144m^2}}{2}=\dfrac{(13\pm 5)m}{2}=9m;\ 4m$

1) $n=9m$

$81m^2+\sqrt{2}m^2=18$

$81m^2+\sqrt{2}m^2=18$

$(81+\sqrt{2})m^2=18$

$m^2=\dfrac{18}{81+\sqrt{2}}$

$m=\pm\sqrt{\dfrac{18}{81+\sqrt{2}}}$

$81m^2+2m^2=18$

$83m^2=18$

$m^2=\dfrac{18}{83}$

$$\begin{cases} m=\pm\sqrt{\dfrac{18}{83}} \\ n=\pm\sqrt{\dfrac{2}{83\cdot 9}} \end{cases} \text{(2 пары)}$$

$n=4m$

$16m^2+2m^2=18$

$m^2=1$

$$\begin{cases} m=\pm 1 \\ n=\pm\dfrac{1}{4} \end{cases} \text{(2 пары)}$$

$$\begin{cases} x=\pm\sqrt{\dfrac{2}{747}}+6 \\ y=\pm\sqrt{\dfrac{18}{83}}+1 \end{cases} \text{(2 пары)}$$

$$\begin{cases} x=\pm\dfrac{1}{4}+6 \\ y=\pm 1+1 \end{cases} \text{(2 пары)}$$

Ответ на обратной стороне (страница_)