МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1. $b_1 \quad b_1q \quad b_1q^2 \quad b_1q^3$

$a \quad b \quad c \quad q$ $\quad ax^2-2bx+c$

$ax^2-2bx+c=0$

$x^2-2\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$

$\cancel{x^2-\frac{2}{b}a}$ $x^2-2\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{a^2}-\frac{b^2}{a^2}+\frac{c}{a}=0$

$\cancel{x^2-2b}$ $(x-\frac{b}{a})^2-\frac{b^2+ca}{a^2}=0$

$ax^2-2bx+c$

$b_1x^2-2b_1qx+b_1q^2=0$

$b_1(x^2-2qx+q^2)=0$

$\cancel{b}(x-q)^2=0 \Rightarrow x=q$

$b_1=a$

$b_1q=b$

$b_1q^2=c$

$b_1q^3=q$

b_1	b_2q	b_1q^2	b_1q^3
a	b	c	q

$c=\sqrt{\frac{bq}{2}}$

$c=b_2q$ $\Leftrightarrow$

$\cancel{b_3=c}$

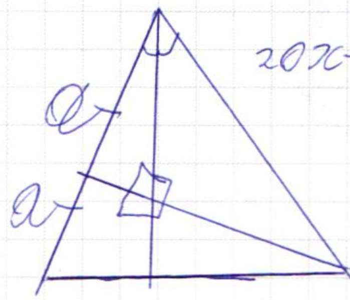
$c=b_3 \Rightarrow d=b_3q=q$

$ax^2-2bx+c$

$D=4b^2-4ac$

$\left[\begin{array}{l} 8x-12x+6; x\geq\frac{7}{2} \\ 8x+12x-6; x<\frac{7}{2} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} -4x+6; x\geq\frac{7}{2} \\ 20x-6; x<\frac{7}{2} \end{array}\right.$



$20x-6=2(10x-3$

$y=8x-6|2x-7|$

$6|2x-7|=y-8x$

$72x-36=y^2-16xy+64x^2 \Leftrightarrow$

$k^2-73tk+36t^2=0 \mid : t^2$

$t^2 \quad \frac{k^2}{t^2}-73\frac{k}{t}+36=0$

$\frac{k^2}{t^2}-73\frac{k}{t}+36=0$

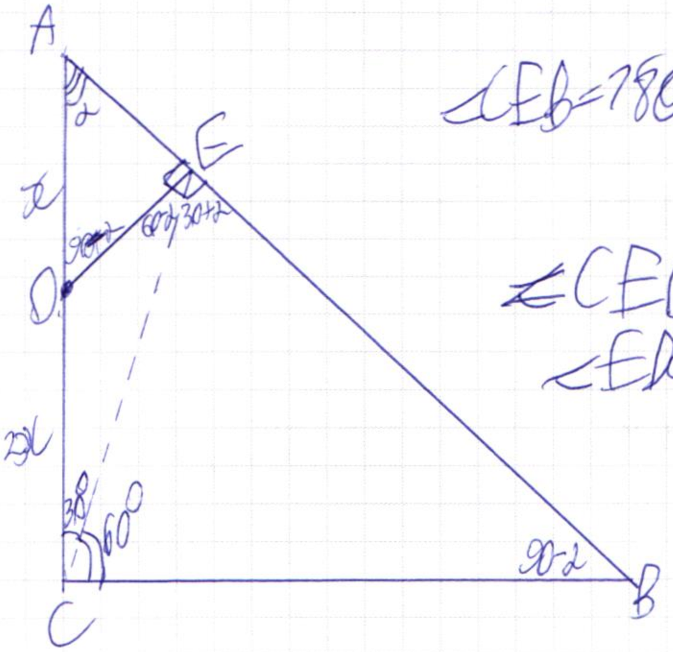
$\frac{k}{t}=m$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

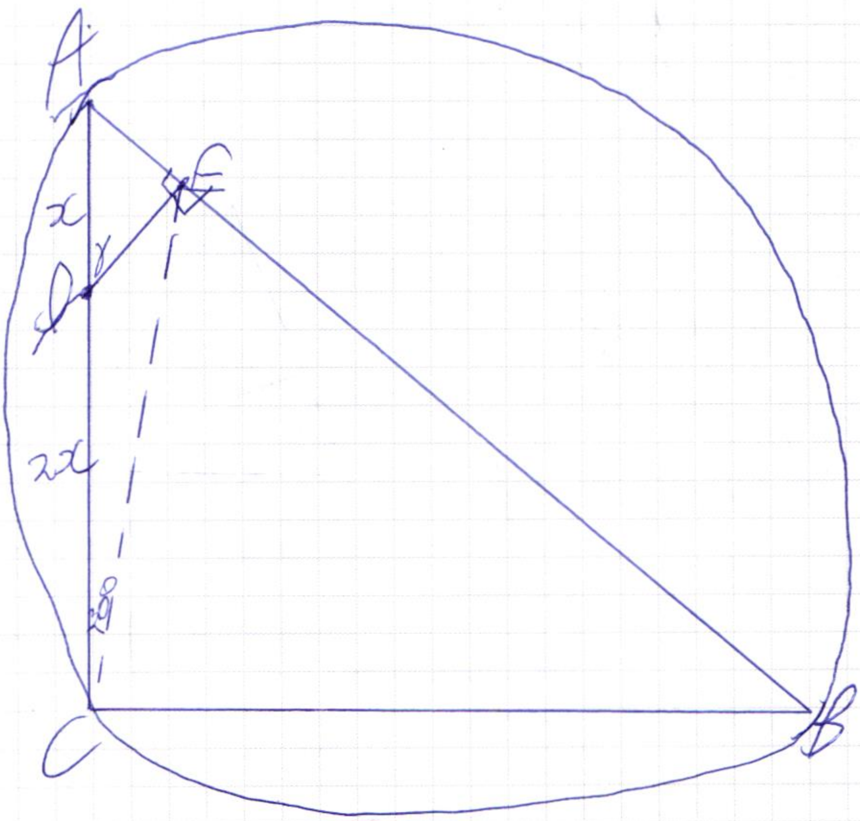
(Нумеровать только чистовики)



$\angle CEB = 180-(60+90-\alpha) = 180-(150-\alpha) = 30+\alpha$

$\angle CED = 90-30-\alpha = 60-\alpha$

$\angle EDC = 180-(30+60-\alpha) = 90+\alpha$



$\begin{array}{r} 49 \\ \times\ 3 \\ \hline 147 \end{array}$

$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$

$4\sqrt{3} - \frac{7}{3\sqrt{3}} = \frac{63-7}{3\sqrt{3}} = \frac{62}{3\sqrt{3}}$

$\frac{1}{\cancel{27}\ 3^3} - \frac{7}{\cancel{63}\ 7\cdot 3^2} = \frac{\sqrt{190}}{63}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

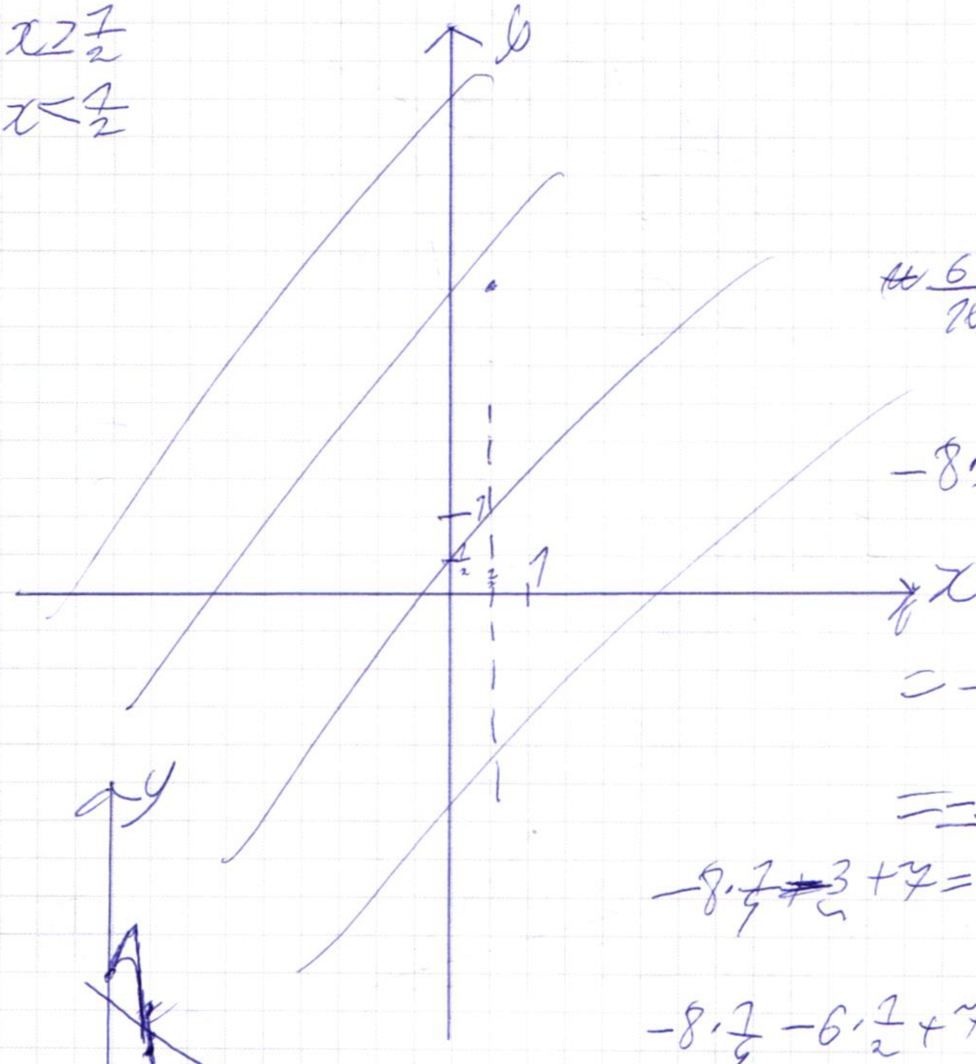
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left[\begin{array}{l} -4x+6;\ x \geq \frac{7}{2} \\ 20x-6;\ x<\frac{7}{2} \end{array}\right.$$



$\frac{6}{10}=\frac{3}{4}$

$-8\cdot\frac{9}{8^2}+6\cdot\frac{3}{8}+7=$

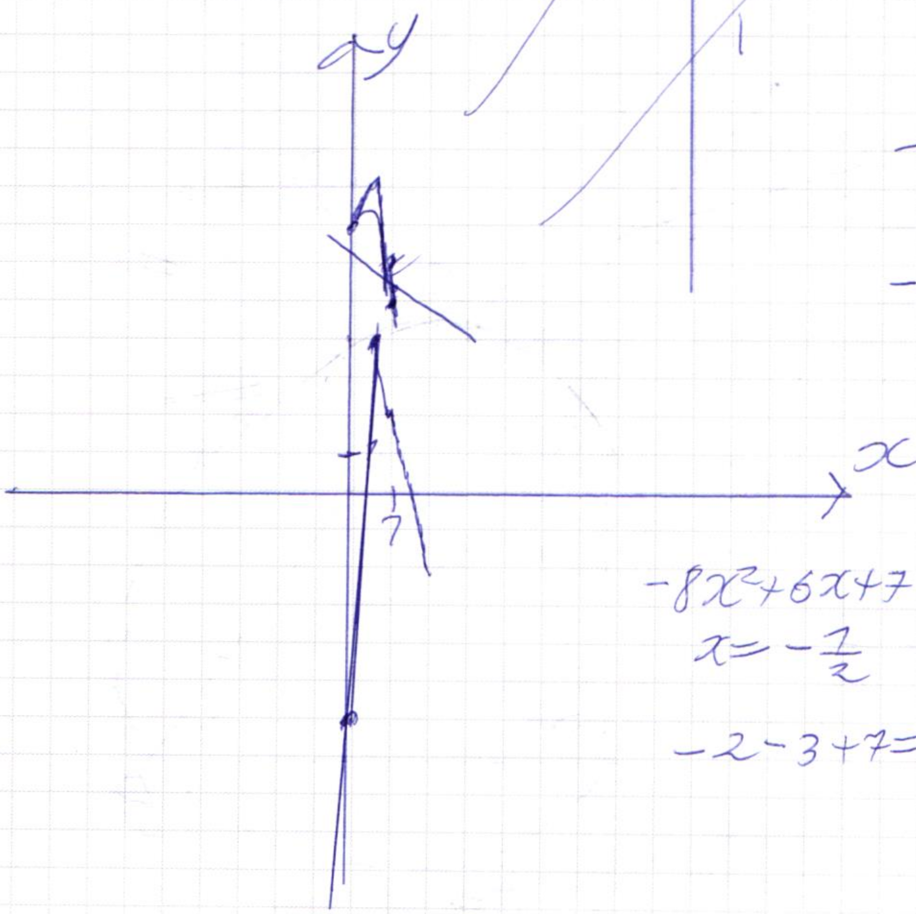
$=-\frac{9}{8}+\frac{9}{4}+7=$

$=\frac{-9+18}{8}+7=7\frac{9}{8}=8\frac{1}{8}=$

$-8\cdot\frac{7}{4}\cancel{+}\frac{3}{2}+7=-2+10=8$

$-8\cdot\frac{1}{4}-6\cdot\frac{1}{2}+7=$

$=-2-3+7=2$



$-8x^2+6x+7$

$x=-\frac{1}{2}$

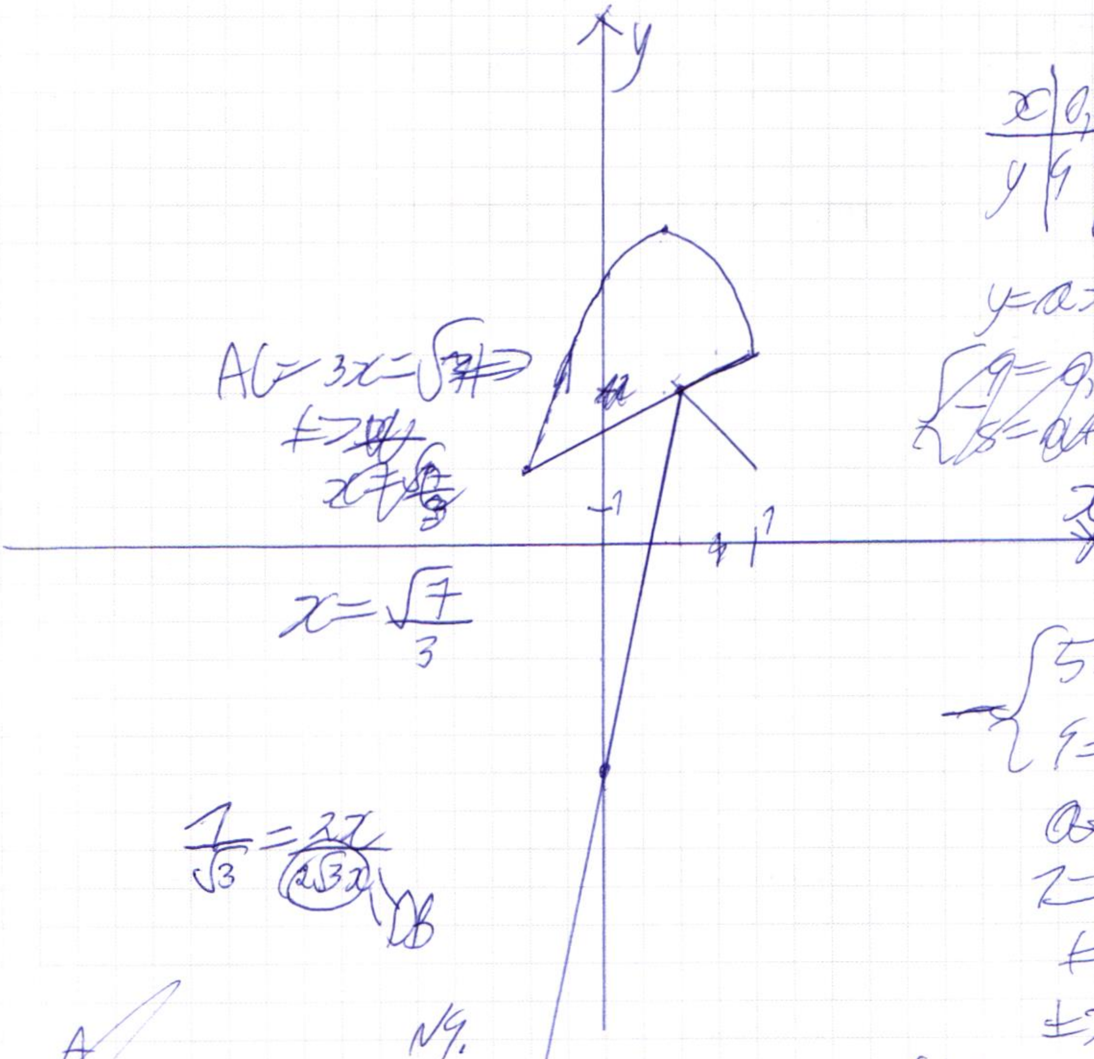
$-2-3+7=2$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



x	0,5	1
y	9	5

$AC = 3x = \sqrt{7} \Rightarrow$

$x = \frac{\sqrt{7}}{3}$

$y = ax + b$

$$\begin{cases} 5 = a + b \\ 9 = 0{,}5a + b \end{cases}$$

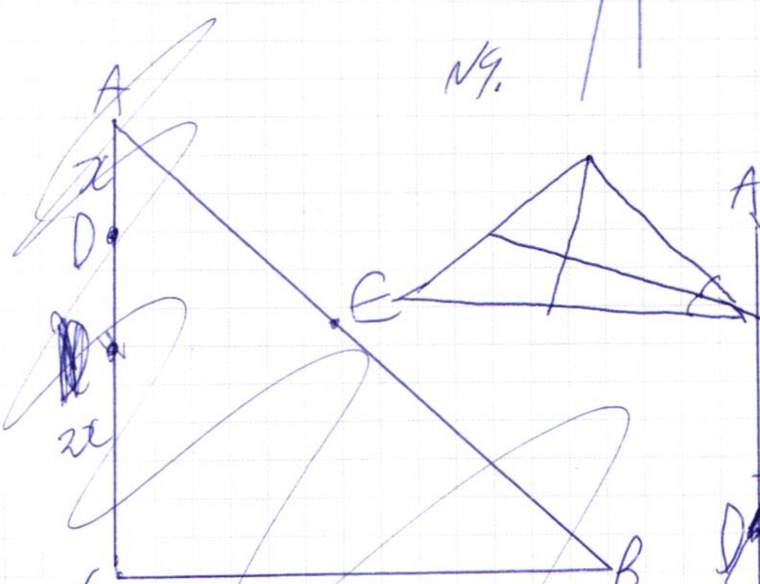
$\Leftrightarrow a = 2$

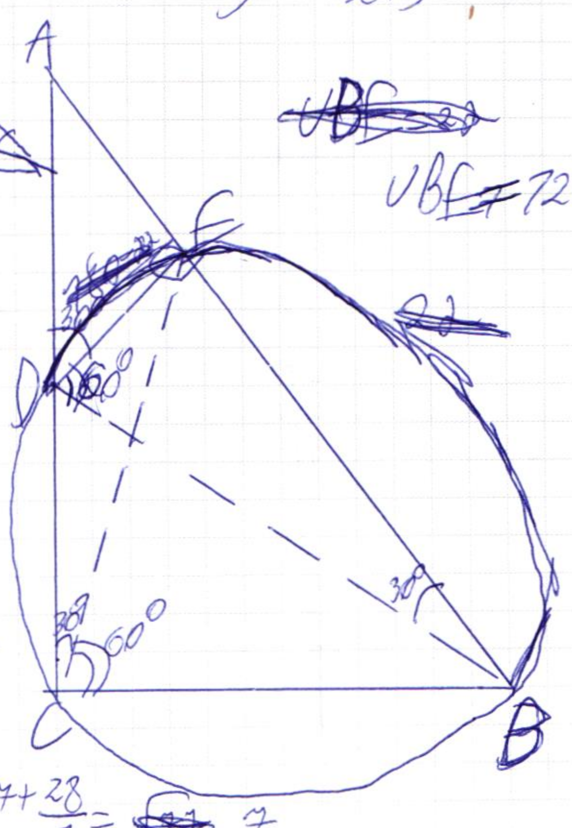
$\Leftrightarrow b = 3$

$y = 2x + 3$

$\frac{7}{\sqrt{3}} = 2x$

№9.





$\angle BE = 120^0$

$tg\,30^0 = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$28 + 49 = 77$

$AC^2 + BC^2 = 7 + \frac{9 \cdot 28}{9 \cdot 3} = 7 + \frac{28}{3} = \frac{7}{\sqrt{3}}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} & 1) \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 & 2) \end{cases}$$

~~1) $x-6y=\sqrt{y(6}$~~

~~1) $x-6y=\sqrt{y(6-x)}=(6-x)$~~

1) $x-6y=\sqrt{y(x-6)-(x-6)}$

$x-6y=\sqrt{(y-1)(x-6)}$

$x^2+2y^2-12x-4y+20=0$

$(x^2-12x+36)-36+20+2(y-1)^2-2=0$

$(x-6)^2+2(y-1)^2-18=0$

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{(y-1)(x-6)} \\ (x-6)^2+2(y-1)^2-18=0 \end{cases}$$

$x-6=k \Rightarrow x=6+k$

$y-1=t \Rightarrow y=1+t$

$$\begin{cases} 6+k-6(1+t)=\sqrt{tk} \\ k^2+2t^2-18=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{6+k-6}-6t=\sqrt{tk} \\ k^2+2t^2-18=0 \end{cases}$$

~~$k-6t=\sqrt{tk}$~~

~~$k^2-12tk+36t^2=tk$~~

$$\begin{cases} k^2-12tk+36t^2=tk \\ k^2-13tk+36t^2=0 \end{cases}$$

$2y^2-2\cdot 2y+1-1$

$2y^2-4y=2(y^2-2y+1-1)=$

$=2((y-1)^2-1)=$

$=2(y-1)^2-2$

$k=9\sqrt{\frac{83}{18}}=$

$=\cancel{\sqrt{\frac{83}{18}}}=\frac{9\sqrt{83}}{3\sqrt{2}}=$

$=3\sqrt{\frac{83}{2}}$

$x=6+k$

$3\sqrt{\frac{83}{2}}-6\sqrt{\frac{83}{18}}=$

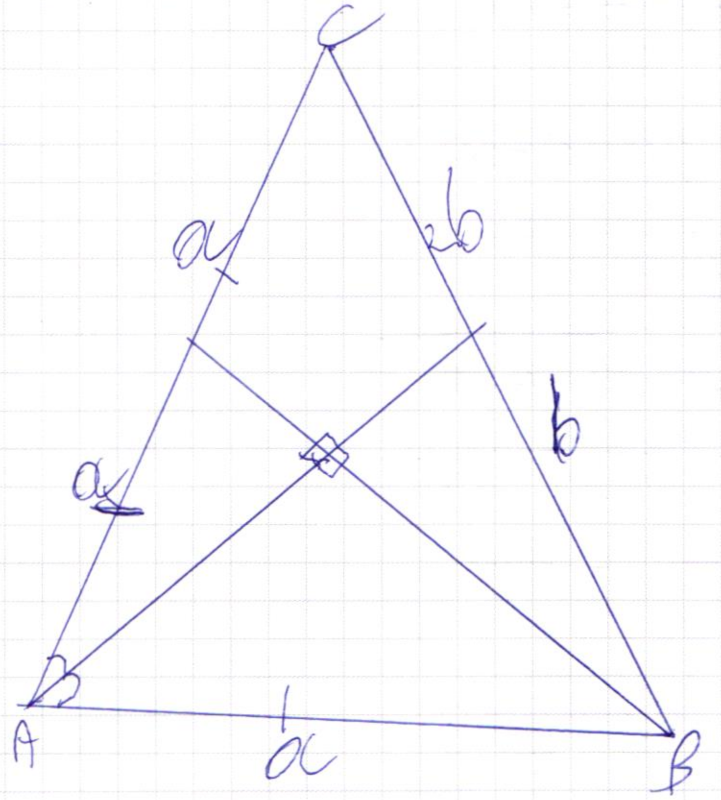
$=\sqrt{\frac{83}{2}}-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{83}{2}}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$3a+3b=900 \Rightarrow a+b=300$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) $k = 9t$

$83t^2 = 78 \Rightarrow t = \cancel{\pm}\sqrt{\frac{78}{83}} \Rightarrow k = \cancel{\pm} 9\sqrt{\frac{78}{83}} \Rightarrow x = 6 + 9\sqrt{\frac{78}{83}}$

$y = 7 + \sqrt{\frac{78}{83}}$

3) $k = 9t \Rightarrow \cancel{t = \pm 7 \Rightarrow k = \pm 9}$ $t = -7;\ k = -9 \Rightarrow$

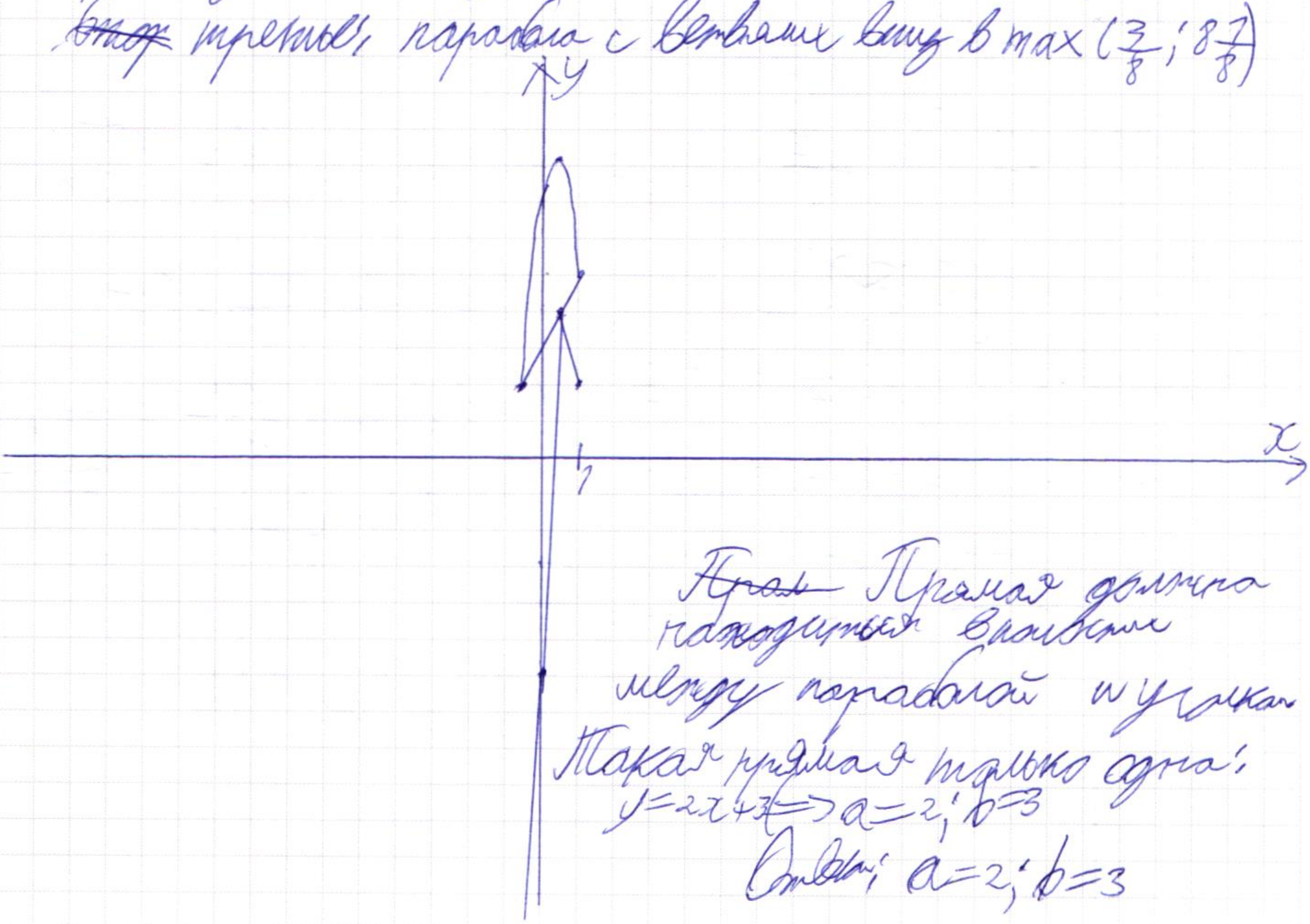
$\Rightarrow x = 2;\ y = 0$. Ответ: $(2;0)$; $\left(6+9\sqrt{\frac{78}{83}};\ 7+\sqrt{\frac{78}{83}}\right)$

№6.

$8x - 6|2x-7| \le ax+b \le -8x^2+6x+7$

первое: уголок вниз с максимумом в $(0,5;9)$

~~втор~~ третье: парабола с ветвями вниз в max $\left(\frac{3}{8};\ 8\frac{7}{8}\right)$



~~Прям~~ Прямая должна находиться вплотную между параболой и уголком.

Такая прямая только одна:

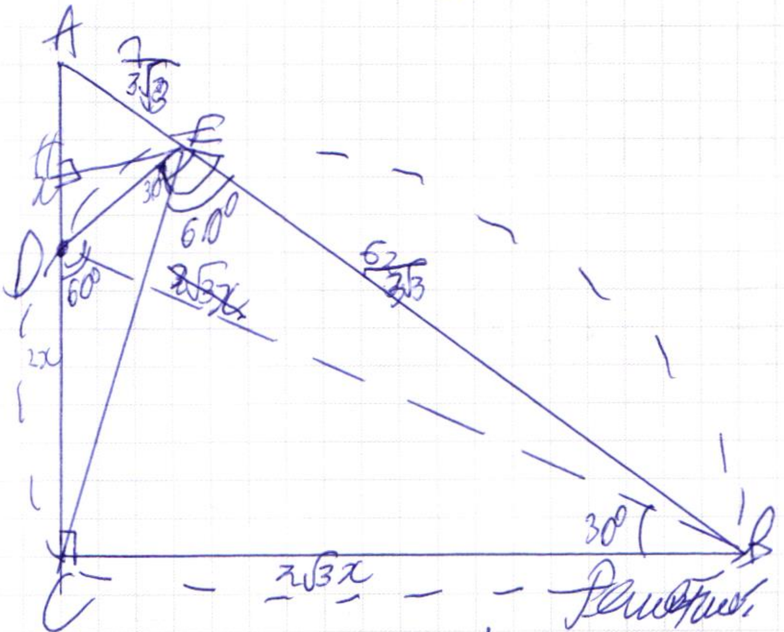
$y = 2x+3 \Rightarrow a = 2;\ b = 3$

Ответ: $a = 2;\ b = 3$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

№1.



Дано:
$AD:AC = 1:3$
$DE \perp AB$
$\angle CED = 30^\circ$
~~док-ть~~ $AC = \sqrt{7}$
Найти
а) $tg\angle BAC$ — ?
б) S_{CED} — ?

Решение.

а) $\angle DEB + \angle DCB = 180^\circ \Rightarrow$ можно описать окружность вокруг $DEBC \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle DBC = 30^\circ = \angle DEC \Rightarrow \cancel{DB} \; BC = 2\sqrt{3}x \Rightarrow$

$\Rightarrow tg\angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{2\sqrt{3}x}{3x} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

б) 1) $AD = \frac{\sqrt{7}}{3}$, $DC = \frac{2\sqrt{7}}{3}$, $BC = \frac{2\sqrt{21}}{3} \Rightarrow AB = \frac{7\sqrt{3}}{3}$ (по теор. Пифагора)

2) $AD \cdot AC = AE \cdot \cancel{EB}\,AB = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3} \Rightarrow AE = \frac{2\frac{1}{3}}{AB} = \frac{2\frac{1}{3}}{7\sqrt{3}} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$

3) проведём HE

4) $HE \parallel CB \Rightarrow \frac{AE}{EB} = \frac{AH}{HC} = \frac{1}{62} \Rightarrow$

$\Rightarrow 62AH = HC \Rightarrow 62AH = \sqrt{7} - AH \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{7}}{63} \Rightarrow HE = \frac{\sqrt{290}}{63}$

5) $S_{DEC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{190}}{63} \cdot \frac{2\sqrt{7}}{3} = \frac{7\sqrt{20}}{9 \cdot 7 \cdot 3} = \frac{\sqrt{20}}{27}$

Ответ: $tg\angle BAC = \frac{2\sqrt{3}}{3}$; $S_{DEC} = \frac{\sqrt{20}}{27}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1. $b_1=a$; $b_1q=b$; $b_1q^2=c$; b_1q^3 – корень $ax^2-2bx+c$

подставим в уравнение значения a, b, c:

$b_1x^2-2b_1qx+b_1q^2=0$, ~~сократим~~ разделим на b_1

$x^2-2qx+q^2=0$

$(x-q)^2=0 \Rightarrow x=q \Rightarrow$ четвертый член – знаменатель прогрессии $\Rightarrow c=b_3$; $d=b_3q$ или $d=q \Rightarrow b_3q=q \,|\cdot\frac{1}{q} \Rightarrow$

$\Rightarrow b_3=1$. Ответ: 1.

№3.
$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$$

$x-6=k \Rightarrow x=6+k$

$y-1=t \Rightarrow y=1+t$

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{(y-1)(x-6)} \\ (x-6)^2+2(y-1)^2-18=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k-6t=\sqrt{tk}\ ^{1)} \\ k^2+2t^2-18=0 \end{cases}$$

1) $k^2-12tk+36t^2=tk$

$k^2-13tk+36t^2=0 \,|:t^2$

$\left(\frac{k}{t}\right)^2-13\left(\frac{k}{t}\right)+36=0$

$D=169-144=5^2 \Rightarrow \frac{k}{t}=\frac{13\pm5}{2}=\left[\begin{array}{l}9\\4\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}k=9t\ ^{2)}\\k=4t\ ^{3)}\end{array}\right.$

2) $k=9t$

$\cancel{9t - 81t^2 - 6t} \quad \cancel{9t}$ $83t^2=18 \Rightarrow t=\pm\sqrt{\frac{18}{83}} \Rightarrow k=3\sqrt{\frac{83}{2}}$

$\cancel{\Rightarrow x=6+3\sqrt{\frac{83}{2}};\ y=1+\sqrt{\frac{83}{2}};\ 3)\ k=4t \Rightarrow}$ $k=\pm3\sqrt{\frac{83}{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow x=6\pm3\sqrt{\frac{83}{2}};\ y=1\pm\sqrt{\frac{83}{18}};$ 3) $k=4t \Rightarrow 18t^2-18=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow t=\pm1 \Rightarrow k=\pm4$

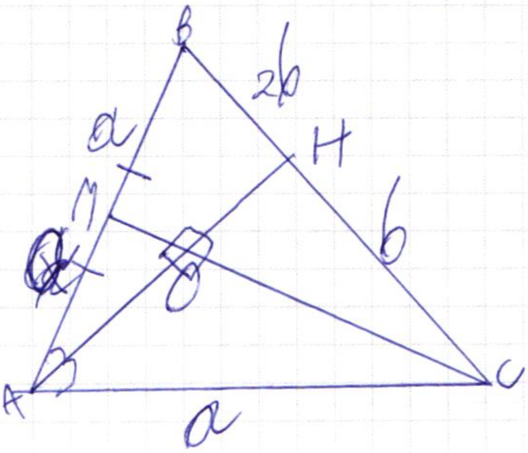
☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 1

(Нумеровать только чистовики)

№2.



$P_{ABC}=900$

MC – медиана в $\triangle ABC$

AH – бис-са в $\triangle ABC$

$AH \perp MC$

1) возьмём AM за a

2) $\angle MAO = \angle OAC$, $AO \perp MC$ $\Rightarrow AM = AC = a$

3) $AM = MB$ (MC – мед) $= AC = a$, 4) возьмём HC за b

5) $\frac{BH}{HC} = \frac{AB}{AC} = \frac{2}{1} \Rightarrow BH = 2b$, 6) $3a+3b=900 \Rightarrow$

$\Rightarrow a+b=300 \Rightarrow a=300-b$, т.к. a и b – $\mathbb{Z}$ и лежат в промежутке $[1; 299]$, то нам подходит 299 вариантов. Ответ: 299 треугольников

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)