МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

© МФТИ, 2022

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание 1

~~Пусть $a=$~~

Пусть $b=aq$ где $q\neq 0$

q - знаменатель геометр прогрессии

тогда $c=aq^2$

Пусть четвертый член $-d=aq^3$ - корень ур-я

тогда

$$ad^2-2bd+c=0$$

$$\Updownarrow$$

$$a\cdot(aq^3)^2-2a\cdot q\cdot a\cdot q^3+aq^2=0$$

$$a\cdot a^2q^6-2a^2q^4+aq^2=0$$

$$a^3q^6-2a^2q^4+aq^2=0$$

$$aq^2(a^2q^4-2aq^2+1)=0$$

$$aq^2(aq^2-1)^2=0$$

$$\left[\begin{array}{l} a=0 \\ q=0 \end{array}\right. \quad \text{либо} \quad \left[aq^2=1 \right.$$

но $q\neq 0$

$a\neq 0$ иначе не геометрическая прогрессия

$\Rightarrow \quad aq^2=1$

$a=\dfrac{1}{q^2}$

Третий член прогрессии $-c$

$c=aq^2=\dfrac{1}{q^2}\cdot q^2=1$

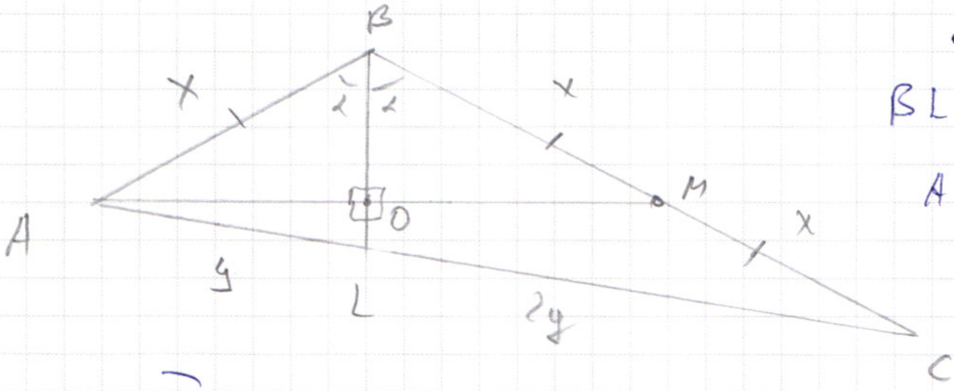
Ответ: 1

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

Задание 2



Дано:

BL – биссектриса

AM – медиана

$P = 900$

кол-во тр – ?

Решение:

Так как $BL \perp AM \Rightarrow \angle AOB = \angle MOB = 90^\circ$

BO – общий

$\angle ABO = \angle OBM = \alpha$

$\Rightarrow \triangle ABO = \triangle BOM$

$\Downarrow$

$AB = BM$

Пусть $AB = BM = MC = x$

По свойству биссектрисы:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AL}{LC} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{Пусть } AL = y, \quad LC = 2y$$

Тогда ~~P = x +~~ $P = AB + BC + AC = x + 2x + 3y =$

$= 3x + 3y = 900$

$3(x+y) = 900 \qquad x+y = 300$

Треугольник существует если ~~то~~ каждая сторона меньше суммы двух других

$$\begin{cases} 3x > 3y \\ 2x + 3y > x \\ x + 3y > 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > y \\ 3y > -x \\ 3y > x \end{cases} \text{т.к. } -x < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > y \\ 3y > x \end{cases} \Leftrightarrow y < x < 3y$$

Тогда

$$\begin{cases} x + y = 300 \\ y < x < 3y \end{cases} \quad x = 300 - y \quad y < 300 - y < 3y \quad \cancel{\text{но } x, y \in Z}$$

$y < 150 \qquad y > 75 \quad y \in [76; 149]$.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x+y=300 \\ y<x<3y \end{cases}$$

$y=300-x$

$300-x<x<900-3x$

$x>150 \quad x<225$

$AC \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

но $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ либо $y \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x \in [151; 224]$.

либо $y = \frac{k}{3}$ где $k \in \mathbb{Z}$.

но тогда по $x+y=300$ $x \notin \mathbb{Z}$. что неверно

тогда если $y \in \mathbb{Z}$. получим количество решений

Если $x=224$ $\Downarrow$ $y=76$ тогда $y<x<3y$

$76<224<228$

верно

$224-151+1=74$

Ответ: 74

Задание 3

$$\begin{cases} ① \; x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ ② \; x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$$

ОДЗ:

$x \geq 6y$

$(x-6y)^2=(\sqrt{xy-6y-x+6})^2$

$x^2-12xy+36y^2=xy-6y-x+6$

$x^2+x-13xy+36y^2+6y-6=0$

$x^2+x(1-13y)+36y^2+6y-6=0$

$$x^2+x(1-13y)+36y^2+6y-6=0$$

$$D=(1-13y)^2-4(36y^2+6y-6)=1-26y+169y^2-144y^2-24y+24=$$

$$=25y^2-50y+25=25(y^2-2y+1)=25(y-1)^2$$

$$x_{1,2}=\frac{13y-1\pm\sqrt{25(y-1)^2}}{2}=\frac{13y-1\pm5|y-1|}{2}=$$

$$=\cancel{13y-1}=\frac{13y-1\pm5(y-1)}{2}$$

$$x_1=\frac{13y-1+5y-5}{2}=9y-3$$

$$x_2=\frac{13y-1-5y+5}{2}=4y+2$$

Рассмотрим $x^2+2y^2-12x-4y+20=0$

$$x^2-12x+2y^2-4y+20=0$$

$$D=144-8y^2+16y-80=-8y^2+16y+64$$

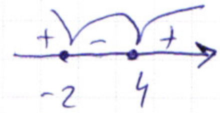
$$x_{1,2}=\frac{12\pm\sqrt{-8y^2+16y+64}}{2}$$

$$-8y^2+16y+64\geq0$$

$$y^2-2y-8\leq0$$

$$D=36$$

$$y_{1,2}=\frac{2\pm6}{2}$$



$y\in[-2;4]$.

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x_1=9y-3\\x_2=4y+2\end{array}\right.\\x\geq6y\\\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{12\pm\sqrt{-8y^2+16y+64}}{2}\end{array}\right.\\\cancel{y\in[-2;4]}\end{cases}$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

I $\quad 9y-3=\frac{12\pm\sqrt{-8y^2+16y+64}}{2}$ если $x=9y-3$

$(18y-18)^2=\left(\pm\sqrt{-8y^2+16y+64}\right)^2 \qquad 18y\geq 18$

$324y^2-648y+324=-8y^2+16y+64$

$332y^2-664y+260=0$

$166y^2-332y+130=0$

$83y^2-166y+65=0$

$D=166^2-4\cdot 83\cdot 65=$

$=27556-21580=5976=36\cdot 166$

$\left(\frac{996-54\sqrt{166}}{166};\ \frac{166-6\sqrt{166}}{166}\right)$ не подходит

$\begin{cases} y_{12}=\frac{166\pm 6\sqrt{166}}{166} \\ x=9y-3=3y(3y-1) \end{cases}$

$\begin{cases} y=\frac{166\pm 6\sqrt{166}}{166} \\ x=\pm 54\sqrt{166} \end{cases}$ но $x\geq 6y$

$x=\frac{996\pm 54\sqrt{166}}{166}$

$\left(\cancel{\frac{54\sqrt{166}}{166}};\ \frac{166-6\sqrt{166}}{166}\right)$ ~~не подходит~~

$x=3\left(\frac{498\pm 18\sqrt{166}}{\cancel{498}\ 166}-1\right)=\cancel{\frac{3\pm 18\sqrt{166}}{498}}=\cancel{\frac{\pm 54\sqrt{166}}{498}}=$

$=3\left(\frac{332\pm 18\sqrt{166}}{166}\right)=$

$=\frac{996\pm 54\sqrt{166}}{166}$

II $\quad x=4y+2=\frac{12\pm\sqrt{-8y^2+16y+64}}{2}$

$(8y-8)^2=\left(\pm\sqrt{-8y^2+16y+64}\right)^2$

$64y^2-128y+64=-8y^2+16y+64$

$72y^2-144y=0$

$y(72y-144)=0$

$\left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=10 \end{array}\right.$ но $x\geq 6y \Rightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=10 \end{cases}$ не подходит

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

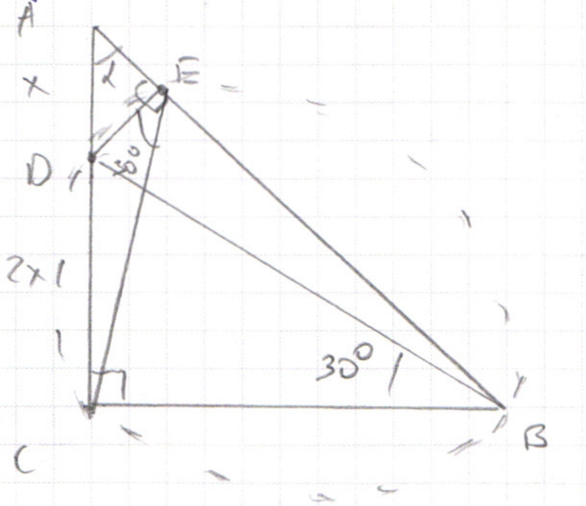
Если $x = \pm 54\sqrt{166}$

$x = 9y - 3$

$\left(\frac{996+54\sqrt{166}}{166}; \frac{166+6\sqrt{166}}{166}\right)$

Ответ: $(2;0)$; $\left(\cancel{54\sqrt{166}}; \cancel{\frac{166+6\sqrt{166}}{166}}\right)$

~~4.~~ Задание 4



Дано:

$\triangle ABC$ - прямоуг

$DE \perp AB$

$AD = x$

$DC = 2x$

$\angle CED = 30°$

$tg\,\alpha$ - ?

Решение:

а) Так как $\angle BCD + \angle BED = 90+90 = 180° \Rightarrow$

$\Rightarrow$ четырехугольник $BCDE$ - вписанный

Проведем BD

$\angle CBD = \angle CED$ (опираются на дугу CD)

$\left\{ \begin{array}{l} \angle BCD \text{ - прямоугольный} \\ \angle CBD = 30° \end{array} \right| \Rightarrow BD = 2CD = 4x$

$CB = \sqrt{16x^2 - 4x^2} = x\sqrt{12}$ (по т. Пифагора)

$tg\,\alpha = \frac{CB}{AC} = \frac{x\sqrt{12}}{3x} = \frac{\sqrt{12}}{3} = \boxed{\frac{2\sqrt{3}}{3}}$

б) $AC = \sqrt{7}$ $\quad S_{\triangle CED}$ - ?

$AD = \frac{\sqrt{7}}{3}$ $\quad DC = \frac{2\sqrt{7}}{3}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

т.к. △AED – прямоуг.

$tg\angle = \frac{ED}{AE} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow ED = \frac{2\sqrt{3}}{3}y$

$AE = y$

По теореме Пифагора:

$\frac{12}{9}y^2 + y^2 = \frac{7}{9}$

$21y^2 = 7$

$y^2 = \frac{1}{3}$

$y = \frac{1}{\sqrt{3}} = AE \quad DE = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}$

По т. косинусов для △CED

$CD^2 = DE^2 + CE^2 - 2 \cdot \cos\angle CED \cdot DE \cdot CE$

$CE = c$

$\frac{28}{9} = \frac{4}{9} + c^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot c$

$c^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}c + \frac{4-28}{9} = 0$

$c^2 - \frac{2\sqrt{3}c}{3} - \frac{24}{9} = 0$

$9c^2 - 6\sqrt{3}c - 24 = 0$

$D = 108 + 36 \cdot 24 = 864 + 108 = 972 = 81 \cdot 12$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

$$C = \frac{6\sqrt{3} \pm \sqrt{81 \cdot 12}}{18}$$

$$C = \frac{6\sqrt{3} \pm 18\sqrt{3}}{18} \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} c_1 = \frac{24\sqrt{3}}{18} = \frac{4\sqrt{3}}{3} = CE \\ c_2 = -\frac{12\sqrt{3}}{18} \text{ - не подходит т.к. отрицател.} \end{array}\right.$$

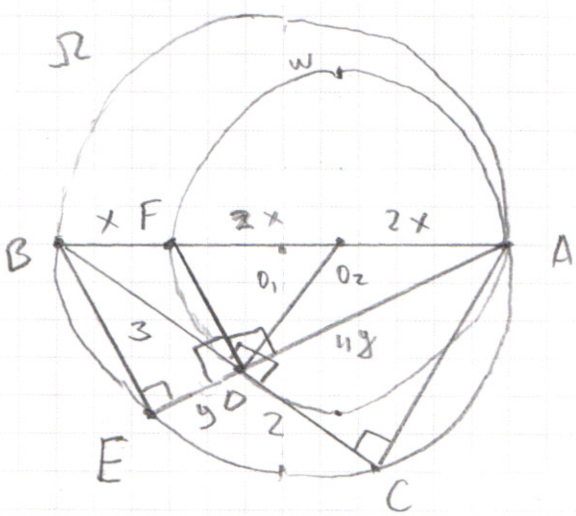
$$S_{\triangle CED} = \frac{1}{2} \cdot DE \cdot CE \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{8\sqrt{3}}{36} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

Ответ: а) $tg\angle BAC = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

б) $S_{\triangle CED} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$

Задание 5



Дано: $CD = 2$

Ω, w — окружности $BD = 3$

AB — диаметр окр Ω

AF — диаметр окр w

AO_2 - ? $S_{\triangle BACE}$ - ?

AO_1 - ?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Решение так как AB диаметр окр Ω, то $\angle BEA = \angle BCA = 90^\circ$

Так как BC – касательная к окр ω $\Rightarrow O_2D \perp BC \Rightarrow$

$\Rightarrow$ т.к. $AC \perp BC$ то

то $O_2D \parallel AC$

Проведем FD, т.к. $\angle FDA$ опирается на AF – диаметр $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle FDA = 90^\circ \Rightarrow FD \perp AE$, а так как $BE \perp AF$ то

то $FD \parallel BE$

$\triangle BO_2D \sim \triangle BAC$ по углу т.к. они прямоугольные ($b\ 90^\circ$)

Тогда $\frac{BD}{BC} = \frac{BO_2}{AB} = \frac{3}{5} \Rightarrow \exists\ BO_2 = 3x \quad AB = 5x$

$O_2A = 2x$

$BF = 5x - 4x = x$

$\triangle AFD \sim \triangle ABE$ по углу т.к. они прямоугольные

$\frac{AF}{AB} = \frac{AD}{AE} = \frac{4}{5} \Rightarrow \exists\ AD = 4y \quad AE = 5y$

$ED = y$

По т. Пифагора:

$BE = (\sqrt{25x^2 - 25y^2})^2 = (\sqrt{9 - y^2})^2$

$AC = (\sqrt{25x^2 - 25})^2 = (\sqrt{16y^2 - 4})^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 25x^2 - 25y^2 = 9 - y^2 \\ 25x^2 - 25 = 16y^2 - 4 \end{cases}$

$-25y^2 + 25 = 9 - y^2 - 16y^2 + 4$

$8y^2 = 12$

$y^2 = \frac{3}{2}$

$y = \sqrt{\frac{3}{2}}$

$AC = \sqrt{16 \cdot \frac{3}{2} - 4} = \sqrt{20}$

$AB = \sqrt{20 + 25} = \sqrt{45}$

$\sqrt{45} = 5x$

$x = \frac{\sqrt{45}}{5} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$

$AO_2 = 2 \cdot x = \frac{6\sqrt{5}}{5}$

$AO_1 = \frac{5}{2}x = \frac{5}{2}\cdot\frac{3\sqrt{5}}{5} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$ $\qquad y = \sqrt{\frac{3}{2}}$

$S_{▱} BACE$

$S_{▱} BACE = S_{\triangle} BAE + S_{\triangle} ACD + S_{\triangle} CDE$

$S_{\triangle} BAE = \frac{BE\cdot AE}{2} = \frac{\sqrt{\frac{15}{2}}\cdot 5\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}}{2} = \frac{5\sqrt{45}}{4} = \frac{15\sqrt{5}}{4}$

$BE = \sqrt{9-y^2} = \sqrt{9-\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{15}{2}}$ $\qquad AE = 5\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}$

$S_{\triangle} ACD = \frac{AC\cdot CD}{2} = \frac{\sqrt{20}\cdot 2}{2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$S_{\triangle} CDE$ - ?

$\sin\angle EDB = \frac{\sqrt{\frac{15}{2}}}{3}$

$\sin\angle CDE = \sin(180-\angle EDB) = \frac{\sqrt{\frac{15}{2}}}{3}$

$S_{\triangle} CDE = CD\cdot DE\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin\angle CDE =$

$= 2\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{\frac{15}{2}}}{3} = \frac{2\sqrt{45}}{12} = \frac{\sqrt{45}}{6} = \frac{3\sqrt{5}}{6} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$S_{▱} BACE = \frac{15\sqrt{5}}{4} + 2\sqrt{5} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{3\sqrt{5}+2\sqrt{5}+15\sqrt{5}}{4} =$

$= \frac{25\sqrt{5}}{4}$

Ответ: Радиус окр Ω - $\boxed{\frac{3\sqrt{5}}{2}}$

Радиус окр ω - $\frac{6\sqrt{5}}{5}$

S четырех уг. BACE - $\frac{25\sqrt{5}}{4}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1√ 2√ 4

$a =$

$b = a\cdot q$

$c = aq^2 = a\cdot\left(\sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2$ $\boxed{1}$

$d = aq^3$

$a(aq^3)^2 - 2aq\cdot aq^3 + aq^2 = 0$

$a^3q^6 - 2a^2q^4 + aq^2 = 0$

$aq^2(a^2q^4 - 2aq^2 + 1) = 0$

$a\cdot q^2(aq^2 - 1)^2 = 0$

$aq^2 = 0$ $\quad aq^2 = 1$

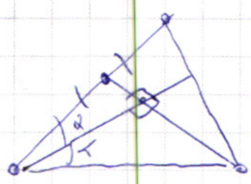
$\left[\begin{array}{l} a = 0 \\ q = 0 \end{array}\right.$ $\quad \left[\begin{array}{l} a = 0 \end{array}\right.$ $q^2 = \frac{1}{a}$

$q = \pm\sqrt{\frac{1}{a}}$

но $q \neq 0$ по опр

$a \neq 0$ по опр

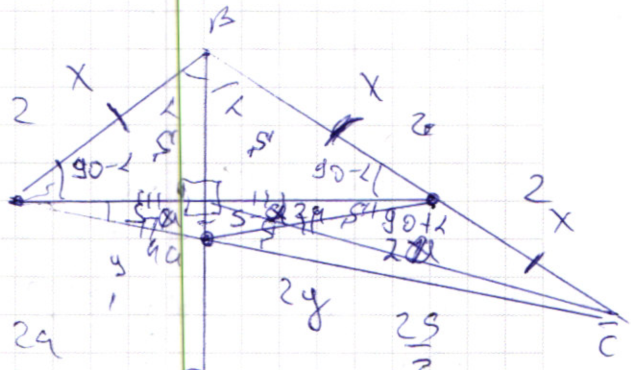
2 $P = 900$



2

3

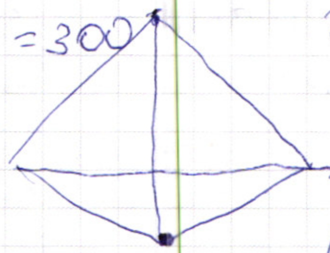
900



2 2x 2y 2a $\frac{2S}{3}$ 3

$3x + 3\cdot y = 900$ $\frac{2}{S}$

$x + y = 300$



$3x > 3y$

$\begin{cases} x > y \\ x + 3y > 2x \\ 2x + 3y > x \end{cases}$

$x = 300 - y$ $\quad x = 1$

$\begin{cases} x + y = 300 \\ y < x < 3y \end{cases}$

$\exists\, x = 2$; $y = 298$

$y < 300 - y$ $\quad y = 299$

$2y < 300$

$y < 150$ $\quad 2x$

$x > 150$

$1\,6$

$3\,y$

$y = 300 - x$

$3000 - x < x$

$x > 150$

$\cancel{\exists\, x = 3}$

$\exists$ $\quad x = 151$

$y = 149$

$2S - 2a = 4a$

$6a = 2S$

$S = 3a$

$a = \frac{S}{3}$

$\begin{cases} x > y \\ 3y > x \end{cases}$

$\boxed{y < x < 3y}$

$900 - 3x > x$

$4x < 900$

$x < 225$

$x = 2$

$y = 1$

$3y = 3$

$x \in [151; 224]$.

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

6б

3 $\begin{cases} x-6y = \sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \quad D= \end{cases}$

$+y^2$

$(x^2-12x+36)+(2y^2-4y+4)-20+y^2=0$

$\frac{12}{5}$

$y\sqrt{2}$ $\qquad y=2$

4

$\begin{cases} (x-6)^2+(y-2)^2=20-y^2 \\ x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \end{cases}$

$x^2-12xy+36y^2 = xy-6y-x+6$

$x^2+x-13xy+36y^2+6y-6=0$

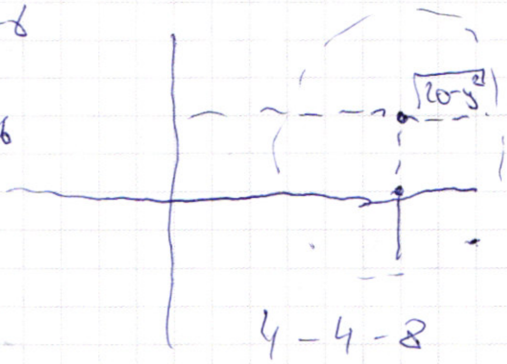
$x^2-12x+2y^2-4y+20=0$

$x^2+x(1-13y)+36y^2+6y-6=0$

$D=144-8y^2+16y-80=$

$64-8y^2+16y$

$x_{1,2}=\frac{12\pm\sqrt{-8(y^2-2y+8)}}{2}$



$4-4-8$

$13y-1-5y+5$

$x=0 \quad 1-2-8$

$y=2$

y^2-2y-8

$D=4+32$

$\frac{2\pm6}{2}$

$\frac{13y-1\pm5(y-1)}{2}$

$\frac{13y-1+5y-5}{2}$

$4 \; x_1=9y-3$

$-2 \; x_2=4y+2$

$\frac{12\pm\sqrt{64}}{2}$

$\frac{10}{2}$

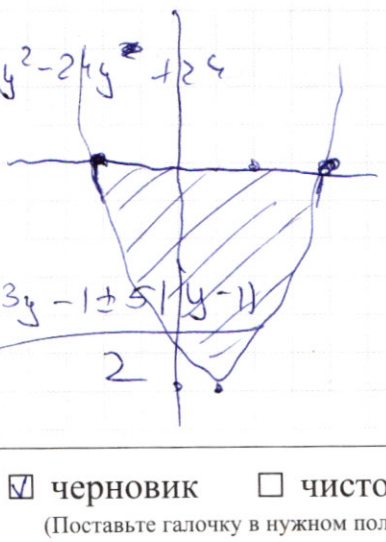
$\frac{12\pm8}{2}$

$1-26y+169y^2-144y^2-24y+24$

$\frac{13y-1\pm\sqrt{25y^2-50y+25}}{2}$

$\frac{13y-1\pm5\sqrt{y^2-2y+1}}{2}$

$\frac{13y-1\pm5|y-1|}{2}$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(9y-3)^2+2y^2-12(9y-3)$

$x_{12}=12\pm\sqrt{-8}$

$9y-3=\frac{12\pm\sqrt{-81y^2-2y-8}}{2}$

$12y-6$

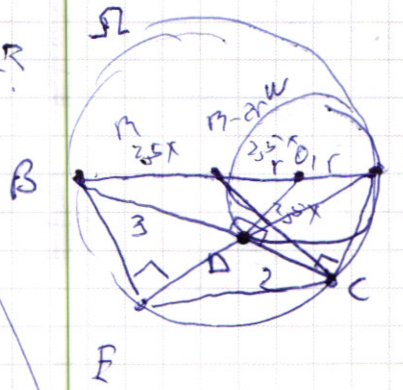
$(18y-18)^2=(\pm\sqrt{-81y^2-2y-8})^2$

$324y^2-648y+324=-8y^2+16y+64$

$332y^2-664y+260=0$

166 332 130

284 166 65



5^R

$\triangle BO_1D\sim\triangle BAC$

$\frac{3}{5}$ $2x$

$3x$ $5x$

$r=2x$

$R=2{,}5x$

$AC=\sqrt{25x^2-25}=5\sqrt{x^2-1}$

$x\geq 6y$

$13y-6$

① $(x-6y)^2=(\sqrt{xy-6y-x+6})^2$

$x^2-12xy+36y^2=xy-6y-x+6$

$x^2-13xy+36y^2+x+6y-6=0$

$x^2+x(1-13y)+36y^2+6y-6=0$

$D=1-26y+169y^2-144y^2-24y+24=25y^2-50y+25$

$x_{1,2}=\frac{13y-1\pm5\sqrt{y^2-2y+1}}{2}=\frac{13y-1\pm5(y-1)}{2}$

$y=\frac{1}{3}$

$\frac{13y-1+5y-5}{2}$

$\frac{13y-1-5y+5}{2}$ $8y+4$

$\left[\begin{array}{l}x_1=9y-3\\x_2=4y+2\end{array}\right.$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

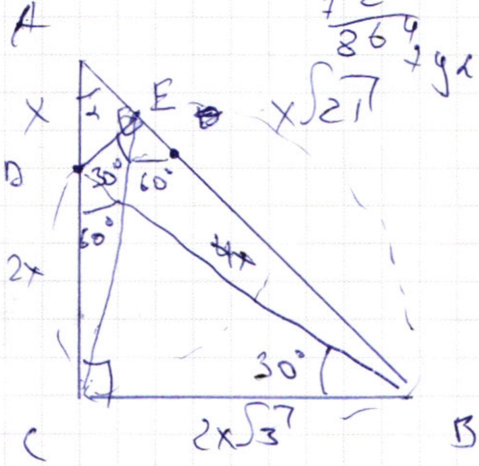
Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\frac{972}{8} \Big| \frac{6}{162}$$

$$\frac{37}{36}, \; 12$$

$\sqrt{166} \cdot 8$ $\quad 81 \cdot 12$



$$\frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$\frac{13}{\sqrt{166}}$$

$$36 \times 24 = 144,\; 72,\; 864$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{DE}{AE} \qquad DE = \frac{2\sqrt{3}}{3}y$$

$$AE = y$$

$$\frac{27\sqrt{166}}{249} \qquad \frac{9\sqrt{166}}{83}$$

$$\frac{12}{9}y^2 + y^2 = \frac{7}{9}$$

$$\frac{21y^2}{9} = \frac{7}{9} \qquad y^2 = \frac{1}{3} \qquad y = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$\sqrt{16x^2 - 4x^2} = x\sqrt{12} = 2x\sqrt{3}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{DE}{AE} = \frac{CB}{AC} \qquad \frac{972}{81} \Big| \frac{81}{12}, \; 162 \qquad \frac{2x\sqrt{3}}{3x}$$

$$\sqrt{9 - 25x^2 + 25y^2} = y^2$$

$$24y^2 = 25x^2 - 9$$

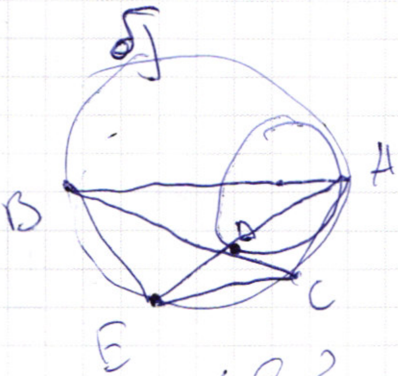
$$AB = 12x^2 + 9x^2 = x\sqrt{21} \qquad \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$AC = \sqrt{7}$$

$$\sqrt{9 - 25x^2 + 25y^2}$$

$$DE = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{3}$$

б)



$$3x = \sqrt{7}$$

$$x = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$m^2 = \frac{96c}{25}$$

$$\frac{2\sqrt{7}}{3} = DC$$

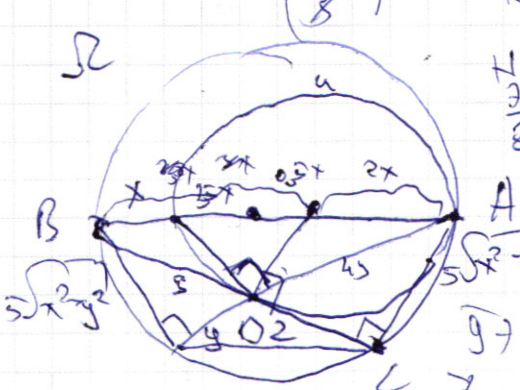
по т. косинусов. $\quad 25x^2 - 25 = 4y^2 + 4$

$$\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 =$$

$$\frac{28}{9} = \frac{4}{9} + c^2 - 2\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot c$$

$$36 \times 24 = 144,\; 72,\; 864$$

Ω



$$c^2 - \frac{2\sqrt{3}c}{3} + \frac{4}{9} - \frac{28}{9} = 0$$

$$c^2 - \frac{2\sqrt{3}c}{3} - \frac{24}{9} = 0$$

$$96 \cdot 9$$

$$9c^2 - 6\sqrt{3}c - 24 = 0$$

$$\frac{26\sqrt{3}}{18} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{972}{8} \Big| \frac{6}{162}$$

$$\frac{37}{36}, \; 12$$

$$25x^2 - 25y^2 \qquad 5\sqrt{x^2 - y^2}$$

$$D = 108 + 864 = 972$$

$$81 \cdot 12 \qquad 162 \cdot 6 \qquad 9\sqrt{12}$$

$$\frac{6\sqrt{3} + \sqrt{972}}{18} \qquad 9\sqrt{12} \qquad 18\sqrt{3}$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3)

$x = 9y - 3$ $\quad x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0$

$x = 4y + 2$

$x^2 - 12x + 2y^2 - 4y + 20 = 0$

$x \geq 6y$

$D = 144 - 8y^2 + 16y - 80 = 0$

$x = \frac{12 \pm \sqrt{-8(y^2 - 2y - 8)}}{2}$

$-8y^2 + 16y + 64$

$x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{-8(y^2 - 2y - 8)}}{2}$

$y \in [-2; 4]$

$9y - 3 = \frac{12 \pm \sqrt{-8(y^2 - 2y - 8)}}{2}$ $\quad 3y$

$x = 151$

$y = 149$

$y = \frac{151}{3}$ $\quad y^2 - 2y - 8 \leq 0$

$(18y - 18)^2 = (\pm\sqrt{-8(y^2 - 2y - 8)})^2$

$D = 36$

$y_{1,2} = \frac{2 \pm 6}{2}$ $\quad x = 224$

$y = 76$

$18(y-1) \geq 0$ $\quad 324y^2 - 648y + 324 = -8y^2 + 16y + 64$ $\quad y_1 = 4$

$3 \cdot 76$

228

$y \geq 1$ $\quad 332y^2 - 664y + 260 = 0$ $\quad y_2 = -2$

$166 \qquad 130$

$\frac{151}{3}$ $\quad 50\frac{1}{3}$

$83 \qquad 65$

$(y-4)(y+2) \leq 0$

$y \in [-2; 4]$

$+ \quad - \quad +$ $\quad -2 \quad 4 \quad y$

$\frac{231}{3} = 77$ $\quad 83y^2 - 166y + 65 = 0$

3333

$151 \quad 152 \quad 153 \quad 224$

I II III

166×166

996

160

$\frac{232}{3} = 77\frac{1}{3}$ $\quad D = 166^2 - 4 \cdot 83 \cdot 65 =$

$27556 - 21580$ $\quad 5976 \mid 6$

$54 \qquad 996$

$996 \cdot 166$

74

996

$+ 166$

27556

$\frac{166 \pm 6\sqrt{166}}{166}$

57

54

36

16

332×65

1660

1992

21580

$996 \mid 6$

166

6

39

36

36

$166 \cdot 36$

27556

-21580

5976

$\frac{\sqrt{166}^2 \pm 6\sqrt{166}}{(\sqrt{166})^2}$

$y_{1,2} = \frac{\sqrt{166} \pm 6}{\sqrt{166}}$

$x = 3(y-1) = 3\left(\frac{\sqrt{166} + 6}{\sqrt{166}} - 1\right)$

$316 \qquad 12$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$x = 4y + 2$

$x^2 - 12x + 2y^2 - 4y + 20 = 0$

$D = 144 - 8y^2 + 16y - 80 = 0$

$\frac{12 \pm \sqrt{-8y^2 + 16y + 64}}{2}$

$(4y+2)^2 + 2y^2 - 12(4y+2) + 20 = 0$ $-4y$

$16y^2 + 16y + 4 + 2y^2 - 48y - 24 + 20 = 0$

$4y + 2 =$

$8y - 8 = 2\sqrt{-8y^2 + 16y}$

$18y^2 - 32y = 0$

$x = \frac{16}{9} \cdot 4 + 2 = \frac{16}{36} + 2 -$

$y(18y - 32) = 0$

$64y^2 - 128y + 64 =$

$y = 2$

$y = 0$

$= \frac{8}{18} \; \frac{4}{9} + 2 = \boxed{\frac{22}{9}}$ $= -8y^2 + 16y$ $+64$

$y = \frac{32}{18} = \frac{16}{9}$

$y = 0 \quad x = 2$

$y = 0 \; x = 2$

$72y^2 - 144y = 0$

$y = 2 \; x = 10$

$y(72y - 144) =$

$x = 9y - 3 = 3(3y - 1)$

$x \geq 6y$

$y = 0 \; x = 2$

$y = 2 \; x = 10$

$(9y-3)^2 + 2y^2 - 12(9y-3) - 4y + 20 = 0$

$996 \cdot -54\sqrt{166} - 996$

$81y^2 - 54y + 9 + 2y^2 - 108y + 36 - 4y + 20 = 0$

$996(-54\sqrt{166} - 1) \geq$

$83y^2 - 166y + 65 = 0$

$-36\sqrt{166}$

$D = 27556 - 21580 = 5976 = 166 \cdot 36$

$36\sqrt{166} \geq 996\sqrt{166}$

$166 \times 166 = 27556$

$332 \times 65 = 21580$

$5976 - 498 = 996$

$y_{1,2}$

$\frac{166 \pm 6\sqrt{166}}{166} =$

$x \geq 6y$

$54\sqrt{166} \geq \frac{996 + 36\sqrt{166}}{996}$

$27556 - 21580 = 5976$

$x \geq 6y$

$x_1 = 3\left(\frac{498 + 18\sqrt{166}}{498} - 1\right)$

$-54\sqrt{166} \geq 996 - 36\sqrt{166}$

$54\sqrt{166} \; 996 \geq \frac{996 + 36\sqrt{166}}{996}$

$54\sqrt{166}$

$x_2 = 3\left(\frac{498 - 18\sqrt{166}}{498} - 1\right)$

$-54\sqrt{166}$

1 ± 166

$1 + \frac{6}{13} \approx 8{,}5 \; 5 \; 8$

$996 \; 36 \; 72 \; 23 \; 276$

$x \geq 6y$

$(2;0)$

$2 > \sqrt{4}$

$(10;2)$

$1 + \frac{6}{\sqrt{166}}$

$4 - 24 + 20 = 0$

$-2 =$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)