МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1.

Пусть z - первый член геом. прогрессии, ~~то q~~ q - знаменатель, тогда $a = z$; $b = qz$; $c = q^2 z$; $d = q^3 z$, где d - 4-й член прогрессии.

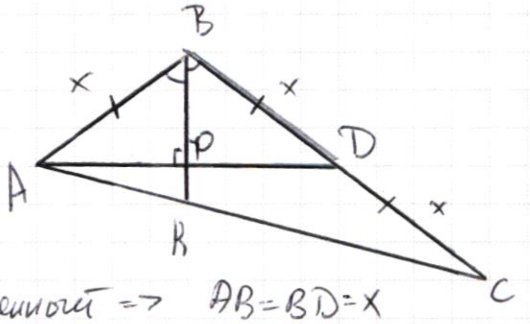
Решим уравнение $ax^2 - 2bx + c = 0$

$$x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} = \frac{qz \pm \sqrt{q^2z^2 - q^2z^2}}{z} = q$$

Так как $d = x$, то $q^3 z = q \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} q = 0 \\ q^2 z = 1 \end{array}\right.$, то есть $\left[\begin{array}{l} c = 0 \\ c = 1 \end{array}\right.$ - так как не сказано, что знаменатель $\neq 0$

Ответ: 0; 1.

№2.



BO - биссектриса

AD - медиана

1) Так как $BO \perp AD$, то

$\triangle ABD$ - равнобедренный $\Rightarrow AB = BD = x$

2) по св. бис-сы в $\triangle ABC$: $AK : KC = 1 : 2$, пусть $AK = y$, тогда $KC = 2y$

3) $P = 900 = 3(x+y) \Rightarrow x + y = 300 \Leftrightarrow y = 300 - x$

4) по св. $\triangle$-ка: $\left\{\begin{array}{l} CB < AB + AC \\ AC < AB + BC \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x < x + 900 - 3x \\ 900 - 3x < 3x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x < 225 \\ x > 150 \end{array}\right.$

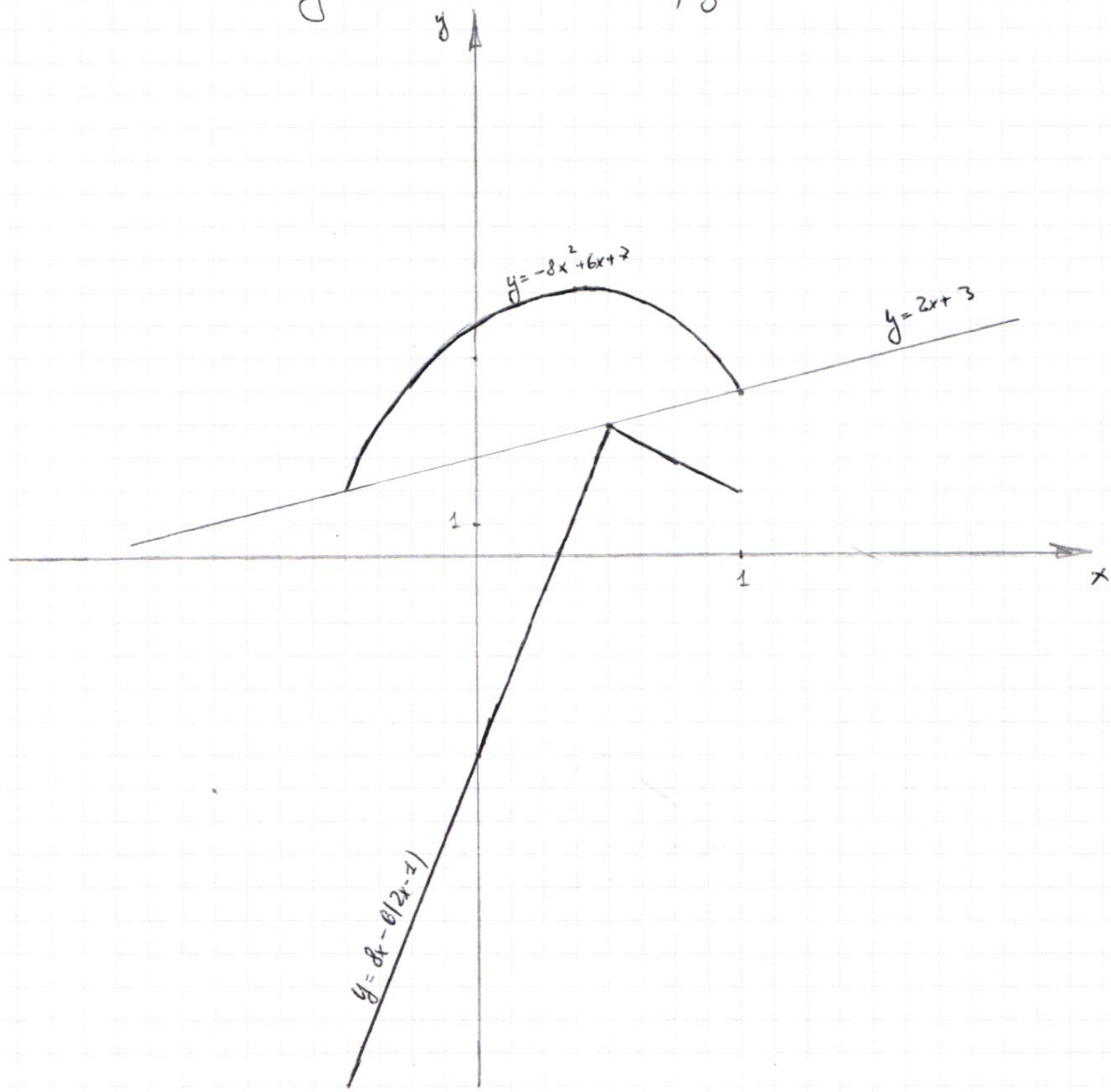
Для каждого x ~~изу~~ найдётся подходящий $y = 300 - x$, что все условия будут совпадать, а значит всего ~~спо~~ $\triangle$-ков существует

$224 - 151 + 1 = 74$

Ответ: 74 способа.

№6.

Изобразим на координатной плоскости xOy графики функций $y = 8x - 6|2x-1|$ и $y = -8x^2+6x+7$ на отрезке $x \in [-\frac{1}{2}; 1]$.



Заметим, что нашему условию удовлетворяет только одна прямая $y = ax + b = 2x + 3$. Докажем, что стыковые точки принадл. ей:

1. $(\frac{1}{2}; 4)$: $4 = 2\cdot\frac{1}{2} + 3$ — верно
2. $(1; 5)$: $5 = 2\cdot 1 + 3$ — верно
3. $(-\frac{1}{2}; 2)$: $2 = 2(-\frac{1}{2})+3$ — верно

$\Rightarrow$ Нам подходит только одна пара $(2;3)$

Ответ: $(2;3)$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

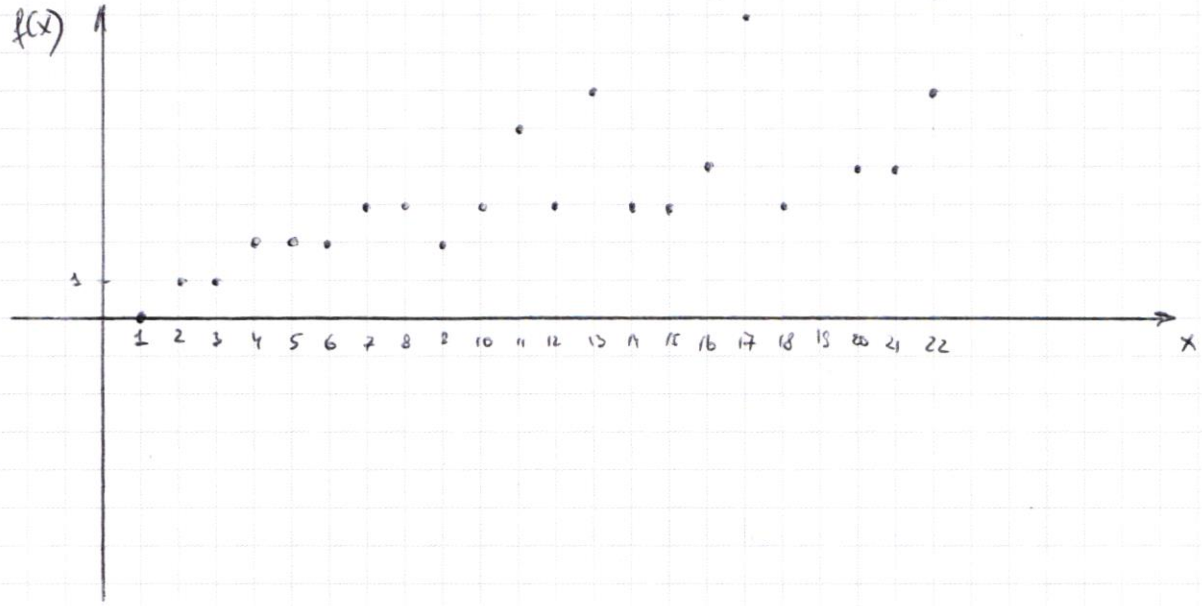
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7.

1) $f\left(\frac{1}{y}\right) = f\left(1\cdot\frac{1}{y}\right) = f(1) + f\left(\frac{1}{y}\right) \Rightarrow f(1)=0$

2) $f\left(\frac{1}{y}\right) = f\left(y^2\cdot\frac{1}{y^2}\right) = 2\cdot f\left(\frac{1}{y}\right) + f(y) \Rightarrow f(y) = -f\left(\frac{1}{y}\right)$

3) Обозначим на графике точки для всех подходящих x



Исходя из условия 2 и того, что $f(x/y) < 0$, т.е $f(x) < -f\left(\frac{1}{y}\right)$, т.е $f(x) < f(y)$, просто посчитаем для каждого x кол-во других точек, у которых больше значения:

19

$x = 2,3$ − $\cancel{20}$ шт

$x = 4,5,6,9$ − 15 шт

$x = 7,8,10,12,14,15,18$ − 8 шт

$x = 16,20,21$ − 5 шт

$x = 11$ − 4 шт

$x = 13,22$ − 2 шт

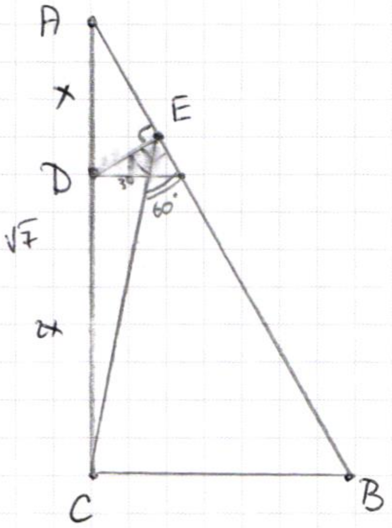
$x = 17$ − 1 шт

$x = 19$ − 0 шт

То есть общая сумма $S = 2\cdot19 + 4\cdot15 + 7\cdot8 + 3\cdot5 + \cancel{1}^{1}\cdot4 + 2\cdot2 + \cancel{3}^{1}\cdot1 =$
$= 38 + 60 + 56 + 15 + 4 + 4 + \cancel{3}\,1 = 98 + 71 + 9 = \underline{178}$

Ответ: 178 пар.

№4.



Дано: $AC=\sqrt{7}$

$AD:AC=1:3$

$DE\perp AB$

$\angle CED=30°$

$tg\angle BAC-?$

$S_{CED}-?$

Решение:

№3.

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$$

Решим 2-е уравнение относительно x:

$\frac{D}{4}=36-2y^2+4y-20=-2y^2+4y-16=-2(y^2-2y+8)=-2((y-1)^2+7)<0 \Rightarrow$

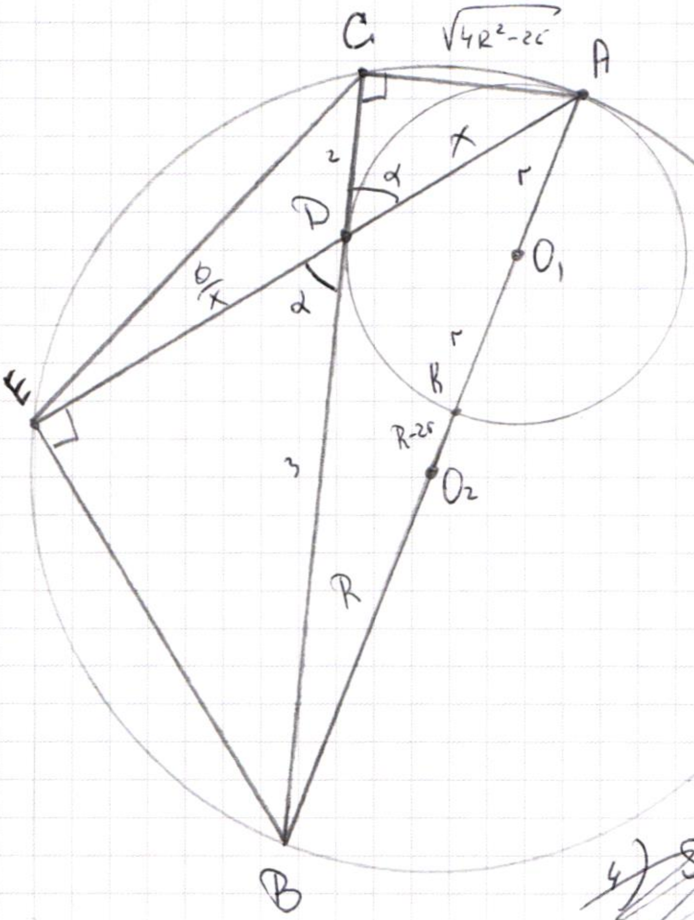
$\Rightarrow$ Нет таких y, для которых найдется соответствующий $x \Rightarrow$ 2-е уравнение не имеет решений $\Rightarrow$ у системы нет решений

Ответ: $\varnothing$.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.



Дано: $CD=2$
$BD=3$

r, R − ?
S_{BACE} − ?

1) $\angle BCA = \angle BEA = 90^\circ$ т.к. опираются на диаметр

2) $\triangle ABC$: $AC = \sqrt{4R^2-25}$

3) $BK \cdot AB = BD^2$, по св. касательной и секущей из одной точки =>

$\Rightarrow 2R(2R-2r)=9$; $4R^2-4Rr-9=0$

$R = \frac{2r \pm \sqrt{4r^2+36}}{4} \Rightarrow R = \frac{r+\sqrt{r^2+9}}{2}$

~~4) $S_{BECA} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AE \cdot \sin z \ldots =$~~

4) $\triangle CDA \sim \triangle EDB$ по 2 углам => $AD \cdot ED = CD \cdot DB \Rightarrow \cancel{AB}\ AD \cdot ED = 6 \Rightarrow$

-> пусть $AD = x$, тогда $ED = \frac{6}{x}$

5) $\triangle ADC$: $x = \sqrt{4R^2-21}$

6) $S_{BECA} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AE \cdot \sin\alpha = \ldots = \frac{5(4R^2-15)\sqrt{36R^2-225}}{6(4R^2-21)}$

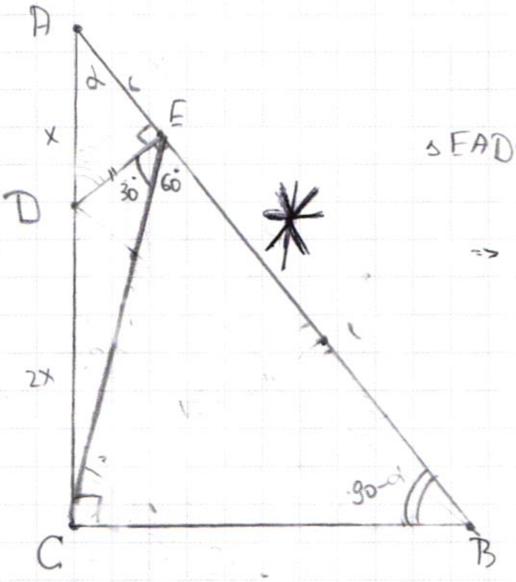
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x-6y=\sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2+2(y-1)^2=18 \end{cases}$$

$$x^2-12x+2y^2-4y+20=0$$

$$\frac{D}{4}=36-2y^2+4y-20=-2y^2+4y-16=-2(y^2-2y+8)=-2((y-1)^2+7)<0$$

$$x^2-12y+36y^2=\cancel{xy}\,(x-6)(y-1)$$



$tg\angle BAC - ? = tg\alpha - ? = y$

$\triangle EAD \sim \triangle CAB \Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$; $\frac{\cancel{AE}}{\cancel{AE}}$ $\frac{AE}{3x} = \frac{x}{AB} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow$

$\Rightarrow AE \cdot AB = AC \cdot AD$

$180 - 90 + \alpha = 90 - \alpha$

$150 - 90 - \alpha = 60 - \alpha$

$90 - 60 + \alpha = 30 + \alpha$

$\frac{DE}{AE} = \frac{BC}{AC}$; $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DE}$

$\cancel{\frac{x\sin\alpha}{\sin 90}}$ $\cancel{DE}$

$AE \cdot EB = 3x^2$;

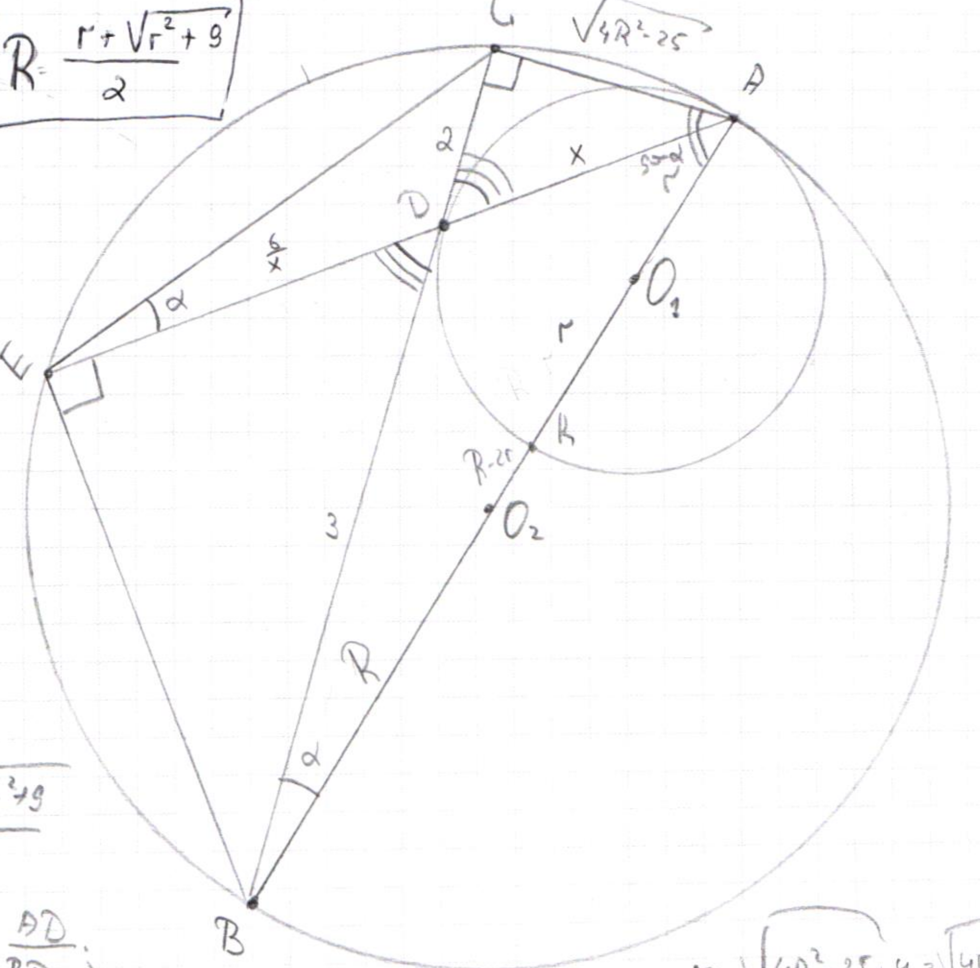
$AE = yx$, тогда $EB = \frac{3x}{y}$

$\cancel{3x}\ 3x^2 = \sqrt{9x^2 + 9x^2y^2} \Rightarrow \cancel{3x}\ x = \sqrt{1+y^2}$

$$\boxed{R = \frac{r + \sqrt{r^2+9}}{2}}$$

$r - ?$
$R - ?$
$S_{BACE} - ?$

$CD = 2$
$BD = 3$



$\sqrt{4R^2-25} = AC$

$2R(2R - 2r) = 9$;

$4R^2 - 4Rr = 9$

$4R^2 - 4Rr - 9 = 0$

$\frac{D}{4} = 4r^2 + 36$

$R = \frac{2r \pm \sqrt{4r^2+36}}{4} =$

$= \frac{2r + 2\sqrt{r^2+9}}{4} = \frac{r + \sqrt{r^2+9}}{2}$

$\triangle CDA \sim \triangle EDB \Rightarrow \frac{CD}{ED} = \frac{AD}{BD}$;

$\cancel{\frac{CD}{AB}}$ $\frac{CD}{AD} = \frac{ED}{BD}$ $\quad AD \cdot ED = 6$

$x = \sqrt{4R^2 - 25 + 4} = \sqrt{4R^2 - 21}$

$\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \left(\sqrt{4R^2-21} + \frac{6}{\sqrt{4R^2-21}}\right) \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{6}{3\sqrt{4R^2-21}}\right)^2} =$

$= \frac{5}{2} \cdot \frac{4R^2 - 21 + 6}{\sqrt{4R^2-21}} \cdot \sqrt{\frac{9(4R^2-21) - 36}{9(4R^2-21)}}$

$\sqrt{\left(\frac{y^2x + 3x}{y}\right)^2 \cancel{4} - \cancel{4}\, 9x^2} = \sqrt{\frac{y^4x^2 + 9x^2 + 6x^2y^2}{y^2} - 9x^2} = \sqrt{\frac{y^4x^2 + 6x^2y^2 + 9x^2 - 9x^2y^2}{y^2}} = \sqrt{\frac{y^4x^2 - 3x^2y^2 + 9x^2}{y^2}}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $ax^2-2bx+c=0$

$\frac{D}{4}=b^2-ac \Rightarrow x_{1,2}=\frac{b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{qb_1\pm\sqrt{q^2b_1^2-q^2b_1^2}}{b_1}=\frac{qb_1}{b_1}=q$

$a=b_1$

$b=qb_1$ $\qquad q^3b_1=q \Rightarrow q(q^2b_1-1)=0$ $\qquad \left[\begin{array}{l} q=0 \\ q^2b_1=1 \end{array}\right.$

$c=q^2b_1$

$d=q^3b_1=q$

3) $\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} & (1) \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 & (2) \end{cases}$ $\qquad x-6y=\sqrt{x(y-1)-6(y-1)}$

$x^2-12x+36+2y^2-4y$

(1): $x-6y=\sqrt{(x-6)(y-1)}$

(2): $x(x-12)+2y(y-2)+20=0$

$x^2-12x+36+2y^2-4y+2+20-38=0$

$(x-6)^2+(\sqrt{2}y-\sqrt{2})^2=18$

$\begin{cases} x-6y=\sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2+2(y-1)^2=18 \end{cases}$; $\qquad \begin{cases} x-6y=\sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6+\sqrt{2}(y-1))^2-2\sqrt{2}(y-1)(x-6)=18 \end{cases}$

$\begin{cases} x-6y=\sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x+\sqrt{2}y-6-\sqrt{2})^2-2\sqrt{2}(x-1)(y-1)=18 \end{cases}$

$(x-6)=a$

$y-1=b$ $\qquad a^2+2b^2=x^2-12x+36+2y^2-4y+2$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

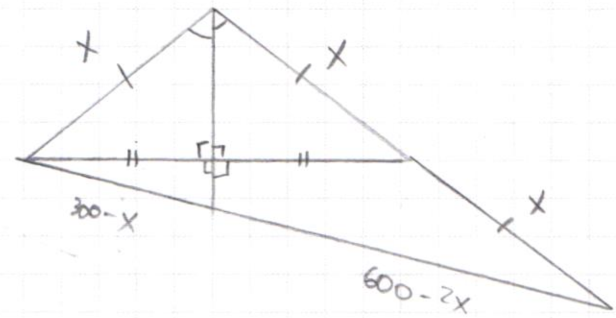
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$P=900 \quad a+b+c=900$



$3x+3y=900$

$x+y=300$

299

$-8\cdot\frac{1}{4}-\frac{6}{2}+7=5-3=2$

$7+12-32=-11$

1 2 3

$\begin{cases} 2x < x+900-3x \\ 900-3x < 3x \end{cases} ; \begin{cases} x<225 \\ x>150 \end{cases}$

151

152

$x+y=300$ $\quad x+y=300$

224 $\quad 224-151+1=$

$=225-151=$

$=74$

$x_B=\frac{-6}{-16}=\frac{3}{8}$

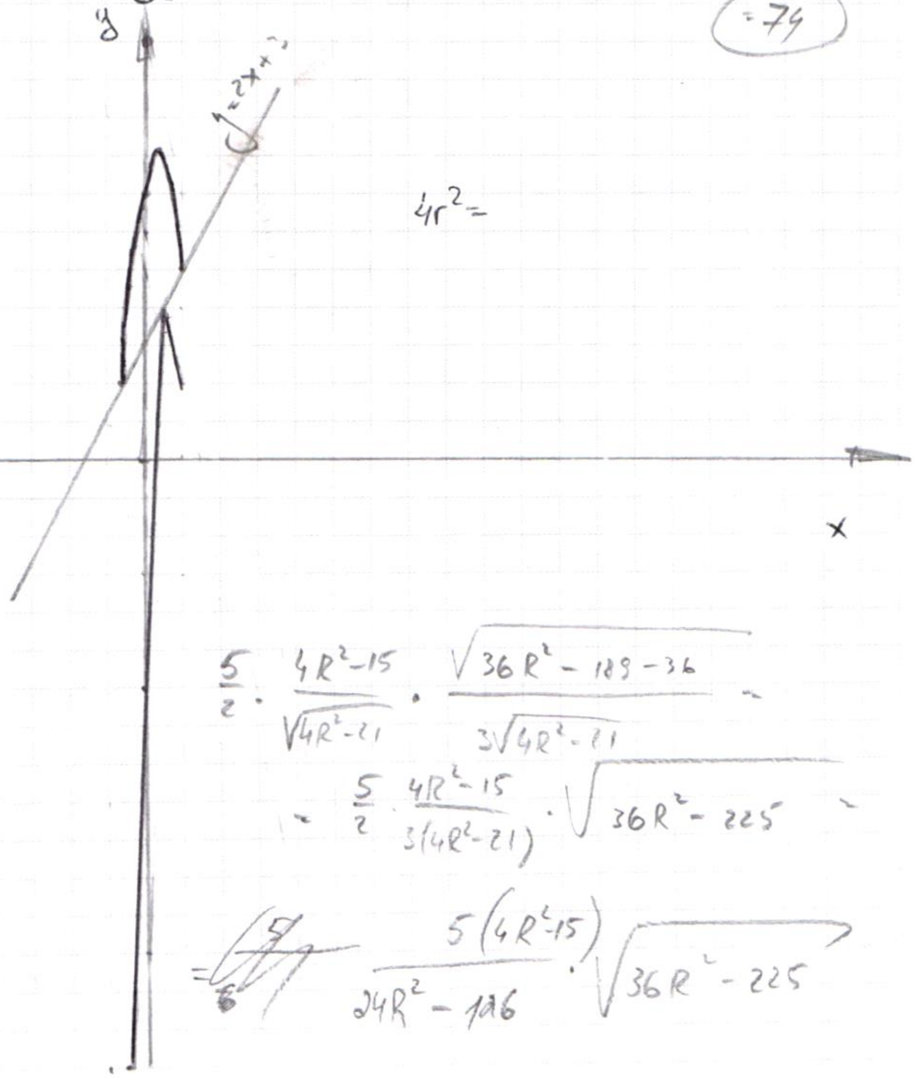
№6.

$y_B=-8\cdot\frac{9}{64}+6\cdot\frac{3}{8}+7=$

$=-\frac{9}{8}+\frac{9}{4}+7=$

$=\frac{9}{8}+7=8\frac{1}{8}$

x	-1	0	$\frac{3}{8}$	1	2	$-\frac{1}{2}$
y	-7	7	$8\frac{1}{8}$	5	-11	



$4r^2=$

$\frac{5}{2}\cdot\frac{4R^2-15}{\sqrt{4R^2-21}}\cdot\frac{\sqrt{36R^2-189-36}}{3\sqrt{4R^2-21}}=$

$=\frac{5}{2}\cdot\frac{4R^2-15}{3(4R^2-21)}\cdot\sqrt{36R^2-225}=$

$=\cancel{\frac{5}{6}}\ \frac{5(4R^2-15)}{24R^2-126}\cdot\sqrt{36R^2-225}$

$y=8x-12x+6,\ x\geq\frac{1}{2}$

$y=8x+12x-6,\ x<\frac{1}{2}$

$y=-4x+6,\ x\geq\frac{1}{2}$

$y=20x-6,\ x<\frac{1}{2}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

№7.

$f(ab) = f(a) + f(b)$ $f(p) = [p/2]$ $2 \le x \le 22$

$2 \le y \le 22$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) =$

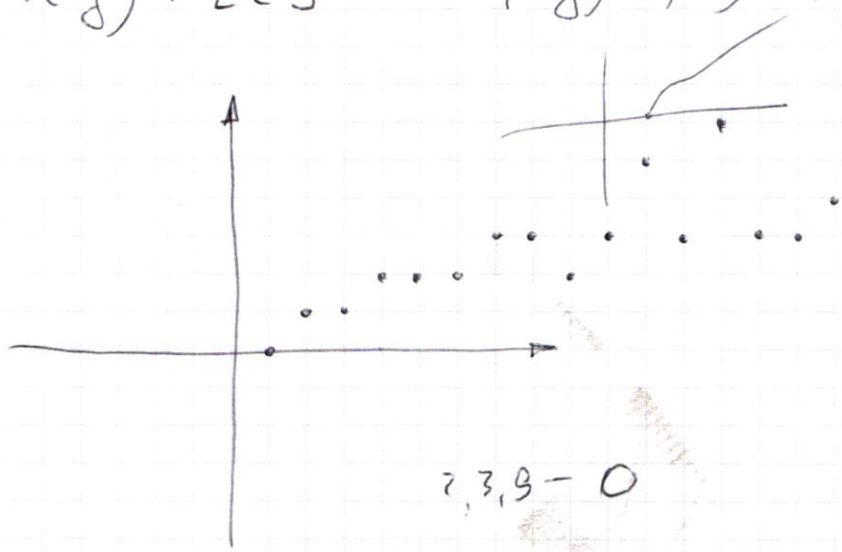
2
3
5
7
11 - простые
13
17
19

$= \left[\frac{x}{2}\right] + \cancel{\left[\frac{1}{2y}\right]} < 0$ 1) $\left[\frac{x}{2}\right] + f\left(\frac{1}{y}\right)$, если x-простое

$f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{1}{y}\right)$, если x-непростое

1) $1 \le \left[\frac{x}{2}\right] \le 9$

$f\left(\frac{1}{y}\right) + \left[\frac{x}{2}\right] < 0 \Rightarrow f\left(\frac{1}{y}\right) = f(1) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0 \Rightarrow$ $\boxed{f(1) = 0}$



$f(2) = 1$

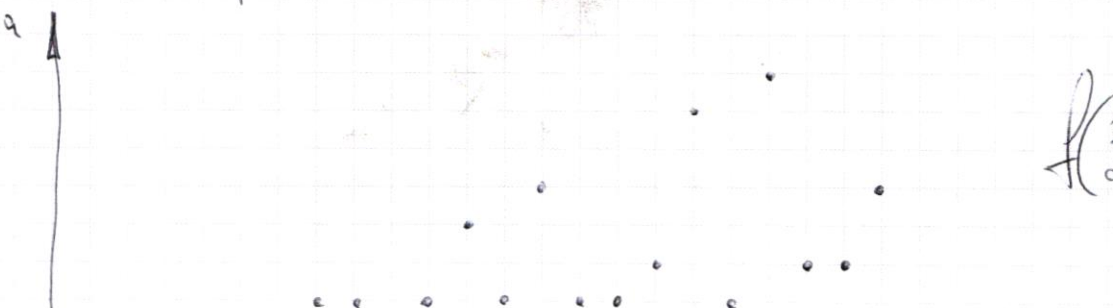
$f(3) = 1$

$f(5) = 2$

$f(4) = \cancel{2}\ 2$

$f\left(\frac{3}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) + f(3) = f\left(\frac{1}{2}\right) + 1$

2, 3, 9 – 0



$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + f\left(\frac{1}{4}\right) =$

$= 2 + f\left(\frac{1}{8}\right) =$

$= 3 + f\left(\frac{1}{16}\right)$

$\cancel{= 4 + f}$

$f\left(\frac{1}{y}\right) = 2f\left(\frac{1}{y}\right) + f(y) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(y) = -f\left(\frac{1}{y}\right)$

23 – 20 шт.

4, 5, 6, 9 – 15 шт 7, 8, 10, 12, 14, 15, 18 – 8

$\cancel{-f(x) > f(1}$ $-f\left(\frac{1}{y}\right) > f(x)$ 16, 20, 21, – 5

11, 2 – 4

2, 3, 8 – 0 4, 5, 6, 9 – 13, 22 – 2 17 – 1 19 – 0

Итого 40 + 60 + 56 + 15 + 4 + 4 + 1 =

= 100 + 71 + 9 = 180

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)