

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.
2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.
3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC , если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.
б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED .
5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω , а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D . Луч AD повторно пересекает Ω в точке E . Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2, BD = 3$.
6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leq ax + b \leq -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех x на промежутке $[-\frac{1}{2}; 1]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leq x \leq 22, 2 \leq y \leq 22$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) τ и φ , v , c — ~~так~~ первый, второй и третий члены геом. прогрессии, то, если ускорения прогрессии q , выполняются ~~равенства~~ равенства:

$$v = a \cdot q; \quad c = a \cdot q^2$$

Тогда запишем данное уравнение в виде:

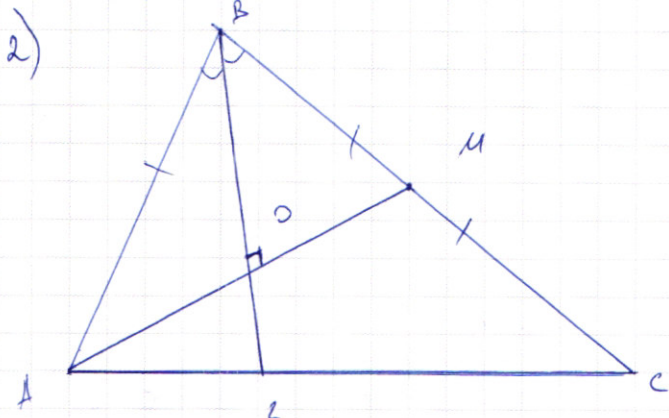
$$ax^2 - 2aqx + aq^2 = 0$$

$$D = (-2aq)^2 - 4a \cdot aq^2 = 4a^2q^2 - 4a^2q^2 = 0$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-2aq}{2a} \quad \text{и по условию это четвертый член, тогда:}$$

$$a \cdot q^4 = -\frac{q}{2} \Rightarrow a \cdot q^2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow a \cdot q^2 = c = -\frac{1}{2}$$

Ответ: $-\frac{1}{2}$



Дано:

$\triangle ABC$; BL — высота $\angle B$

AM — медиана

$AM \cap BL = O$

$BL \perp AM$

$\triangle ABM$: BO — высота, а так же медиана \Rightarrow

$\triangle ABM$ — $\text{р/б} \Rightarrow AB = BM = MC$

7.4. BL - бис-са, то по свойству бис-сы :

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AL}{LC} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2AL = LC$$

Далее L $x = AB$, тогда $BC = 2x$

$$y = AL, \text{ тогда } LC = 2y$$

По условию:

$$x + 2x + y + 2y = 900 \Rightarrow x + y = 300$$

из неравенств треугольника:

$$\begin{aligned} x + 2x > y + 2y &\Rightarrow x > y \\ x + y + 2y > 2x &\Rightarrow 3y > x \end{aligned} \Rightarrow 3y > x > y$$

$$\text{Если } y \leq 45: x \leq 225 \quad (x + y \neq 300)$$

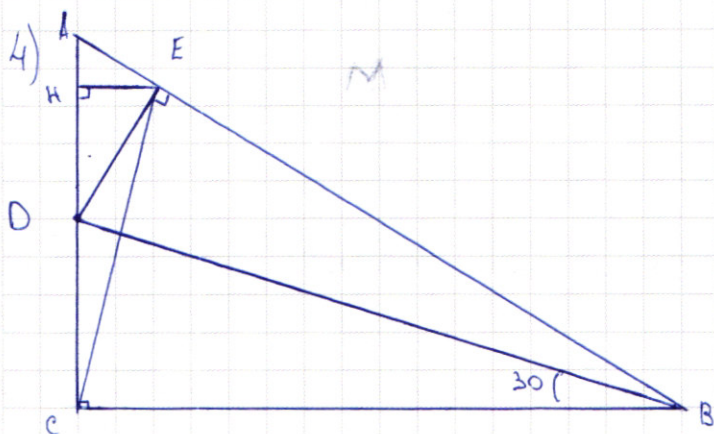
$$y \geq 46$$

Далее наугад угадываем y ($165 \leq y \leq 179$) соответствующее единственное значение x

y не может быть больше 149, т.к. если он равен 150, то x равен 150, а по условию $x > y$
 кол-во Δ $CD = 900$ равно кол-ву значений y :

$$149 - 46 + 1 = 104$$

Ответ: 104



Дано:

ABC - пр. уг. Δ ($\angle C = 90^\circ$)
 $DE \perp AC$

$$AD = \frac{AC}{3}; E \in AB$$

$$\angle CED = 30^\circ$$

$$DE \perp AB$$

$$\delta) AC = \sqrt{3}$$

найт: а) $\angle BAC$

б) S_{ACED}

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

а) Решение:

а) $\triangle CDEB$: $\angle DCE + \angle DEB = 180^\circ \Rightarrow$ внеш. углы \Rightarrow
 $\angle CED = \angle DBE = 30^\circ$ (уши оператора как одну торгу) \Rightarrow

$$\frac{BC}{CD} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\tan \angle BAC = \frac{BC}{AC} = \left/ AD = \frac{1}{3} AC \Rightarrow CD = \frac{2}{3} AC \right/ = \frac{BC}{\frac{3CD}{2}} = \frac{2BC}{3CD} =$$

$$= \frac{2}{3} \tan 30^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

б) $\tan \angle BAC = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sin \angle BAC}{\cos \angle BAC} \Rightarrow \sqrt{3} \sin \angle BAC = 2 \cos \angle BAC$
 проведем высоту $\triangle ACE$ из τ . E ($EH \perp AC, HE \in AC$)

$$3(1 - \cos^2 \angle BAC) = 4 \cos^2 \angle BAC$$

$$\cos \angle BAC = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}$$

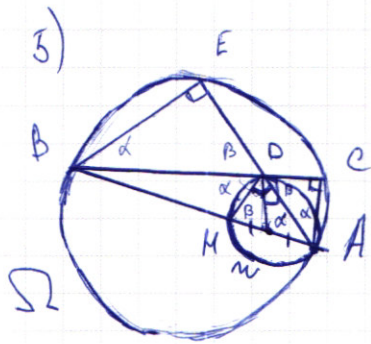
т.к. $AC = \sqrt{4} \Rightarrow AD = \frac{\sqrt{4}}{3}$

$$\cos \angle BAC = \frac{AE}{AD} \Rightarrow AE = \cos \angle BAC \cdot AD = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} \cdot \frac{\sqrt{4}}{3} = \frac{1}{3}$$

$$DE = \sqrt{AD^2 - AE^2} = \sqrt{\frac{4}{9} - \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{3}{9}} = \frac{1}{3}$$

$$S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} DE \cdot AE = \frac{1}{2} HE \cdot AD \Rightarrow HE = \frac{DE \cdot AE}{AD} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

$$S_{\triangle DCE} = \frac{1}{2} HE \cdot DC = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{2\sqrt{4}}{3} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$



Дано:

BA - диаметр

BC - касательная к ω

$AD \cap \Omega = E$

$BD = 3$; $CD = 2$

найти:

r (радиус ω) и R (радиус Ω)

S_{BACE}

Решение

По свойству хорды:

$$ED \cdot DA = 6$$

$$BA \cap \omega = H$$

$$\angle BDH = \alpha \Rightarrow \angle DAB = \alpha \text{ (угол между кас и хордой)}$$

$$\angle DHA = \beta \rightarrow \angle BAE = \beta \text{ (}\angle BDE + \angle BAH = 90^\circ\text{)}$$

$$\angle BDE = \angle ADC \text{ (вертикальные)} = \beta$$

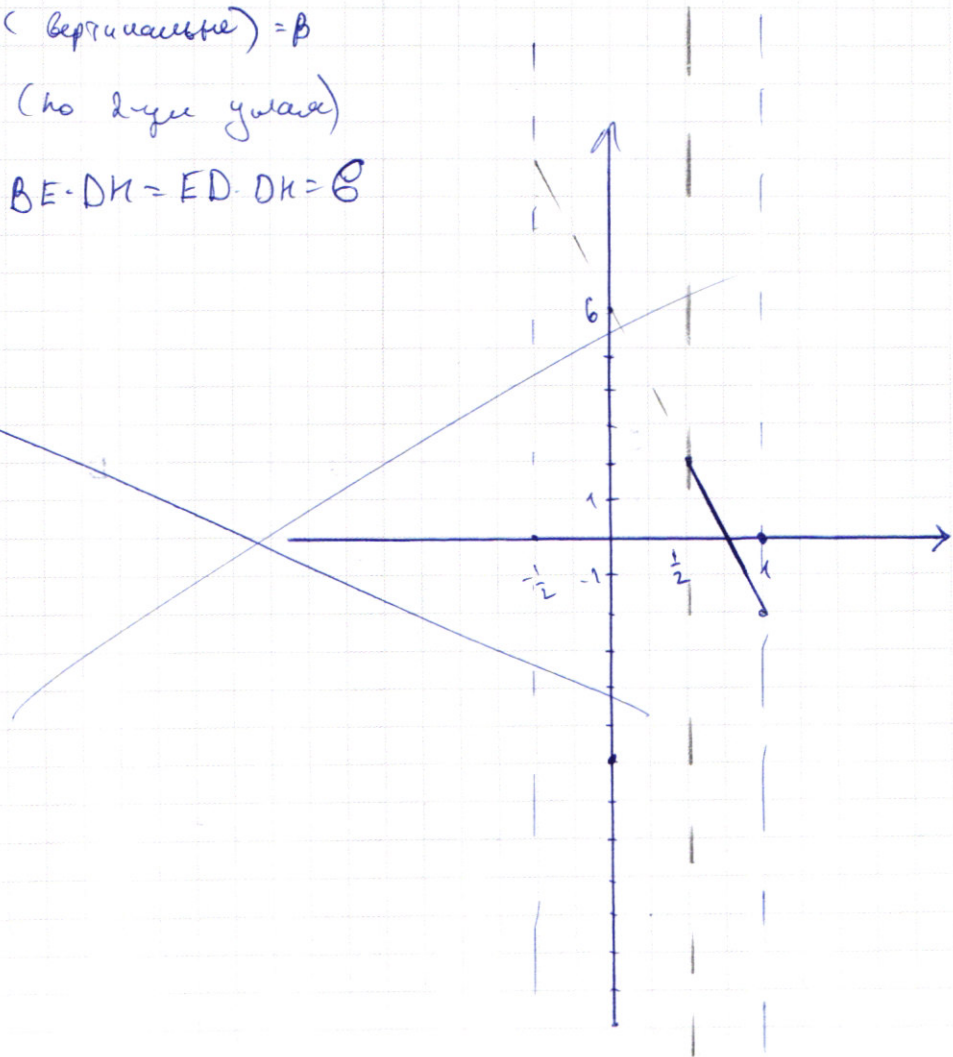
$\triangle BED \sim \triangle HDA$ (по двум углам)

$$\frac{ED}{DH} = \frac{BE}{DA} \Rightarrow BE \cdot DH = ED \cdot DH = 6$$

6) $8x = 6(2x - 1)$

$$y = 6 - 4x \quad ; \quad x \neq \frac{1}{2}$$

$$y = 20x - 6 \quad ; \quad x \neq \frac{1}{2}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

б) $8x - 6 \mid 2x - 1 \mid$

$$\begin{cases} y = 6 - 4x & ; x \geq \frac{1}{2} \quad (*) \\ y = 20x - 6 & ; x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$-8x^2 + 6x + 4 = y \quad (2^*)$$

$$x = 1$$

$$-8 + 6 + 4 = 2 = y$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$-2 + 3 + 4 = 5$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

$$-2 - 5 + 4 = 2$$

Проведем прямую $ax + b = y$ т. А и В:

$$A\left(-\frac{1}{2}; 2\right); B(1; 5)$$

$$\begin{cases} 2 = -\frac{1}{2}a + b \\ 5 = a + b \end{cases}$$

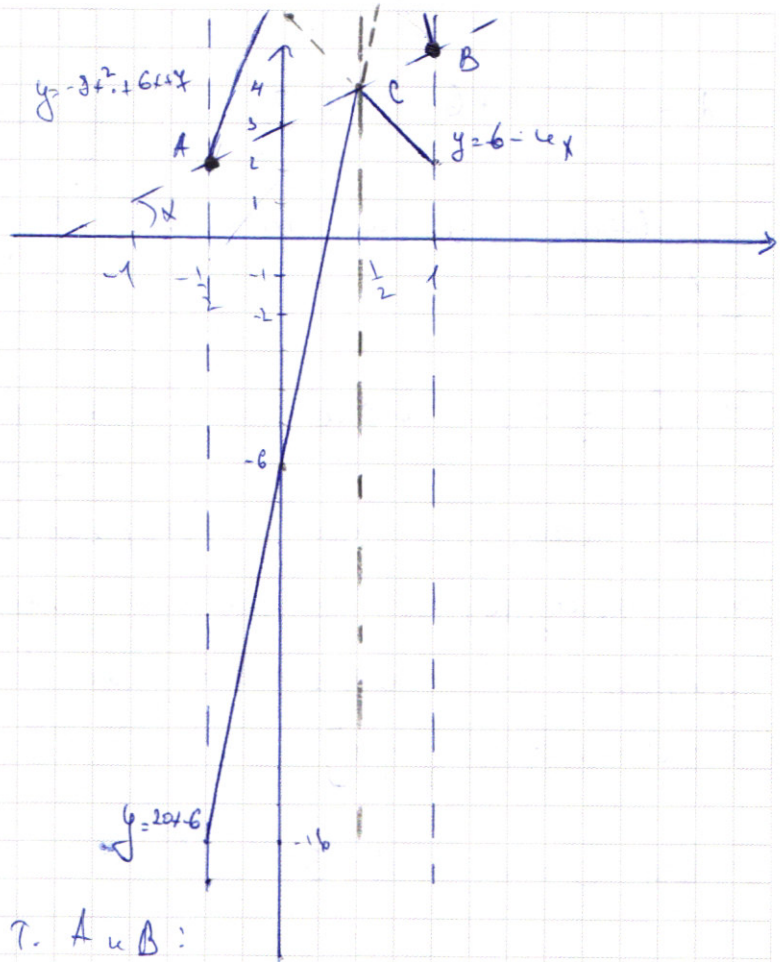
1) (2) :

$$-6,5 = a \Rightarrow b = 1,5$$

$$y = -6,5x -$$

2) (1) :

$$6 = a \Rightarrow$$



$ax + b = y$ - прямая и подм
выделялось данно вер-во, ко-
до, чтобы график 1^* лежал
ниже той прямой, а
график 2^* выше

$$y = kx + b$$

$$k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{1.5} = 2$$

подставим т. А:

$$2 = -\left(\frac{1}{2}\right) \cdot 2 + b \Rightarrow b = 3$$

\Rightarrow уравнение прямой, проходящей
ч/з т. А и В:

$$y = 2x + 3$$

Проверим точки т. С на этой прямой:

$$C\left(\frac{1}{2}; 4\right)$$

$$4 = 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 - \text{верно, } \Rightarrow C \in y = 2x + 3$$

Если нам касание поворачивать или перемещать
эту прямую, то точка та прямая касания пересечет
границы \Rightarrow неравенство не будет выполняться для
все $x \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$

Ответ: $a = 2$; $b = 3$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x^2 - 12xy + 36y^2 = xy - 6y - x + 6$$

$$x^2 - 13xy + x + 36y^2 + 6y + 6$$

$$36y^2 - xy + 10y$$

$$36y^2 + 13x + 10y - 13xy - 14 = 0$$

$$\text{или } y(10 - 13x) - (10 - 13x) + 36y^2 - 4 = 0$$

$$(y - 1)(10 - 13x) + 36y^2 - 4 = 0$$

$$2x - 1 \geq 0 \quad 2x \geq 1 \quad x \geq \frac{1}{2}$$

$$6 - 4x$$

$$x \leq \frac{1}{2}$$

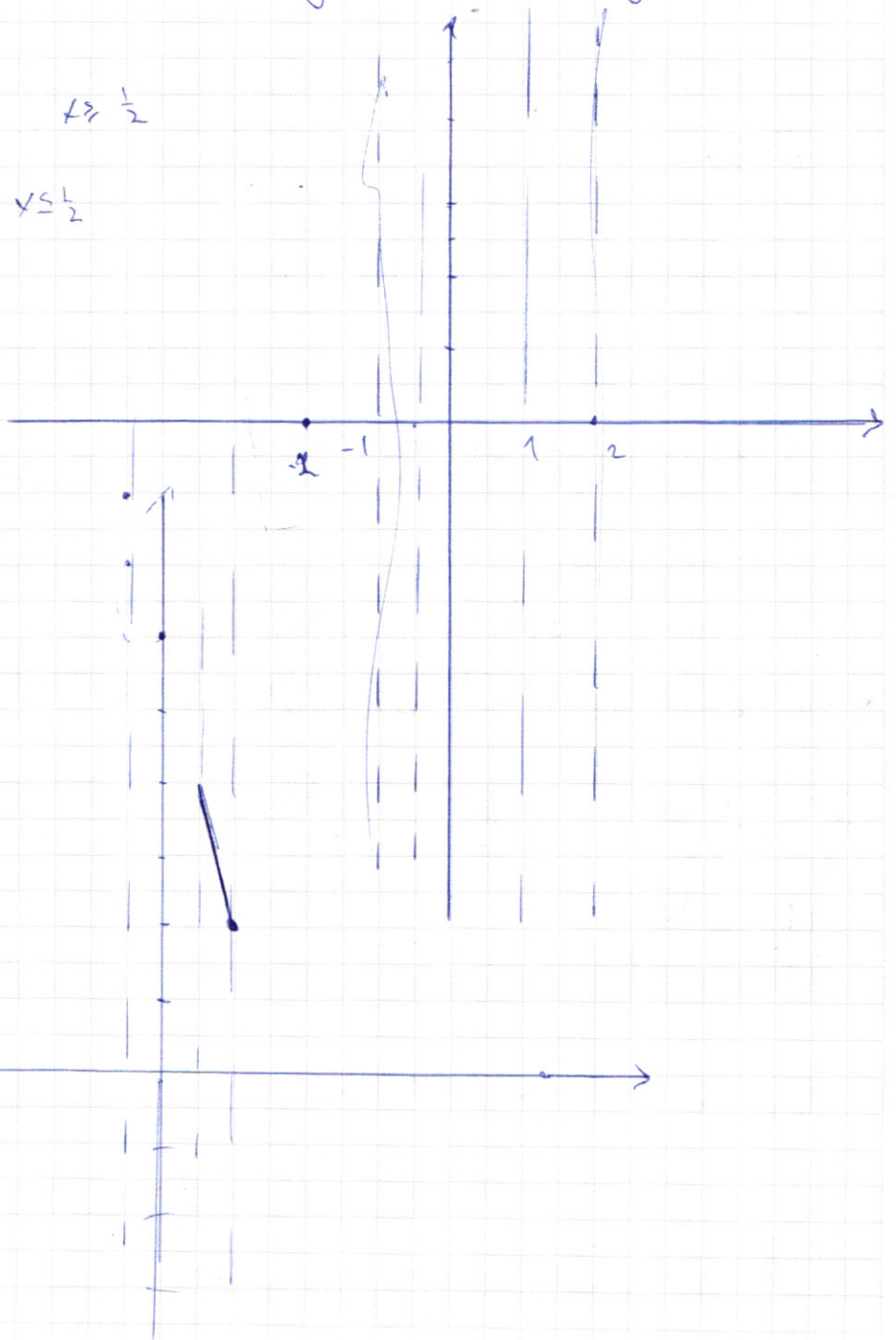
$$4x - 6$$

$$\frac{-b}{-1b} = \frac{3}{8}$$

$$D = 36 + 4 \cdot 4 \cdot 8 = 56^2$$

$$x(9 + 4 \cdot 8) = 4$$

$$4 \cdot 4 \cdot 8$$



$$x + 3y > 2x$$

$$3y > x$$

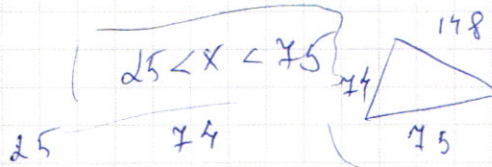
~~$$2x + 3y > 4$$~~

~~$$3x > 6y$$~~

$$y =$$

$$y > 20 \quad x < 60$$

$$y = 25$$



$$\frac{x}{y} = 2\sqrt{3}$$

$$x = 2\sqrt{3}y$$

~~$$40 - 26 + 1 = 15$$~~

~~$$26 - 78 = -52$$~~

~~$$81 - 55 = 26$$~~

$$y \leftrightarrow x$$

$$25 - 99$$

$$75$$

$$x^2 - 2x + 2(y^2 - 2y) - 10(x - 2) = (x - 6y)^2 - (x - 6y) - 2x - y - 6 =$$

$$= (x - 2)(x - 10) + 2y(y - 2) = (x - 6y)(x - 6y - 1) - 2x - y - 6 =$$

~~$$x^2 - 4x + 10$$~~

$$x^2 - 12xy + 36y^2 = xy - 6y - x + 6$$

$$(x - 6y) + 2x + xy + 6$$

$$\frac{a}{R} = \frac{AD}{DE}$$

~~$$2(x - 6y) + x^2 - 12x + 2y^2 - 8x =$$~~

$$-2(x - 6y) + x^2 - 10x + 2y^2 - 16y + 20 = 0$$

~~$$\frac{AD}{2} = \frac{AD}{ED}$$~~

$$\frac{2r}{2} = \frac{AD}{ED}$$

$$\sin \alpha = 2\sqrt{3} \cos \alpha$$

~~$$\frac{AD}{ED} = \frac{3}{ED}$$~~

$$\frac{2r}{DA} = \frac{AD}{3}$$

$$1 - \cos^2 \alpha = 12 \cos^2 \alpha$$

$$4 = DA^2 + 4R^2 - 2DA \cdot R \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{13}}$$

$$y^2 + 12y^2 = \frac{4}{9}$$

$$y = \frac{\sqrt{4}}{3\sqrt{13}}$$

$$x = \frac{2\sqrt{4}}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{13}}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a, b, p \quad a \quad a; aq; aq^2$

$ax^2 - 2bx + c = 0$

$D = 4b^2 - 4ac = 4a^2q^2 - 4a^2q = 0$

$x_1 = \frac{-b}{2a} = \frac{-aq}{2a} = -\frac{q}{2}$

$aq^2 = -\frac{q}{2}$

$(aq^2 = -\frac{1}{2})$

$3y > x > y$

$x + y = 100$

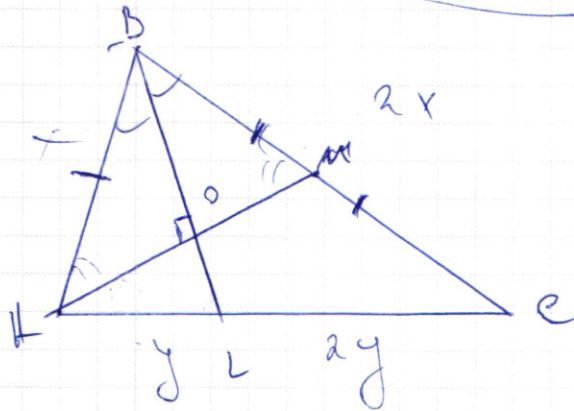
$y = 75$

$x = 25$

$x =$

$x = 24$

$y = 1$



$3x + 3y = 900$

$x + y = 300$

$3y > x$

$3x > y$

$x > y$

$3y > x > y$

$3y + 2x > x$
 $3y > -x$

$x - by = \sqrt{xy - by - x + b}$
 $x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0$

$y(x - b) - (x - b) = (x - b)(y - 1)$

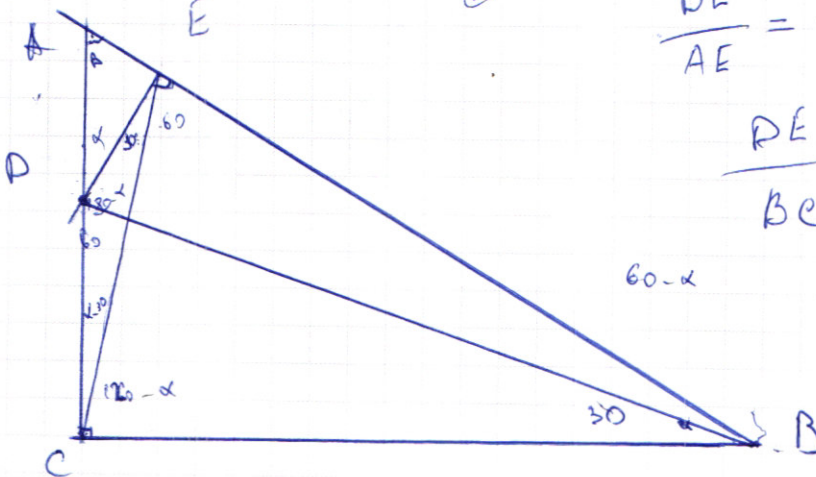
$\frac{DE}{AE} = \frac{BE}{AE} = \frac{BE}{2CD}$

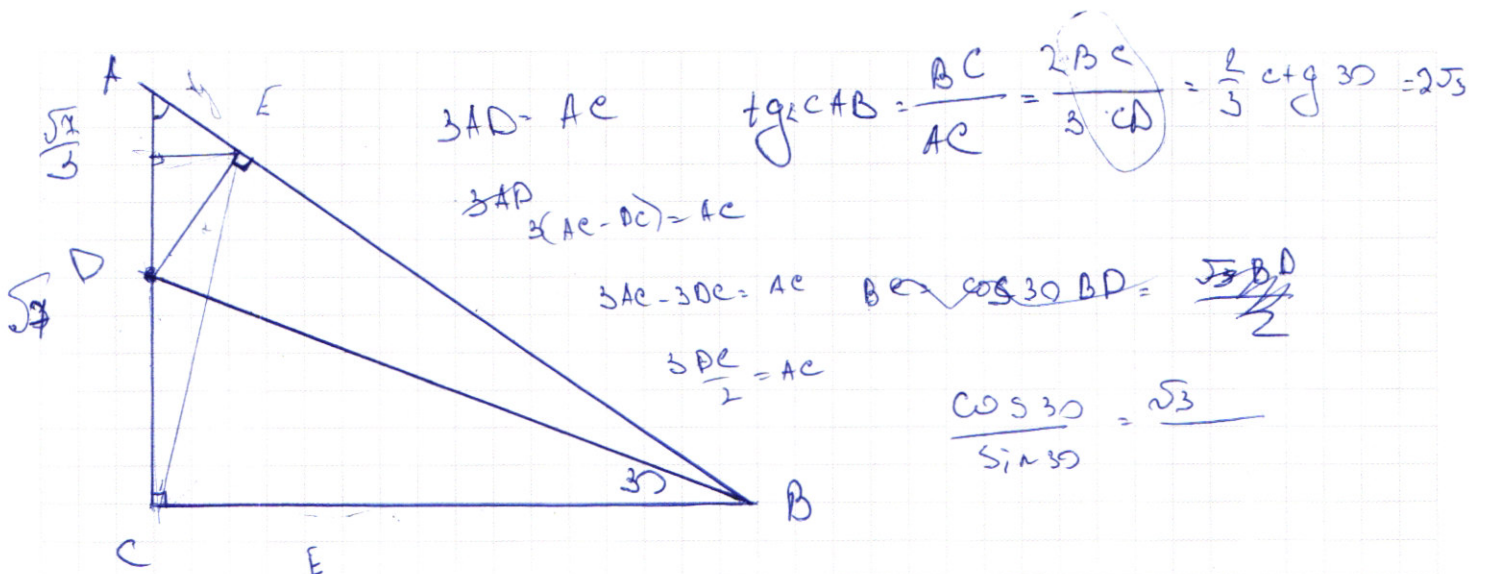
$\frac{DE}{BE} = \frac{AE}{AE} = \frac{1}{3}$

$60 - x$

$x - 30$

$CD = \frac{1}{2} BD = \frac{2}{3} AE$





$$\angle A D = A E$$

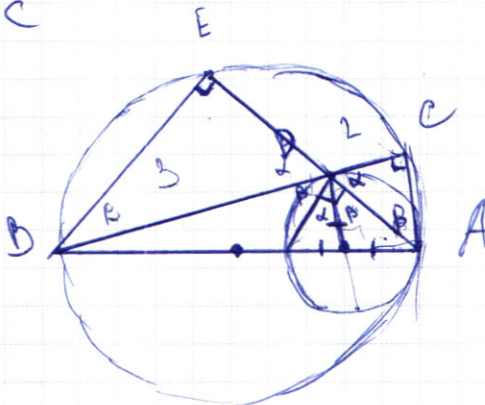
$$\operatorname{tg} \angle C A B = \frac{B C}{A C} = \frac{2 B C}{3 C D} = \frac{2}{3} \operatorname{ctg} 30 = 2 \sqrt{3}$$

$$\angle A D = (A E - D C) = A C$$

$$\angle A C - \angle D C = A C \quad \text{or} \quad \cos 30 B D = \frac{\sqrt{3} B D}{2}$$

$$\frac{\angle D C}{2} = A C$$

$$\frac{\cos 30}{\sin 30} = \frac{\sqrt{3}}{1}$$



$$E D^2 + B E^2 = 9 \quad \text{or} \quad A D \cdot D A = 6$$

$$A D^2 - C A^2 = 4$$

$$B E^2 + E A^2 = 25 + C A^2$$

$$B E^2 - C A^2 = 25 - E A^2$$

$$E D^2 + A D^2 + 25 - E A^2 = 13$$

$$E D = \frac{6}{D A}$$

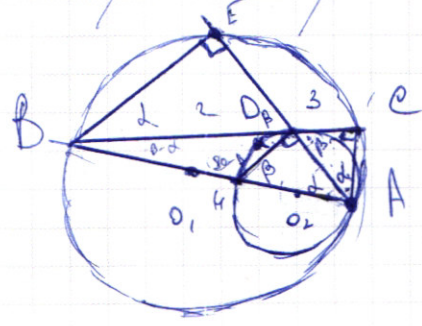
$$\left(\frac{6}{D A} + D A\right)^2 =$$

$$\left(\frac{6}{D A} - \frac{6 + D A}{D A}\right)^2$$

$$\frac{36}{D A^2} + D A^2 - \frac{36 + (2 D A^2 + D A^4)}{D A^2} = -12$$

$$45 \leq 225$$

$$36 + A D^4 - 36 + 12 A D^2 + A D^4 + 2 A D^2 = 0$$



$$E D \cdot A D = 6$$

$$\frac{A D}{E D} = \frac{A D}{A E} = \frac{1}{R}$$

$$\frac{A D}{A E} = \frac{A H}{B H}$$

$$B H \cdot A A = 4$$

$$B H \cdot H D = A H \cdot A E$$

$$\frac{A A}{B H} \cdot \frac{B H}{A A} = \frac{4}{A A} = \frac{E D}{D A}$$

$$H E D = H A \cdot D A$$

$$\frac{E D \cdot D A}{D A} = 8 \quad \text{or} \quad E D^2 = 56$$

$$E D \cdot D A = 6$$

150 150

$$\frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2}$$

149

$$BA^2 \cdot 4 = BA^2 + DA^2 - 2 BA \cdot DA \cdot \cos \alpha$$

$$9 = CA^2 + DA^2 - 2 CA \cdot DA \cdot \cos \alpha$$

$$5 = CA^2 - AD^2 - 2 \cdot DA \cdot \cos \alpha (BA + CA)$$

$$\frac{-4 + BA^2 + DA^2}{2 BA \cdot DA} + \frac{9 - CA^2 + DA^2}{2 CA \cdot DA}$$

$$-4 \cdot CA + BA^2 \cdot CA + DA^2 \cdot CA + 9 BA - CA^2 \cdot BA + DA^2 \cdot BA$$

$$\frac{CD}{DM} = \frac{KA}{DA} \quad \frac{KA}{DA} = \frac{EB}{CD}$$

$$PB = \sqrt{9 - ED^2}$$

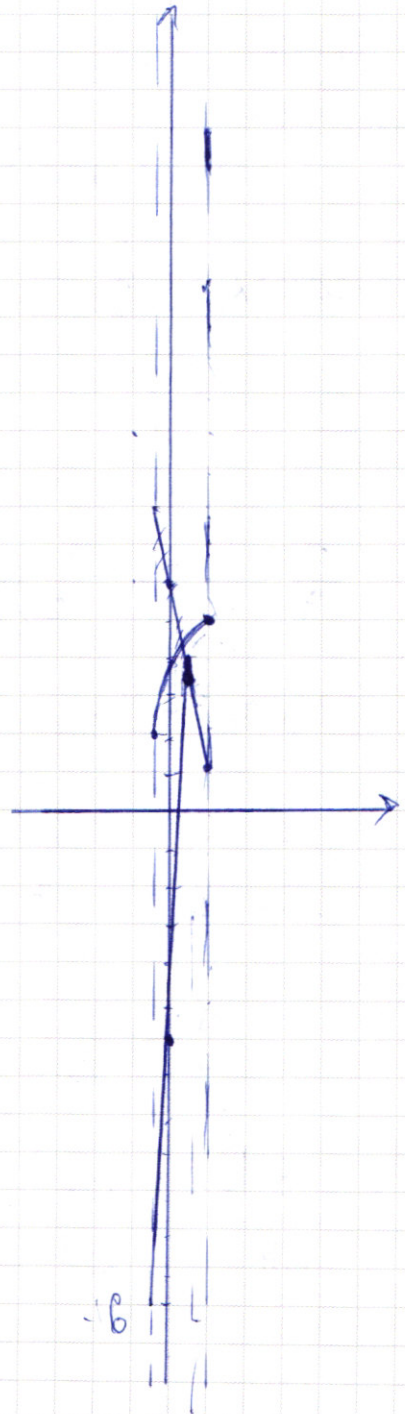
$$9 + 4R^2 - 36R \cdot \cos \alpha = 4$$

$$6 - 4x \quad 6 - 4x \quad 4$$

$$8x - 6 + 4x = 20x - 6$$

$$-8 + 6 + 4 = 5$$

$$-2 - 3 + 4 = 2$$

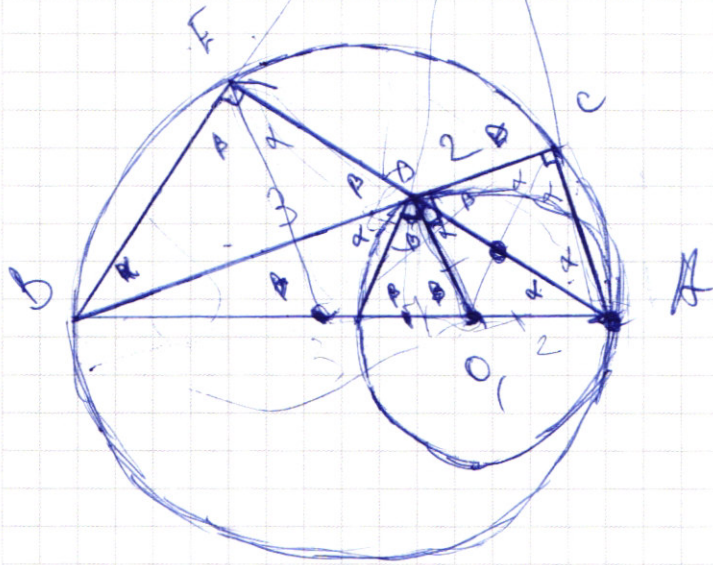


ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$3 = DA^2 + AB^2 - 2 DA \cdot AD \cdot \cos \beta$$

$$4 = DA^2 + AC^2 - 2 DA \cdot AC \cdot \cos \beta$$

$$13 = 2DA^2 + 25 - 2 DA \cdot \cos \beta \left(\frac{EA}{DA} \right)$$



$$\frac{EA}{DA} = \frac{EA}{DA}$$

$$\frac{BD}{DA} = \frac{3}{2}$$

