МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

т.к. a, b, c и корень x_0 – послед. член геом. прогр., то

~~[illegible]~~ $b=q\cdot a$ $\quad c=q^2\cdot a$ и $x_0=q^3\cdot a$

подставим в ур-е

$ax^2+2bx+c=0$:

$ax^2+2aqx+q^2a=0$ $\quad | : a\neq 0$ т.к. иначе образуется пос-ть 0, 0, 0, 0 не явл. геом. прогр.

$x^2+2qx+q^2=0$

$(x+q)^2=0$

$x=-q$

т.е. $x_0=-q$

т.е. $-q=q^3\cdot a$

$a=-\frac{1}{q^2}$

тогда третий ~~[illegible]~~ член прогрессии будет

~~[illegible]~~ $q^2\cdot a = q^2\cdot\left(-\frac{1}{q^2}\right)=-1$

$\boxed{\text{Ответ: } -1}$

№ 2

Дано:

$\triangle ABC$

AM – медиана $\triangle ABC$

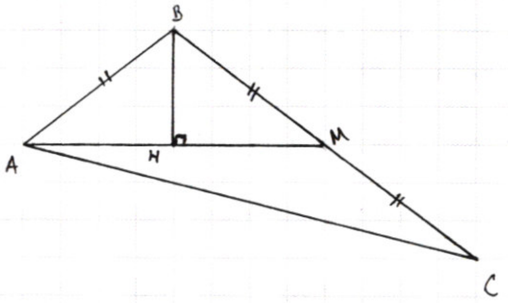
BH – бис-са $\angle ABC$

$BH \perp AM$

$BH \cap AM = т.H$

$P(ABC)=1200$

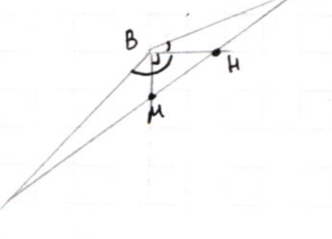
кол-во таких $\triangle$-ов



Решение:

1. Заметим, что медиана и бис-са из одной вершины не могут быть перпендикулярны.

т.к. пусть они выходят из вершины B. ~~[illegible]~~ BM – медиана, BH – ~~[illegible]~~ бис-са, тогда



$\angle ABH=\angle HBC$ по св-ву бис-сы

и $\angle MBH=90^\circ$ по усл, тогда

$\angle ABH=\angle MBH+\angle ABM=90^\circ+\angle ABM$

т.е. $\angle ABC = 2\cdot\angle ABH = 180^\circ+2\angle ABM$ а т.к. $\angle ABM>0$, то

$\angle ABC>180^\circ$ а по т. о Σ углов $\triangle$-ка угол в $\triangle$-ке

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$<180^\circ$ т.е. $\angle ABC$ должен быть меньше 180°
$\Rightarrow$ бис-са и медиана выходят из разных вершин

2. В $\triangle ABM$ бис-са является высотой
$\Rightarrow$ по призн. р/б $\triangle$-ка ~~АВМ~~ $\triangle ABM$-р/б, а значит по св-ву $AB=BM$ а т.к. $BM=MC$ по св-ву р/б $\triangle$-ка, то

$$AB=BM=MC=a$$

3. Пусть $AC=b$, тогда по т. о н-ве $\triangle$-ка

$AC<AB+BC$ $\qquad b<a+2a$ $\qquad b<3a$
$BC<AB+AC$ $\qquad 2a<a+b$ $\qquad b>a$

т.е. $a<b<3a$

т.к. $P_{ABC}=1200$, то
$3a+b=1200$
$b=\underbrace{1200}_{\vdots 3}-\underbrace{3a}_{\vdots 3}$ т.к. a и $b\in\mathbb{N}$ (целочисленные и >0 т.к. стороны)

тогда $b \vdots 3$

$a<1200-3a<3a$
$4a<1200<6a$

т.е. $a<300$, $a>200$ т.к. $a\in\mathbb{N}$, то $a\leq 299$, $a\geq 201$

т.к. по значению a однозначно определяется b, а по этим двум величинам однозначно (и всегда) определяется треугольник ABC.

Тогда, чтобы найти кол-во $\triangle ABC$, уд. условию необходимо и достаточно найти кол-во значений a, уд. условию, т.е.

$a\in\mathbb{N}$ и $201\leq a\leq 299$

т.е. всего $299-201+1=99$ таких значений,

а значит всего 99 таких $\triangle$-ов

$\boxed{\text{Ответ: 99 таких } \triangle\text{-ов}}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6

$$2x^2-x-1 \le ax+b \le x+|2x-1| \quad (1)$$

1) рассмотрим модуль $|2x-1|$

$$|2x-1| = \begin{cases} 2x-1, & x \ge \frac{1}{2} \\ -2x+1, & x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

2) тогда если н-во (1) выполняется на $[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}]$, то это равносильно тому, что

на $[-\frac{1}{4}; \frac{1}{2})$ выполняется и на $[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}]$ выполнается

$2x^2-x-1 \le ax+b \le x-2x+1$

рассмотрим $x=0$
$(0 \in [-\frac{1}{4}; \frac{1}{2}))$

$-1 \le b \le 1$ $\quad |\cdot(-1) < 0$

$-1 \le -b \le 1 \quad (2)$

$2x^2-x-1 \le ax+b \le x+2x-1$

• рассмотрим $x=\frac{1}{2}$:

$\frac{2}{4}-\frac{1}{2}-1 \le \frac{a}{2}+b \le \frac{1}{2}+1-1$

$-1 \le \frac{a}{2}+b \le \frac{1}{2} \quad |\cdot 2 > 0$

$-2 \le a+2b \le 1 \quad (3)$

• рассмотрим $x=1$

$2-1-1 \le a+b \le 1+2-1$

$0 \le a+b \le 2 \quad (4)$

3) Из н-ва (2) и (3) ~~...~~ сложением получаем, что

$-3 \le a+2b \le 2$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

№ 3

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y-2-2x+2=\sqrt{x(y-2)-(y-2)} \\ 2x^2-4x+2-2+y^2-4y+4-4+3=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (y-2)-2(x-1)=\sqrt{(x-1)(y-2)} \\ 2(x-1)^2-2+(y-2)^2-4+3=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (y-2)-2(x-1)=\sqrt{(x-1)(y-2)} \\ 2(x-1)^2+(y-2)^2=3 \end{cases}$$

Замена: $x-1=a$ $\quad x=a+1$

$y-2=b$ $\quad y=b+2$

$$\begin{cases} b-2a=\sqrt{ab} \\ 2a^2+b^2=3 \end{cases}$$

ОДЗ: $ab\geq 0$ и $b-2a\geq 0$ т.е. $ab\geq 0$ и $b\geq 2a$

тогда на ОДЗ $\begin{cases} b-2a=\sqrt{ab} \\ 2a^2+b^2=3 \end{cases}$ $\begin{cases} b^2-4ab+4a^2=ab \\ 2a^2+b^2=3 \end{cases}$ $\begin{cases} 2a^2+b^2=3 & (1) \\ 2a^2-5ab+3=0 & (2) \end{cases}$

(2) $2a^2-5ab+3=0$

$5ab=2a^2+3$

если ~~a=0~~

$a=0$, то получаем

$0=3$ неверно

$\Rightarrow a\neq 0$ тогда $:$ на $5a$:

$$b=\frac{2a}{5}+\frac{3}{5a}=\frac{2a^2+3}{5a}$$

подставим $\boxed{b=\frac{2a^2+3}{5a}}$ в (1):

$$2a^2+\frac{(2a^2+3)^2}{25a^2}=3 \quad |\cdot 25a^2\neq 0 \text{ (см. (2))}$$

$50a^4+4a^4+12a^2+9-75a^2=0$

$54a^4-63a^2+9=0 \quad |:9$

$6a^4-7a^2+1=0$

$6a^4-6a^2-a^2+1=0$

$6a^2(a^2-1)-(a^2-1)=0$

$(a^2-1)(6a^2-1)=0$

$$\left[\begin{array}{l} a^2=1 \\ 6a^2=1 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} a=\pm 1 \\ a=\pm\sqrt{\frac{1}{6}}=\pm\frac{\sqrt{6}}{6} \end{array}\right.$$

тогда $a=1 \quad b=\frac{2+3}{5}=1$

$a=-1 \quad b=\frac{2+3}{-5}=-1$

$a=\frac{\sqrt{6}}{6} \quad b=\frac{(\frac{2}{6}+3)\cdot 6}{\sqrt{6}\cdot 5}=\frac{2+18}{5\sqrt{6}}=\frac{20}{5\sqrt{6}}=\frac{4}{\sqrt{6}}=\frac{4\sqrt{6}}{6}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

$a=-\frac{\sqrt{6}}{6} \quad b=\frac{(\frac{2}{6}+3)\cdot 6}{-5\sqrt{6}}=-\frac{2\sqrt{6}}{3}$

т.е. для пар $(a;b)$ возможны значения

$(1;1)$ $(-1;-1)$ $\left(\frac{\sqrt{6}}{6};\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$ $\left(-\frac{\sqrt{6}}{6};-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$

но $(1;1)\notin$ ОДЗ т.к. $1<2$ (не выполнено $b\geq 2a$ для $a=b=1$)

аналогично не подходит пара $\left(-\frac{\sqrt{6}}{6};-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$ (т.к. $-\frac{2\sqrt{6}}{3}<-\frac{\sqrt{6}}{3}$)

т.е. подходят пары $(-1;-1)$ и $\left(+\frac{\sqrt{6}}{6};+\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$

Обратная замена:

~~a=-1~~ $a=-1$ $b=-1$

$x=-1+1=0$

$y=-1+2=1$

$a=\frac{\sqrt{6}}{6}$ $b=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

$x=\frac{\sqrt{6}}{6}+1=\frac{\sqrt{6}+6}{6}$

$y=\frac{2\sqrt{6}}{3}+2=\frac{2\sqrt{6}+6}{3}$

$\boxed{\text{Ответ: пары } (x;y): (0;1) \text{ и } \left(\frac{\sqrt{6}+6}{6};\frac{2\sqrt{6}+6}{3}\right)}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

Дано:

$\triangle ABC$ - п/уг

$\angle C = 90^\circ$

т. $D \in$ отр AC

т. $E \in$ отр. AB

$\frac{AD}{AC} = \frac{3}{5}$

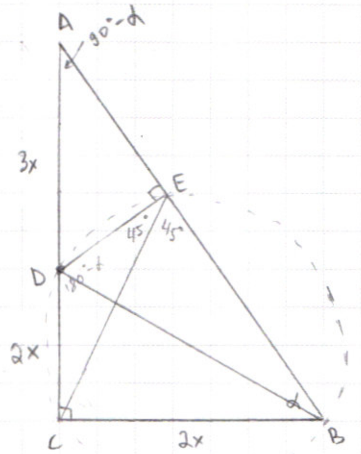
$DE \perp AB$

$AC = \sqrt{29}$

$\angle CED = 45^\circ$

а) $tg \angle BAC$ - ?

б) S_{CED} - ?



Решение: а) Пусть $AD = 3x$, тогда $AC = 5x$ и $DC = 2x$ $(DC = AC - AD)$

1. Т.к. в четыр. $CDEB$ $\angle C = \angle E = 90^\circ$, то $CDEB$ - впис.

$\Rightarrow \angle CBA + \angle CDE = 180^\circ$

тогда если $\angle CBA = \alpha$, то

$\angle CDE = 180^\circ - \alpha$ и $\angle CDB = \angle CEB = \angle DEB - \angle CDE = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$

2. Из $\triangle ABC$ по т. о Σ углов $\triangle$-ка

$\angle BAC = 90^\circ - \alpha$

Из $\triangle ADE$ по т. о Σ углов $\triangle$-ка

$\angle ADE = \alpha$

3. В $\triangle ADE$ и $\triangle ABC$ $\angle E = \angle C = 90^\circ$ и $\angle D = \angle B = \alpha$ $\Rightarrow$ они подобны по I призн

$\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{ED}{BC}$

если $AD = 3x$, то $AC = 5x$, а значит $DC = 2x$

$\frac{3x}{AB} = \frac{AE}{5x} = \frac{ED}{BC}$

$\cancel{\frac{ED}{AE} = \frac{BC}{5x}}$

$\cancel{tg \angle BAC = \frac{ED}{AE} = \frac{BC}{AC}, \text{то} \frac{BC}{5x} = \frac{BC}{AC}}$

4. Из п.1 $\angle CDB = 45^\circ$ $\Rightarrow$ по т. о Σ углов $\triangle$-ка $\angle CBD = 45^\circ$

$\Rightarrow \triangle CBD$ - р/б по призн

$\Rightarrow BC = CD = 2x$

$\Rightarrow tg \angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}$

$\boxed{\text{Ответ: } tg \angle BAC = \frac{2}{5}}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

№ 5

Дано:

окружности Ω и ω

кас. в т. A

AB - диаметр Ω

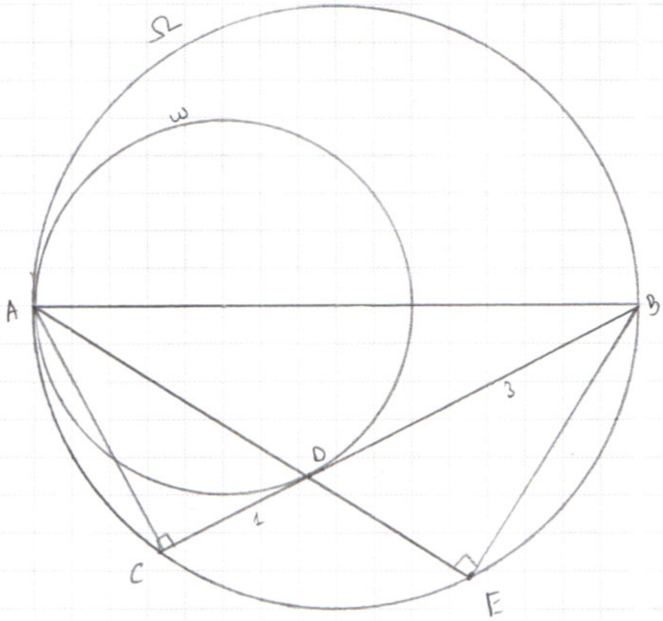
BC - хорда

BC касается ω в т. D

AD ∩ Ω = E

CD = 1

BD = 3



см. рис

Ответ: r(ω) = 3
R(Ω) = 8

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7

1. $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$ (1)

т.к. $f(2) = f\left(\frac{1}{y}\right) + f(2y)$, то $f\left(\frac{1}{y}\right) = f(2) - f(2y)$

и т.к. $f(2y) = f(2) + f(y)$, тогда

$f\left(\frac{1}{y}\right) = f(2) - f(2) - f(y) = -f(y)$

подставим в (1) $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$

т.к. $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$, то $f(x) - f(y) < 0$

т.е. $f(y) > f(x)$

2. Рассмотрим какие значения могут принимать $f(x)$ и $f(y)$

т.к. $x, y \in \mathbb{N}$ и $1 \le x \le 21$ $1 \le y \le 21$

то рассмотрим эти значения для $t \in \mathbb{N}$ $1 \le t \le 21$:

для $t > 1$:

$f(2) = 1$
$f(3) = 1$
$f(4) = f(2) + f(2) = 2$
$f(5) = 2$
$f(6) = f(2) + f(3) = 2$
$f(7) = 3$
$f(8) = f(2) + f(2) + f(2) = 3$
$f(9) = f(3) + f(3) = 2$
$f(10) = f(2) + f(5) = 3$
$f(11) = 5$

$f(12) = f(2) + f(2) + f(3) = 3$
$f(13) = 6$
$f(14) = f(2) + f(7) = 4$
$f(15) = f(3) + f(5) = 3$
$f(16) = f(4) + f(4) = 4$
$f(17) = 8$
$f(18) = f(2) + f(9) = 3$
$f(19) = 9$
$f(20) = f(2) + f(10) = 4$
$f(21) = f(3) + f(7) = 4$

т.е. если $t \in \{2, 3\}$, то $f(t) = 1$

$t \in \{4, 5, 6, 9\}$, то $f(t) = 2$

$t \in \{7; 8, 10, 12, 15, 18\}$ $f(t) = 3$

$t \in \{14; 16; 20; 21\}$ $f(t) = 4$

$t \in \{11\}$ $f(t) = 5$

$t = 13$ $f(t) = 6$

$t = 17$ $f(t) = 8$

$t = 19$ $f(t) = 9$

3. Рассмотрим теперь $f(1)$:

$f(1) = f(y) + f\left(\frac{1}{y}\right)$ ($y \in \mathbb{N}$)

из п. 1 $f\left(\frac{1}{y}\right) = -f(y)$

т.е. $f(1) = f(y) - f(y) = 0$

тогда $f(x)$ и $f(y)$ принимают значение:

~~...~~ $x=1$	$f(x)=0$
$x \in \{2,3\}$	$f(x)=1$
$x \in \{4,5,6,9\}$	$f(x)=2$
$x \in \{7,8,10,12,15,18\}$	$f(x)=3$
$x \in \{14,16,20,21\}$	$f(x)=4$
$x=11$	$f(x)=5$
$x=13$	$f(x)=6$
$x=17$	$f(x)=8$
$x=19$	$f(x)=9$

(аналогично для y)

4. Посчитаем кол-во таких пар $(x;y)$, что $x,y \in \mathbb{N}$ и $1 \le x \le 21$, $1 \le y \le 21$

и $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$ т.е. $f(y) > f(x)$

1. если $f(x)=0$ (т.е. $x=1$) то таких пар
20 (т.к. для x один вариант, а для y 20 (все, кроме 1))

2. если $f(x)=1$ ($x \in \{2,3\}$
тогда $f(y)>1$ т.е. для x 2 варианта, для y – 18 вар.
т.е. для такого случая всего
$2 \cdot 18 = 36$ вариантов

далее всё аналогично:

3. если $f(x)=2$
всего вариантов таких пар $4 \cdot 14 = 56$

4. если $f(x)=3$ всего $6 \cdot 8 = 48$ ~~пар~~ подходящих пар

5. если $f(x)=4$ всего $4 \cdot 4 = 16$ подход. пар

6. если $f(x)=5$ всего $1 \cdot 3 = 3$ подход. пар

7. $f(x)=6$ $1 \cdot 2 = 2$

8. $f(x)=8$ $1 \cdot 1 = 1$

9. $f(x)=9$ $1 \cdot 0 = 0$ подход. пар

То есть всего подходит

$20+36+56+48+16+3+2+1 = 182$ пары

$\boxed{\text{Ответ: 182 пары } (x;y)}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$ $\quad \frac{1}{21} \le \frac{1}{y} \le 1$

$f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) + \cancel{\ldots}$

2
3
5
7

$f\left(\frac{1}{y}\right) = f(2) + f\left(\frac{1}{2y}\right)$

$f(2) - f\left(\frac{1}{y}\right) = -f\left(\frac{1}{2y}\right)$

$f\left(\frac{1}{y}\right) - f(2) = f\left(\frac{1}{2y}\right)$

$f(x) + f\left(\frac{1}{2y}\right) + f(2)$

$f(2) = f\left(\frac{1}{y}\right) + f(2y)$

$f\left(\frac{1}{y}\right) = f(2) - f(2y)$

$f(x) + f(2) - f(2y)$

$f(x) - f(2y) + f(2) < 0$

$f(t)$

$f(2y) > f(x) + 1$

$f(2) + f(y) > f(x) + 1$

$1 + f(y) > f(x) + 1$

$f(y) > f(x)$

$f(1) =$

$f(2) =$

$f(3) =$

$f(4)$

$f(x)$ 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

2	1
3	1
5	2
7	3
11	5
13	6
17	8
19	9
~~23~~	~~12~~
~~29~~	~~15~~
~~31~~	~~16~~
~~37~~	~~19~~
~~41~~	~~21~~

$p_1 < t < p_2$

$f(p_1) = f(t) + f\left(\frac{p_1}{t}\right)$

1
2
3
$2\cdot2 = 4$
5
$2\cdot3 = 6$
7
$2\cdot2\cdot2 = 8$
$3\cdot3 = 9$
$2\cdot5 = 10$
11

$12 = 3\cdot2\cdot2$
13
$14 = 2\cdot7$
$15 = 3\cdot5$
$16 = 2\cdot2\cdot2\cdot2$
17
$18 = 2\cdot3\cdot3$
19
$20 = 2\cdot2\cdot5$
$21 = 3\cdot7$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2}$

$y^2-4xy+4x^2=xy-2x-y+2$

$\boxed{2x^2+y^2-4x-4y+3=0}$

$4x^2+y^2+2x+y-2-5xy=0$

$2x^2+6x+5y-5-5xy=0$

$\cancel{2x(x-2)+y(y-4)}$

$(y-2)^2-4+2(x^2-2x+1)-2+3=0$

$(y-2)^2-4+2(x-1)^2+1=0$

$y-2x=t$

$\cancel{t}=x(y-2$

$x(y-2)-(y-2)$

$y-2x=\sqrt{(x-1)(y-2)}$

$y-2-2x+2=\sqrt{(x-1)(y-2)}$

$(y-2)-2(x-1)=\sqrt{(x-1)(y-2)}$

-1-

$-\frac{2\sqrt6}{3}<-\frac{\sqrt6}{3}$

$x=2$

$y=-1$

$\frac{2\sqrt6}{3}>\frac{\sqrt6}{3}$

$\cancel{7}5$
-12
63

6

7

6

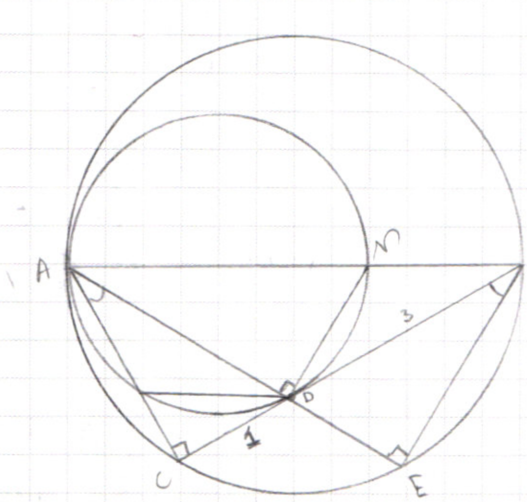
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$AD \cdot DE = CD \cdot BD$

$\frac{AD}{AN} = \frac{AE}{}$

$\frac{AD}{AN} = \frac{DE}{NB}$

$AD \cdot NB = AD \cdot DE = CD \cdot BD$

$AD \cdot NB = CD \cdot BC$

$b > 0{,}5 \quad a \geq 1{,}5$

$a+b \geq 2$

$20+36+56+48+16+3+2+1$

92, 112, 182, 50, 70, 19, 20

$56 + 36 + 20 = 112$

$2x^2 - x - 1 \leq ax+b \leq x + |2x-1|$

$\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$

$2x^2 - x - 1 \leq ax+b \leq x - 2x + 1$

$\left[-\frac{1}{4}; 0\right) \qquad \left[0; \frac{3}{2}\right]$

$\left[0; \frac{3}{2}\right]$

~~$2x^2 - x - 1 \leq ax+b \leq x + 2x - 1$~~

$-1 \leq b \leq 0{,}5$

$\left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$

$2x - 1 \geq 0$

$2x \geq 1$

$x \geq \frac{1}{2}$

$0 \leq a+b \leq 2$

$\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$

$\left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$

$2-1-1 \leq a+b \leq 1+2-1$

$0{,}5 \leq a+b \leq 5{,}5$

$2x^2 - x - 1 \leq ax+b \leq x + 2x - 1$

$-\frac{1}{2} \leq -\frac{a}{2} - b \leq 1$

$\frac{2}{4} - \frac{1}{2} - 1 \leq \frac{a}{2} + b \leq \frac{1}{2} + 1 - 1$

$-1 \leq \frac{a}{2} + b \leq \frac{1}{2}$

$1\frac{1}{2} \leq a \leq 4{,}5$

$1{,}5 \leq a \leq 4{,}5$

$\frac{2 \cdot 9}{4} - \frac{3}{2} - 1 \leq \frac{3}{2}a + b \leq \frac{3}{2} + 3 - 1$

$2 \leq \frac{3}{2}a + b \leq 3{,}5$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$2x-1\geq 0$
$2x\geq 1$
$x\geq \frac{1}{2}$

На $[\frac{1}{2};\frac{3}{2}]$
выполнено
$2x^2-x-1\leq ax+b\leq x+2x-1$
$2x^2-x-1\leq ax+b\leq 3x-1$

$[-\frac{1}{4};\frac{1}{2})$
выполнено
$2x^2-x-1\leq ax+b\leq x-2x+1$
$2x^2-x-1\leq ax+b\leq 1-x$

$f(1)=f(y)+f(\frac{1}{y})=f(y)-f(y)=0$

$0\leq a+b\leq 2$

$-1\leq b\leq 1$
$-1\leq b \quad |\cdot -1$
$1\geq -b \qquad -b\geq -1$
$-1\leq -b\leq 1$

$2x^2-x-1\leq ax-a$

$-1\leq a\leq 3$

$x(2x-1)-1\leq ax+b\leq x+2x-1$

$x(2x-1)-1-(2x-1)\leq ax+b-(2x-1)\leq x$

$(x-1)(2x-1)-1\leq ax+b-(2x-1)\leq x$ $\qquad -1\leq b\leq 1$

$(x-1)(2x-1)\leq ax+b-2x+2\leq x+1$ $\qquad -1\leq -b\leq 1$

$b \quad (a-2)(x-1)$

$0\leq a+b\leq 2$ $\qquad -2\leq -(a+b)\leq 0$

$(2x-1)(x-1)\leq$

$0\leq \frac{a}{2}+b+1\leq 1{,}5$

$6 \quad \frac{16}{2}=8$

$0\leq a+2b+2\leq 3$

$[\frac{1}{2};\frac{3}{2}]$

$\frac{2}{4}-\frac{1}{2}-1\leq \frac{a}{2}+b\leq \frac{1}{2}$

$(2x-1)(x-1)\leq(a-2)(x-1)$ $\quad -2\leq a+2b\leq 1$

$-1\leq \frac{a}{2}+b\leq \frac{1}{2}$

$(1;\frac{3}{2}]$

$\boxed{-2\leq a+2b\leq 1}$

$-3\leq a+b\leq 0$

$2x-1\leq a-2$

$-3\leq a+b\leq 0$ $\qquad a+b=0$

$a+b\leq 0$ $\qquad a=-b$

$2x\leq a-1$ $\quad 0\leq a+b$

$2-1-1\leq a+b\leq 1+1$
$0\leq a+b\leq 2$

$\Rightarrow \quad a+b=0$
т.е. $\quad a=-b$

$a\geq 2x+1$

$1<x\leq \frac{3}{2}$ $\quad 2x^2-x-1\leq ax-a\leq x+2x-1$ $\quad -(2x-1)$

$2<2x\leq 3$

$3<2x+1\leq 4$ $\quad 2x^2-x-1-2x+1\leq a(x-1)-2x+1\leq x$ $\quad +1$

$2x+1\leq a$ $\quad 2x(x-1)-(x-1)\leq a(x-1)-2x+1+1\leq x+1$

$(2x-1)(x-1)\leq a(x-1)-2(x-1)\leq x+1$

$(2x-1)(x-1)\leq a(x-1)-2(x-1)$ $\qquad a\leq 3$

$(2x-1)(x-1)\leq(a-2)(x-1)\leq x+1$ $\qquad 2x+1\leq 3$

$(2x-1)(x-1)-(a-2)(x-1)\leq 0$

$(x-1)(2x-1-a+2)\leq 0$

$x\leq 1$

$(x-1)(2x-a+1)\leq 0$ $\qquad 2x-a+1\geq 0$

$(a-2)(x-1)\leq x+1$ $\qquad a\leq 2x+1$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$p \quad qp \quad q^2p \quad -q$

$ax^2+2bx+c=0$

$px^2+2qpx+q^2p=0$

$x^2+2qx+q^2=0$

$(x+q)^2=0$

$x=-q$

$q^3\cdot p=-q$

$p=-\frac{q}{q^3}=-\frac{1}{q^2}$

$-\frac{q^2}{q^2}=-1$

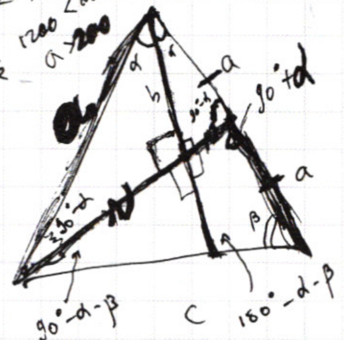
$3a+b<6a \quad b<3a \quad 1200$

$3a+b=1200$

$a \geq 201$

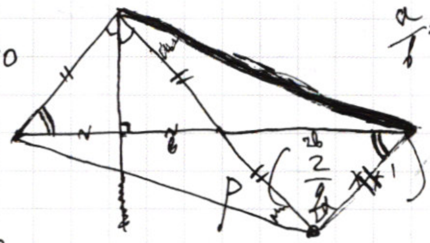
$1200<6a$

$a>200$



$3a+b=1200$

$-\frac{x^2}{q^2}-\frac{2p}{q}x-p=0$



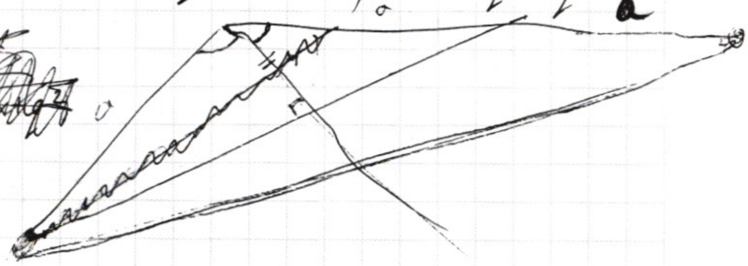
$\frac{x^2}{q^2}+\frac{2p}{q}x+p=0$

$p\left(\frac{2}{q}x+1\right)=-\frac{x^2}{q^2}$

$\left(\frac{x}{q}\right)^2+2\cdot p\frac{x}{q}+p^2-p^2+p=0$

$p=-\frac{x^2}{q^2\left(\frac{2}{q}x+1\right)}=-\frac{x^2}{2qx+q^2}$

$\left(\frac{x}{q}+p\right)^2-p^2+p=0$



$D=\frac{4p^2}{q^2}-4\frac{1}{q^2}\cdot p=$

$=\frac{4p^2-4p}{q^2}$

$x=\frac{-\frac{2p}{q}\pm\sqrt{\frac{4p^2-4p}{q^2}}}{\frac{2}{q^2}}=\frac{-2pq\pm\sqrt{q^2(4p^2-4p)}}{2}=$

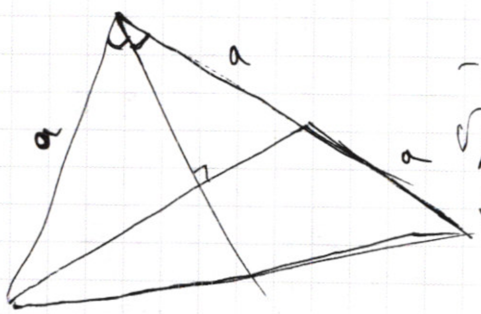
$=-pq\pm\sqrt{q^2(p^2-p)}=-pq\pm q\sqrt{p^2-p}$

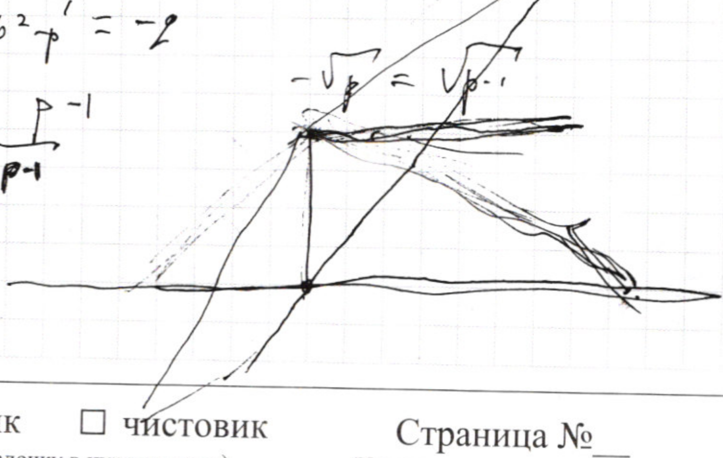
$-pq+q\sqrt{p^2-p}=-q$

$\sqrt{p(p-1)}=p-1$

$\sqrt{p}=\sqrt{p-1}$

$-\sqrt{p}=\sqrt{p-1}$



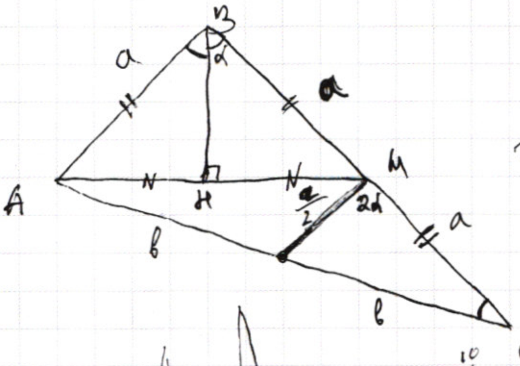


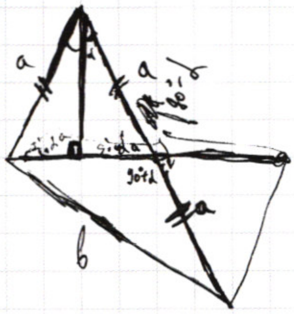
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №___

(Нумеровать только чистовики)





$3a+b=1200$

$b<3a$

$3a+b<6a$

$1200<6a$

$a>200$

$a\geq 201$

$b=1200-3a$

$b\,\vdots\,3$

$2a<a+b$

$b>a$

$b<3a$

1200
-603
597

$2\sin\alpha\, a+a>b$

$603+b=1200$

$b=5$

$597:3$

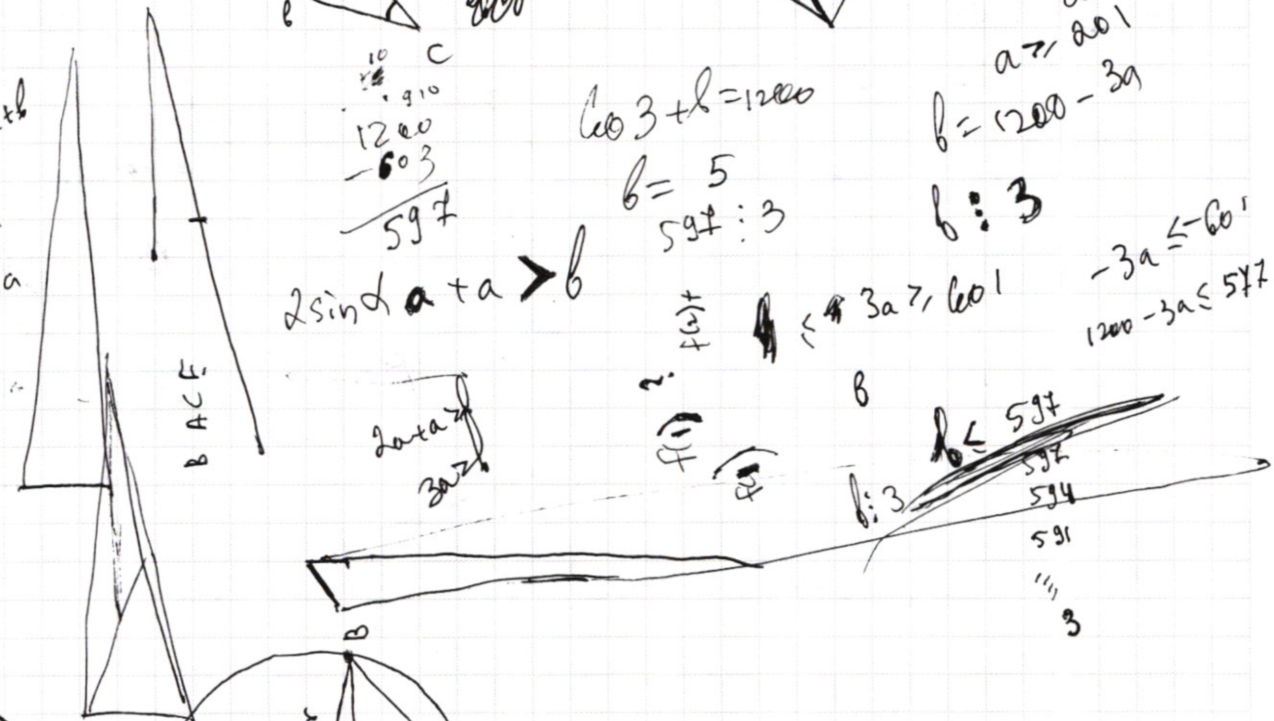
$3a\geq 601$

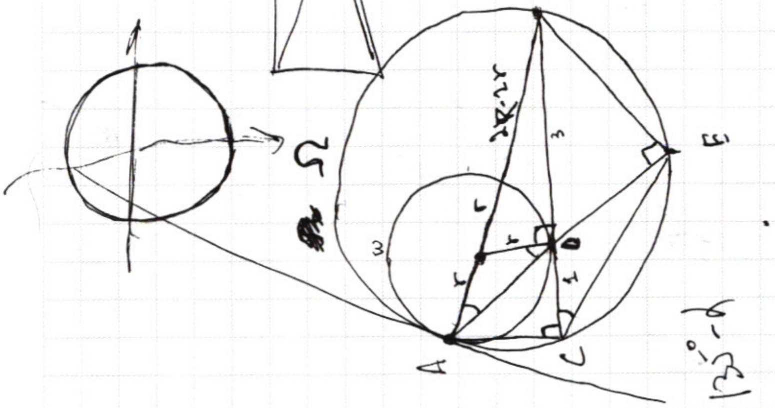
$-3a\leq -601$

$1200-3a\leq 597$

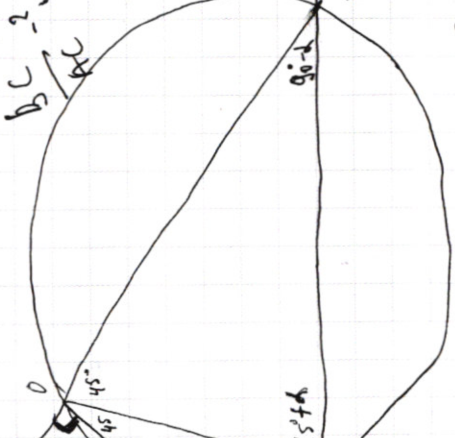
$b\leq 597$

$b\,\vdots\,3$





$135°-\alpha$



$y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2}$

$x^2+y^2-4x-4y+3=0$

$x^2-4x+4+y^2-4y+4+3-8=0$

$(x-2)^2+(y-2)^2=5$

$y^2-4xy+4x^2=xy-2x-y+2$

$y^2-5xy+4x^2+2x+y-2=0$

$\frac{BC}{AC}=\frac{2}{}$

$3x\cdot 8x=AO\cdot AB$

$\frac{3x}{AB}=\frac{AO}{8x}$

$135-\alpha$

$90°-135+\alpha=\alpha-45$