МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 Из условий, $b = ka$; $c = kb = k^2a$.

(k – коэф. прогрессии)

$\Rightarrow ax^2+2bx+c = ax^2+2(k\cdot a)x+k^2a =$

$= a(x^2+2kx+k^2) = a(x+k)^2 = 0.$

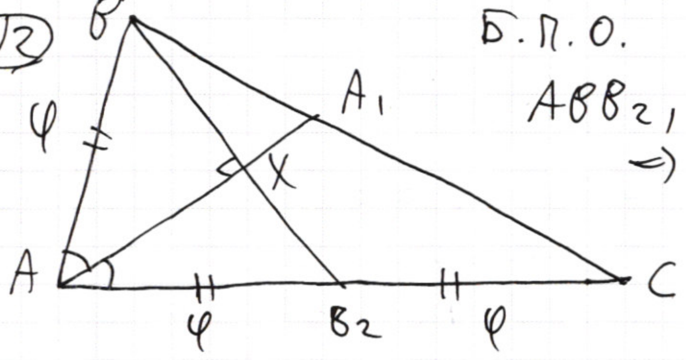
$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = x_2 = x = d = -k \quad (1) \\ a = 0 \quad (2) \end{array}\right.$

(2) $\Rightarrow$ $c = k^2a = 0$.

(1) $\Rightarrow$ $d = kc = -k \Rightarrow c = -1$ (при $k=0$ $c = 0$).

$\Rightarrow$ Ответ: при $a=0$ или $k=0$ $c=0$, а при $a\neq 0$, $k\neq 0$, $c=-1$.

№2



Б.П.О. $AA_1 \perp BB_2$. $\Rightarrow$ в $\triangle ABB_2$, AX – бис-са и высота $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ он – р/б $\Rightarrow$ $AB = AB_2 = \frac{1}{2}AC$.

Заметим, что если в $\triangle ABC$ $AC = 2AB$, то $AB = AB_2$, $\triangle AB_2B$ – р/б и тогда $AA_1 \perp BB_2$ $\Rightarrow$ необходимое и достаточное условие для $AA_1 \perp BB_2$ – это $AB = \frac{1}{2}AC$.

Пусть $AB = \varphi$. $\Rightarrow$ $AC = 2\varphi$. Пусть $BC = \omega$.

$\Rightarrow$ Из условий, $\varphi\in\mathbb{Z}$; $2\varphi\in\mathbb{Z}$; $\omega\in\mathbb{Z}$ и

№2 ... и $3\varphi + \omega = 1200$.

По нер-ву Δ,

$\varphi + 2\varphi > \omega$, т.е. $\omega < 3\varphi$ и

$\varphi + \omega > 2\varphi$, т.е. $\omega > \varphi$.

$\omega = \varphi$ при $\varphi = \frac{1200}{4} = 300 \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi < 300$ (иначе $\omega \leq \varphi$).

$\omega = 3\varphi$ при $\varphi = \frac{1200}{6} = 200 \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi > 200$ (т.к. иначе $\omega \geq 3\varphi$.)

Тогда для каждого $200 < \varphi < 300$ есть

! ω, уд. условиям. ($\omega = 1200 - 3\varphi$).

$\Rightarrow$ всего таких Δ столько же, сколько

и $\varphi \in N$ от 200 до 300 (не вкл.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi = [201; \dots 299] \Rightarrow$ таких вариантов

99. (н. чисел от 200 до 300.) $\Rightarrow$

Ответ: 99.

№3
$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2} \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 \end{cases}$$

ОДЗ:
$y - 2x \geq 0$
$xy - 2x - y + 2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (y-2) - 2(x-1) = \sqrt{(x-1)(y-2)} \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 + 2 = 3 + 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (y-2) - 2(x-1) = \sqrt{(x-1)(y-2)} \\ 2(x-1)^2 + (y-2)^2 = 3 \end{cases}$$

Пусть $(x-1) = u$; $y - 2 = \varphi$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi - 2u = \sqrt{\varphi u} \\ 2u^2 + \varphi^2 = 3 \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 ... $\begin{cases} \varphi - 2u = \sqrt{\varphi u} \\ 2u^2 + \varphi^2 = 3 \end{cases}$ ОДЗ: $\begin{cases} \varphi u \geq 0 \\ \varphi \geq 2u \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \varphi^2 - 4\varphi u + 4u^2 = \varphi u & (а) \\ 2u^2 + \varphi^2 = 3 & (б) \end{cases}$

(а) $\Leftrightarrow \varphi^2 - 5\varphi u + 4u^2 = 0$.

$\Leftrightarrow (\varphi - u)(\varphi - 4u) = 0$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{ll} \varphi = u & (3) \\ \varphi = 4u & (4) \end{array}\right.$

Подстановкой проверяем, что при $\varphi = 0$ или $u = 0$ решений нет.

(3) $\Rightarrow 2u^2 + u^2 = 3 \Rightarrow u = \pm 1$.

Из ОДЗ, $u = \varphi \geq 2u \Rightarrow u < 0. \Rightarrow u = \varphi = -1$.

(4) $\Rightarrow 2u^2 + (4u)^2 = 3 \Rightarrow 18u^2 = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow u = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

$\varphi = 4u$, $\varphi \geq 2u \Rightarrow u \geq 0 \Rightarrow u = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$

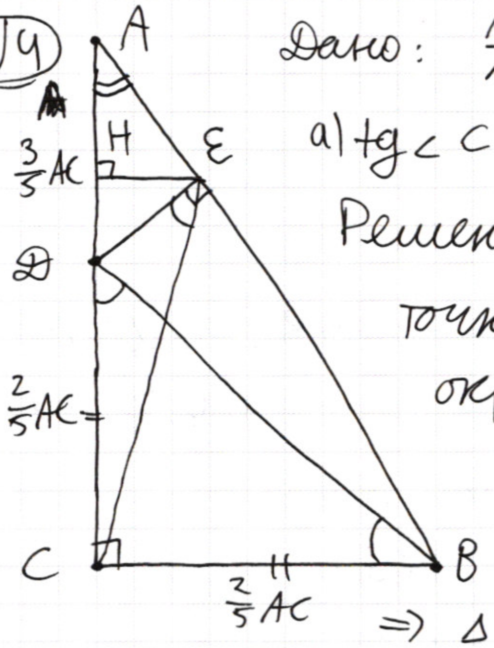
$\varphi = 4u = \frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$. Обратная замена:

$\Rightarrow x_1 = 1 + u_1 = 0$, $y_1 = 2 + \varphi_1 = 1$.

$x_2 = 1 + u_2 = 1 + \frac{\sqrt{6}}{6}$; $y_2 = 2 + \varphi_2 = 2 + \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

$\Rightarrow$ Ответ: $(0; 1)$ и $\left(1 + \frac{\sqrt{6}}{6}; 2 + \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$.

№4



Дано: $\frac{AD}{AC} = \frac{3}{5}$; $DE \perp AB$; $\angle CED = 45°$;

а) $tg\angle CAB$? б) $AC = \sqrt{29}$; $S_{\triangle CED}$?

Решение: а) $\angle DCB = \angle DEB = 90° \Rightarrow$ точки B, C, D, E лежат на окружности диаметром BD.

$\Rightarrow \angle DEC$ и $\angle DBC$ опираются на $DC \Rightarrow \angle DBC = \angle DEC = 45°$.

$\Rightarrow \triangle DBC$ – р/б (он – п/у и $\angle B = 45°$)

$\Rightarrow DC = CB$. $AD = \frac{3}{5}AC \Rightarrow DC = AC - AD =$

$= \frac{2}{5}AC = CB. \Rightarrow tg\angle BAC = \frac{BC}{AC} =$

$= \frac{\frac{2}{5}AC}{AC} = \frac{2}{5}$. $\angle BAC = \varphi$.

б) $tg\varphi = \frac{2}{5} \Rightarrow \sin\varphi = \frac{2}{\sqrt{29}}$, $\cos\varphi = \frac{5}{\sqrt{29}}$.

$\Rightarrow AC = AB\cos\varphi = 5$; $BC = AC\, tg\varphi = 2$.

$\Rightarrow AD = \frac{3}{5}AC = 3$. $\triangle ADE$. $AE = AD\cos\varphi = \frac{15}{\sqrt{29}}$.

H: $EH \perp AD$. ($H \in AC$). $\Rightarrow \triangle AHE$.

$HE = AE\sin\varphi = \frac{15 \cdot 2}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{29}} = \frac{30}{29}$.

$\Rightarrow S_{\triangle CED} = DC \cdot EH \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}AC \cdot EH =$

$= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{30}{29} = \frac{30}{29}$.

Ответ: а) $tg\angle BAC = \frac{2}{5}$; б) $S_{\triangle CED} = \frac{30}{29}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7. $f(ab) = f(a) + f(b) \Rightarrow$ при $b = 1$,

$f(a) = f(a) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$. (1)

При $b = \frac{1}{a}$, $(a \neq 0)$,

$f(a \cdot \frac{1}{a}) = f(a) + f(\frac{1}{a}) = f(a \cdot a^{-1}) = f(1) =$

$= 0. \Rightarrow f(a) + f(\frac{1}{a}) = 0 \Rightarrow f(\frac{1}{a}) = -f(a)$. (2).

Тогда $f(\frac{x}{y}) = f(x \cdot \frac{1}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) = f(x) - f(y)$.

$f(\frac{x}{y}) < 0 \Rightarrow f(y) > f(x)$. Рассмотрим

$f(n)$ при $n = [1; 21]$. Из условий,

$f(p) = \left[\frac{p}{2}\right] \Rightarrow f(2) = 1; f(3) = 1; f(5) = 2;$

$f(7) = 3; f(11) = 5; f(13) = 6; f(17) = 8; f(19) = 9$.

Тогда $f(4) = f(2 \cdot 2) = 2; f(6) = f(2 \cdot 3) = 2;$

$f(8) = f(4 \cdot 2) = 3; f(9) = f(3 \cdot 3) = 2; f(10) = f(5 \cdot 2) =$

$= 3; f(12) = f(4 \cdot 3) = 3; f(14) = f(7 \cdot 2) = 4;$

$f(15) = f(3 \cdot 5) = 3; f(16) = f(4 \cdot 4) = 4; f(18) = f(2 \cdot 9) =$

$= 3; f(20) = f(2 \cdot 10) = 4; f(21) = f(3 \cdot 7) = 4$.

$\Rightarrow \begin{cases} f(1) = 0 & \to 1 \text{ значение } x \text{ для } f(x) = 1. \\ f(2) = f(3) = 1 & \to 2 \text{ знач.} \\ f(4) = f(5) = f(9) = f(6) = 2 & \to 4 \text{ знач.} \\ f(7) = f(8) = f(10) = f(12) = f(15) = f(18) = 3 & \to 6 \text{ знач.} \\ f(21) = f(20) = f(16) = f(14) = 4 & \to 4 \text{ знач.} \\ f(11) = 5;\ f(13) = 6;\ f(17) = 8;\ f(19) = 9. & \text{по 1 зн.} \end{cases}$

№7. Посмотрим все варианты для $f(X)$.
1) $f(X)=0$. возможно при 1 значении $X=1$, для него есть 20 разных y, что $f(y)>f(X)$.
=) при $f(X)=0$ есть $1\cdot 20$ вариантов
Аналогично, для $f(X)=1$ есть 18 р. y: $f(y)>f(X)$, для $f(X)=2$ – 14, для $f(X)=3$ – 8, для $f(X)=4$ – 4, для $f(X)=5$ – 3, для $f(X)=6$ – 2, для $f(X)=8$ – 1, для $f(X)=9$ – 0. (выведено через количество значений X, дающих каждое зн. $f(X)$).

Тогда по правилу суммы, с учётом кол-ва зн. X для кажд. $f(X)$, получаем, что всего вариантов – $N=$
$= 1\cdot 20+2\cdot 18+4\cdot 14+6\cdot 8+4\cdot 4+3+2+1=$
$= 20+36+56+48+16+6=112+70=182$ вар.
Ответ: 182 возможных пар $(X;y)$.

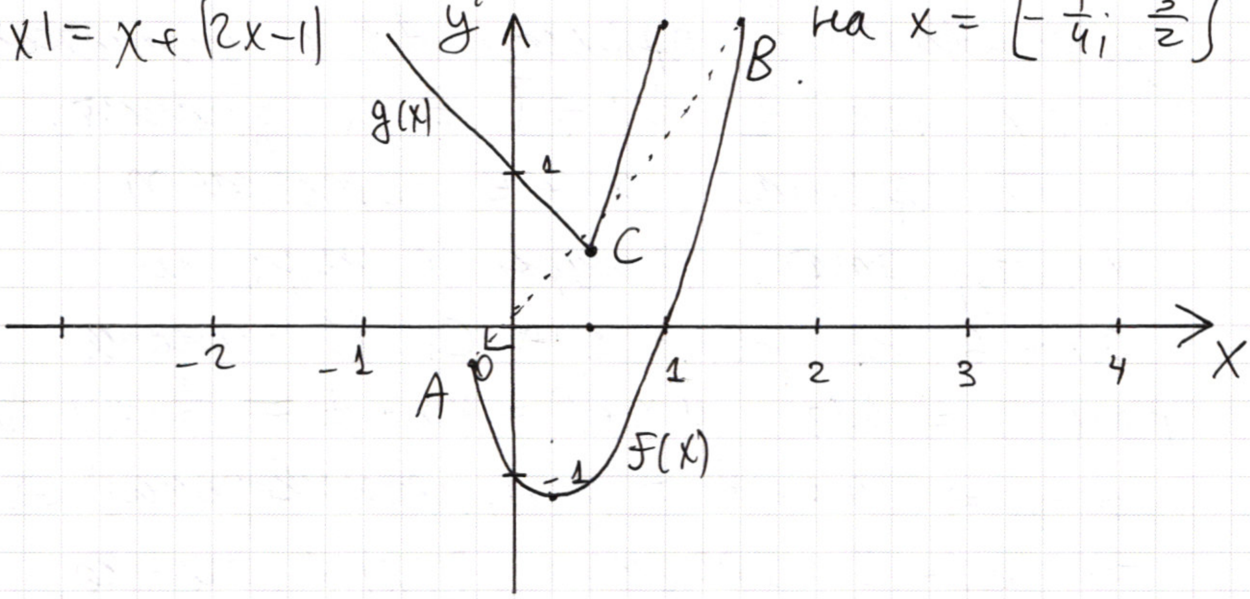
☐ черновик ☑ чистовик Страница № 6
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6 $2x^2 - x - 1 \leq ax + b \leq x + |2x-1|$, $x = \left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

$$x + |2x-1| = \left[\begin{array}{l} 3x - 1;\ x \geq \frac{1}{2} \\ 1 - x;\ x < \frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Построим график $f(x) = 2x^2 - x - 1$.
и $g(x) = x + |2x-1|$ на $x = \left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$



$f(x) = 2x^2 - x - 1 = (2x+1)(x-1)$

Вершина в $x = -\frac{(-1)}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$; $f\left(-\frac{1}{4}\right) =$

$= \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - 1 = -\frac{1}{4}$; $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9 \cdot 2}{4} - \frac{3}{2} - 1 = 2$.

$f\left(\frac{1}{4}\right) = y_в = \frac{2 \cdot 1}{8 \cdot 2} - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{9}{8}$. $f(1) = 0$.

$f(0) = -1$. Отметим $A\left(-\frac{1}{4}; -\frac{1}{4}\right)$ и

$B\left(\frac{3}{2}; 2\right)$. Запишем ур-е прямой AB.

$$AB: kx + t. \begin{cases} k \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) + t = -\frac{1}{4} \\ k\left(\frac{3}{2}\right) + t = 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow k\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{4}\right) = 2 + \frac{1}{4} \Rightarrow k = \frac{9 \cdot 4}{4 \cdot 7} = \frac{9}{7}$, $t = \frac{1}{14}$.

Отметим $C\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

№6 ... Заметим, что $ax+в$ – ур-е прямой.

$ax+в \le x+|2x-1| \Rightarrow M(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}a+в)$ расположена не выше, чем $C(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$, но $\frac{1}{2} < \frac{9}{7}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{14} \Rightarrow C$ ниже AB и тогда M ниже AB. (M ~~не~~ располагается не выше, чем C, а $g(\frac{1}{2}) < k\cdot\frac{1}{2}+t$.).

Значит, M лежит внутри фигуры, образованной прямой AB и участком $f(x)$ на $x=[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}]$. Это значит, что прямая $ax+в$ пересекает контур этой фигуры 2 раза, но $ax+в$ не совпадает с AB (иначе при $x=1/2$ $ax+в = kx+t = \frac{9}{7}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{14} > \frac{1}{2} \Rightarrow ax+в > g(x)$, противоречие) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $ax+в$ пересечет $f(x)$ в точке, отличной от A и B (т.к. обе точки пересечения $ax+в$ с контуром не могут лежать на AB, т.к. $ax+в \ne AB$.) [через 2 точки можно построить единственную прямую]. Но тогда на $ax+в$ найдется точка W, лежащая ниже $f(x)$ на $x=[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}]$, т.к. $ax+в \cap f(x) = N \ne B, A$, т.е. $ax+в$ проходит через оба полупространства от $f(x)$ и пересечения лежит в промежутке

□ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

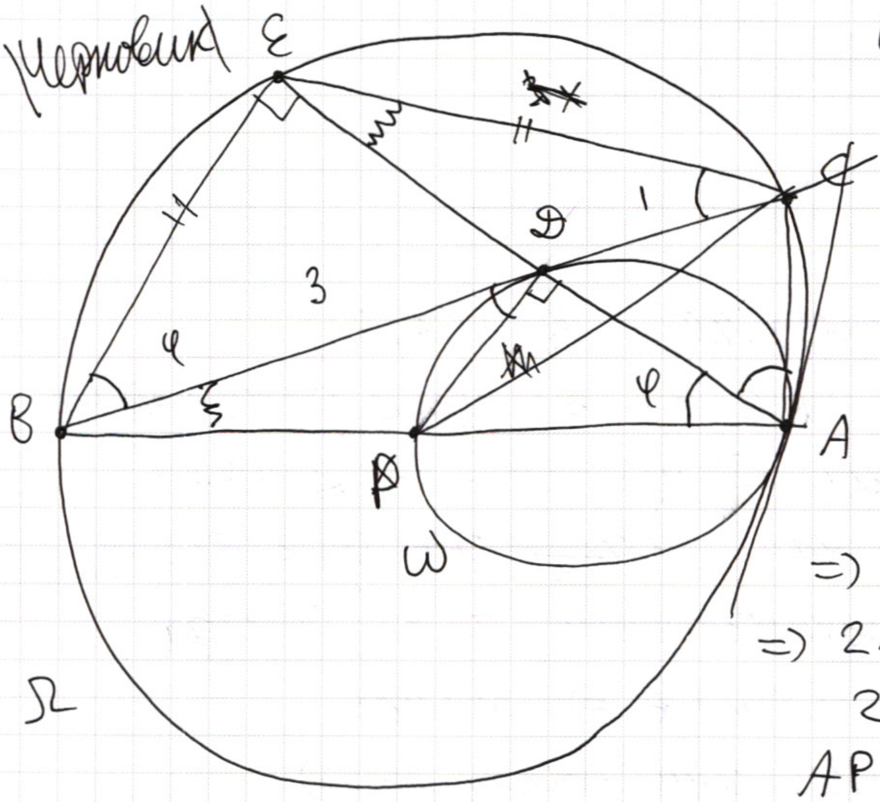
№6 ... в промежутке $(x_A; x_B)$, то есть $\exists W \in ax+b$: $y_W < f(x_W)$, но по условию $f(x) = 2x^2 - x - 1 \leq ax+b$ $\forall x$, но так как ~~мы нашли~~ $y_W < f(x_W)$, получаем противоречие, т.к. тогда $f(x_W) > ax_W + b \Rightarrow$ такой прямой AB не существует $\Rightarrow$ $(a; b) = \varnothing$.

Ответ: нет таких пар $(a; b)$.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Черновик



$BP \cdot BA = 9$

$AD \cdot DE = 3$

$ED \cdot EA = EC^2$

$\frac{3}{EC} = \frac{1}{DP}$

$EC = 3DP = BE.$

$\Rightarrow AB = 3AP$

$\Rightarrow BP = 2AP$

$\Rightarrow 2AP \cdot 3AP = 9$

$2AP^2 = 3$

$AP = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$

$\Rightarrow R_\omega = \frac{\sqrt{6}}{4}, \; R_\Omega = 3R_\omega = \frac{3\sqrt{6}}{4}.$

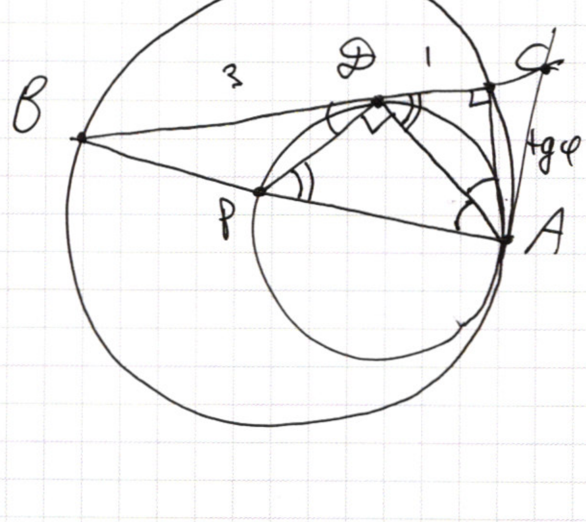
$\frac{3}{EC} = \frac{DP}{1} \Rightarrow DP \cdot EC = 3. \Rightarrow DP \cdot BE = 3.$

$\operatorname{tg}\varphi = \frac{ED}{BE} = \frac{DP}{AD} \Rightarrow BE \cdot DP = 3.$

$\frac{3}{AB} = \frac{BP}{3}$

$AD = 2R_1 \cos\varphi = \frac{1}{\sin\varphi} \Rightarrow$

$\Rightarrow R_1 = \frac{2}{\operatorname{tg}\varphi}$

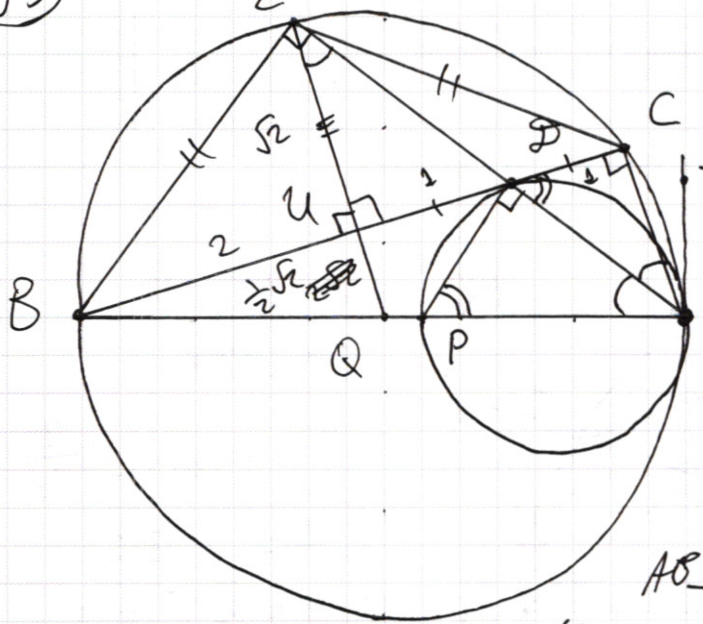


$AC = \operatorname{tg}\varphi \cdot 1$

$\frac{PD}{AD} = \operatorname{tg}\varphi = \frac{BP}{AB}.$

$AB \operatorname{tg}\varphi = 9.$

(№5)



Дано: $BD=3$, $DC=1$.

а) R? r?

($R \leftrightarrow \Omega$; $r \leftrightarrow \omega$)

б) S_{BACE}?

Решение:

~~BC касается~~

~~$\omega \Rightarrow r$~~

AB – диаметр $\Rightarrow$

$AB \perp AT$, AT касается ω и Ω в A.

$\Rightarrow P \doteq \omega \cap AB$, AP – диаметр, т.к. $AP \perp AT$. $\Rightarrow$ Из св-ва угла, опирающегося на диаметр, $\angle PDA = \angle BEA = \angle BCA = 90°$.

BC касается $\omega \Rightarrow \angle APD = \angle ADC = 90° - \angle PAD$.

Пусть $\angle PAD = \varphi$. $\Rightarrow \angle DAC$ в $\triangle ACD$,

$\angle DAC = 90° - \angle ADC = 90° - (90° - \varphi) = \varphi$.

$\Rightarrow \angle BAE = \angle EAC \Rightarrow \overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{EC} \Rightarrow BE = EC$.

Проведём бис-су EU в $\triangle BEC$.

$\overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{EC} \Rightarrow Q$, центр Ω, $Q \in EU$.

EU – бис-са, высота и медиана из р/б $\Rightarrow$

$\Rightarrow BU = UC = \frac{BC}{2} = \frac{DC+BD}{2} = 2$ и $EU \perp BC$.

Тогда $UD = UC - DC = 2 - 1 = 1 = DC$.

$EU \perp BC$ и $AC \perp BC \Rightarrow EU \parallel AC \Rightarrow$

$\angle UEA = \angle EAC = \varphi$ (как нак. лежащие)

$\Rightarrow \triangle EUD = \triangle DCA$ по острому углу и катету ($UD = DC$, $\angle U = \angle C = 90°$, $\angle E = \angle A = \varphi$).

$\Rightarrow ED = DA$.

☐ черновик ☑ чистовик Страница №10

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

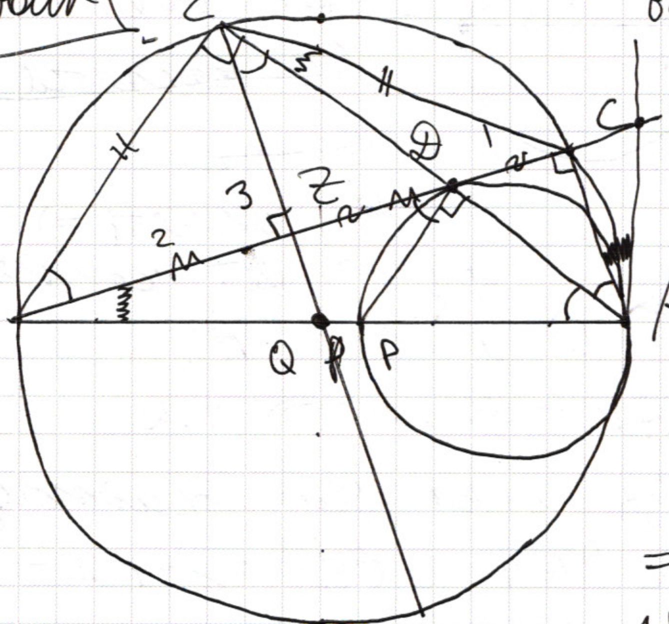
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Черновик



$BD^2 = 9 = BP \cdot AB.$

$AX = XD.$

$\frac{AC}{AX} = \cos\gamma = \frac{4}{D\Omega}$

$CA = 2ZQ$

$ZD = DC = 1$

$\cancel{\Rightarrow AE =}$

$\Rightarrow ED = DA = \sqrt{3}$

$\Rightarrow AE = 2\sqrt{3}$

$\Rightarrow AP = \frac{1}{2}AB \Rightarrow$

$\Rightarrow BP = \frac{1}{2}AB \Rightarrow \frac{1}{2}AB^2 = 9$

$AB = 3\sqrt{2},\ R_1 = \frac{3\sqrt{2}}{2},\ R_2 = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5 ... По свойству пересекающихся хорд окружности, $AD \cdot DE = DC \cdot BD = 3 \cdot 1 = 3$, но $AD = ED \Rightarrow AD = ED = \sqrt{3}$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow AE = AD + ED = 2\sqrt{3}$.

$DP \perp AE$ и $BE \perp AE \Rightarrow DP \parallel BE$ и по теореме Фалеса, $\frac{AP}{AB} = \frac{AD}{AE} = \frac{1}{2}$.

(или из подобия $\triangle APD$ и $\triangle ABE$).

$\Rightarrow AP = \frac{1}{2}AB \Rightarrow BP = AB - AP = \frac{1}{2}AB$.

Но тогда по теореме о касательной и секущей для т. B и ω,

$BP \cdot BA = BD^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}AB^2 = 3^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow AB = 3\sqrt{2}$.

$\Rightarrow R_\Omega = \frac{1}{2}AB = \frac{3\sqrt{2}}{2} = R$;

$AP = 2R_\omega = 2r = \frac{1}{2}AB = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow r = \frac{3\sqrt{2}}{4}$.

Из полученных данных следует, что $Q = P$. ($R = 2r$).

$\Rightarrow S_{BECA} = S_\triangle BUE + S_\triangle EUC + S_\triangle BUQ + S_\triangle UQC + S_\triangle QCA$. Из теоремы Пифагора, $\triangle BEA$,

$EC = BE = \sqrt{AB^2 - AE^2} = \sqrt{18 - 12} = \sqrt{6}$.

$\Rightarrow EU = \sqrt{BE^2 - BU^2} = \sqrt{2}$ (из $\triangle BEU$)

$\Rightarrow QU = QE - EU = R - EU = \frac{3\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

№5 ... Тогда $S_{BECA} = S_{\triangle}BUQ + S_{\triangle}BUE +$
$+ S_{\triangle}EUC + S_{UCAQ}$

$S_{\triangle}BUQ + S_{\triangle}BEU = S_{\triangle}BEQ =$
$= \frac{1}{2}BU \cdot EQ = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ $(EQ = R = \frac{3\sqrt{2}}{2}, BU = 2)$

$S_{\triangle}ECU = \frac{1}{2}UC \cdot EU = \frac{1}{2}(1+1)\sqrt{2} = \sqrt{2}$.

$S_{UCAQ} = \frac{1}{2}(AC + UQ) \cdot UC$

$AC^2 = AB^2 - BC^2$ из $\triangle ABC \Rightarrow$
$\Rightarrow AC = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 - (4)^2} = \sqrt{2}$.

$\Rightarrow S_{UCAQ} = \frac{1}{2}(\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}) \cdot 2 =$
$= \frac{3}{2}\sqrt{2}$.

$\Rightarrow S_{BECA} = S_{\triangle}BEQ + S_{\triangle}UCE + S_{UQAC} =$
$= \frac{3\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} + \frac{3}{2}\sqrt{2} = \sqrt{2}\left(\frac{3}{2} + 1 + \frac{3}{2}\right) =$
$= 4\sqrt{2}$.

Ответ: $R_\omega = r = \frac{3\sqrt{2}}{4}$; $R_\Omega = R = \frac{3\sqrt{2}}{2}$;
$S_{BACE} = 4\sqrt{2}$.

(черновик)

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} & (1) \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 & (2) \end{cases}$$

$rhs^2(1)=\ x(y-2)-(y-2)=(x-1)(y-2)$

$2x^2+y^2-4x-4y+2+4=3$

$2(x-1)^2+(y-2)^2=3$

$(x-1)=\varphi \quad (y-2)=\psi.$

$$\Rightarrow \begin{cases} \psi-2\varphi=\sqrt{\varphi\psi} \\ 2\varphi^2+\psi^2=3 \end{cases}$$

1) $\varphi\psi\geqslant 0$

2) $\psi-2\varphi\geqslant 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \psi^2-4\varphi\psi+4\varphi^2=\varphi\psi \\ 2\varphi^2+\psi^2=3 \end{cases}$$

$\psi^2-5\varphi\psi+4\varphi^2=0 \qquad \frac{\psi}{\varphi}=t$

$t^2-5t+4=0$

$$\left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=4 \end{array}\right.$$

1) $\Rightarrow\ \psi=\varphi\ \Rightarrow\ 3\varphi^2=3\ \Rightarrow\ \varphi=\pm 1=\psi$

$\psi-2\varphi\geqslant 0\Rightarrow\ \varphi=-1,\ \psi=\pm 1.$

$\varphi\psi\geqslant 0\Rightarrow\ \varphi=-1;\ \psi=-1.$

2) $\psi=4\varphi.\Rightarrow\ 18\varphi^2=3,\ \varphi=\pm\sqrt{6}$

$\psi=\pm 4\sqrt{6}.\to\ \psi=-4\sqrt{6}\to\varphi=-\sqrt{6}$

$\Rightarrow x, y$, через φ, ψ ∎

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

'Черновик'

№1 $a, ka, k^2a.$

$ax^2 + 2kxa + k^2a = 0$

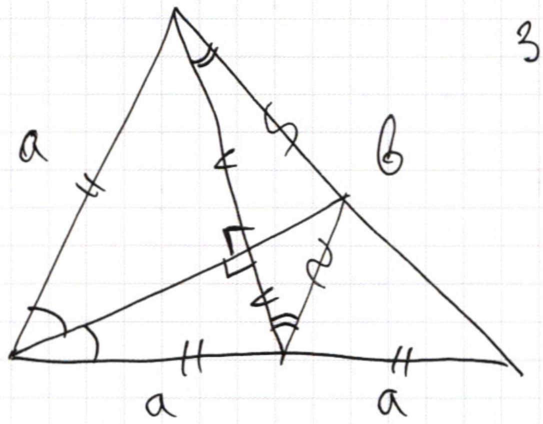
$D = a^2k^2 - a^2k^2 = 0$

$\Rightarrow a(x^2 + 2kx + k^2) = 0$

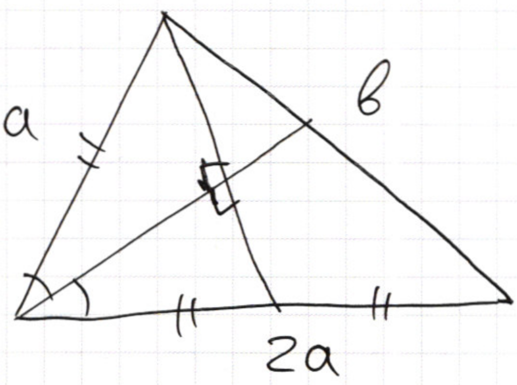
$a(x+k)^2 = 0$

$\Rightarrow ak^3 = -k. \Rightarrow ak^2 = -1$ Δ.

№2



3a + в = 1200 ⇒ в ⋮ 3



~~⇒ 3a + 3t = 1200~~

~~a + t = 400~~

в > a

в < 3a

1) в > a ⇒ пр: $a = 300. \Rightarrow a < 300.$

2) в < 3a ⇒ пр: $a > 200.$

⇒ a: 201, ... 299 → 99 вар.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

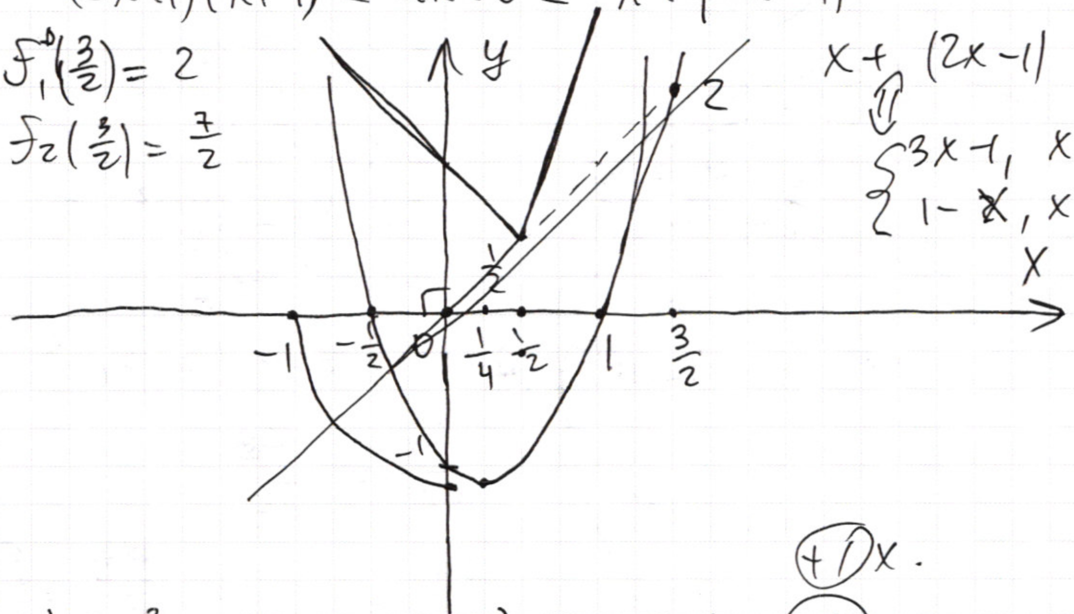
[Черновик]

$f_1'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{2}\left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{9}{8}$

$(2x+1)(x-1) \le ax+b \le x+|2x-1|$

$f_1'\left(\frac{3}{2}\right) = 2$

$f_2\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{7}{2}$



$x+|2x-1|$

$\Updownarrow$

$\begin{cases} 3x-1, & x \ge \frac{1}{2} \\ 1-x, & x < \frac{1}{2} \end{cases}$

$(+1)\ x.$

1) $2x^2-x-1 = 1-x \Rightarrow x = \pm 1.$ (-1)

2) $2x^2-x-1 = 3x-1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2.\ \vee \\ x = 0\ \ x. \end{array}\right.$

$2x^2-4x=0$

$2x(x-2)=0$

$\Rightarrow$ ниже $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, но выше $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$.

$f\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - 1 = -\frac{1}{4}.$

$\Rightarrow$ выше $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$, но ниже $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

$\begin{cases} -\frac{1}{4}k+b = -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{2}k+b = 2 \end{cases}$

$\Rightarrow \left(\frac{3}{2}+\frac{1}{4}\right)k = \frac{9}{4};\quad 7k=9,\ k=\frac{9}{7}.$

$b = -\frac{1}{4}\left(1-\frac{9}{7}\right) = +\frac{1}{14}.$

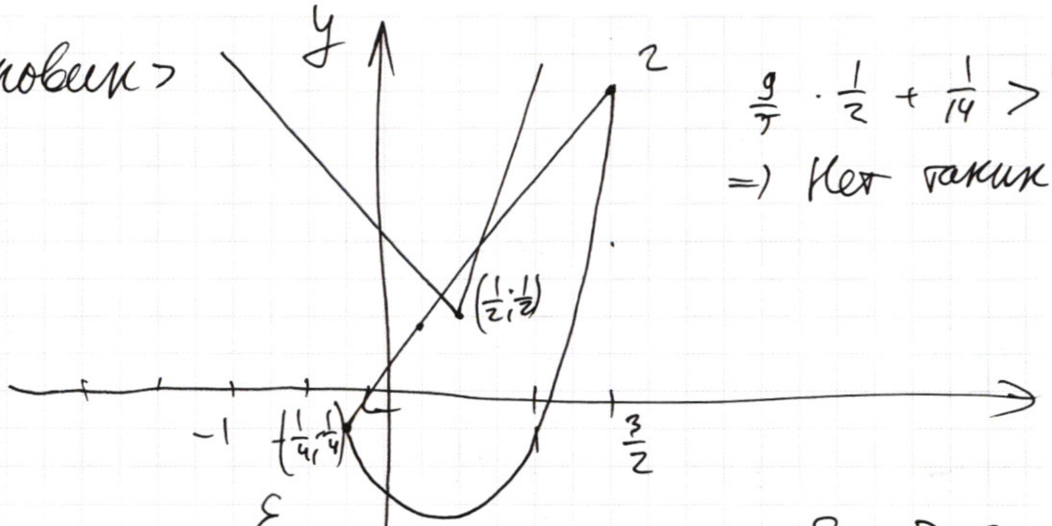
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

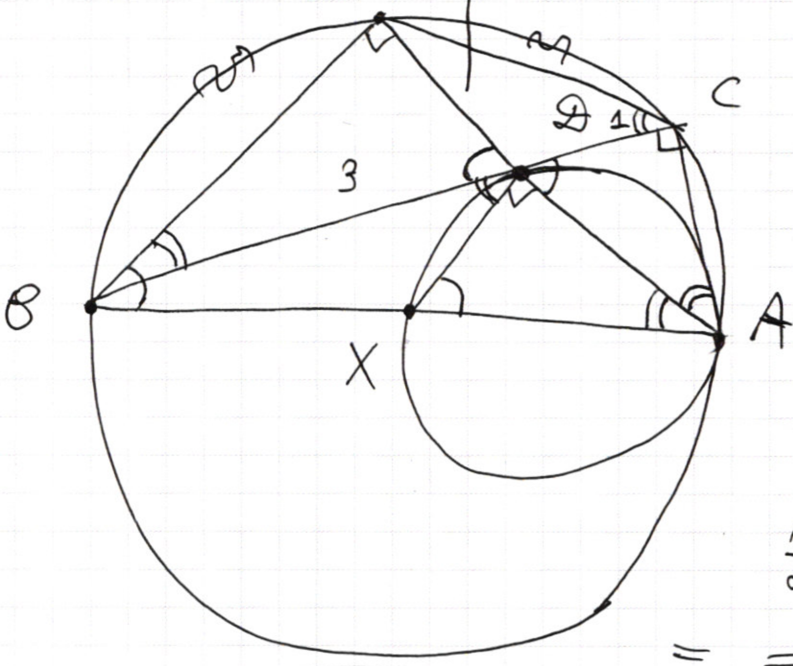
(Нумеровать только чистовики)

<Черновик>



$\frac{9}{7}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{14} > \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ Нет таких $(a;b)$.



$R?\ r?\ S_{ACED}?$

$DX \parallel EB.$

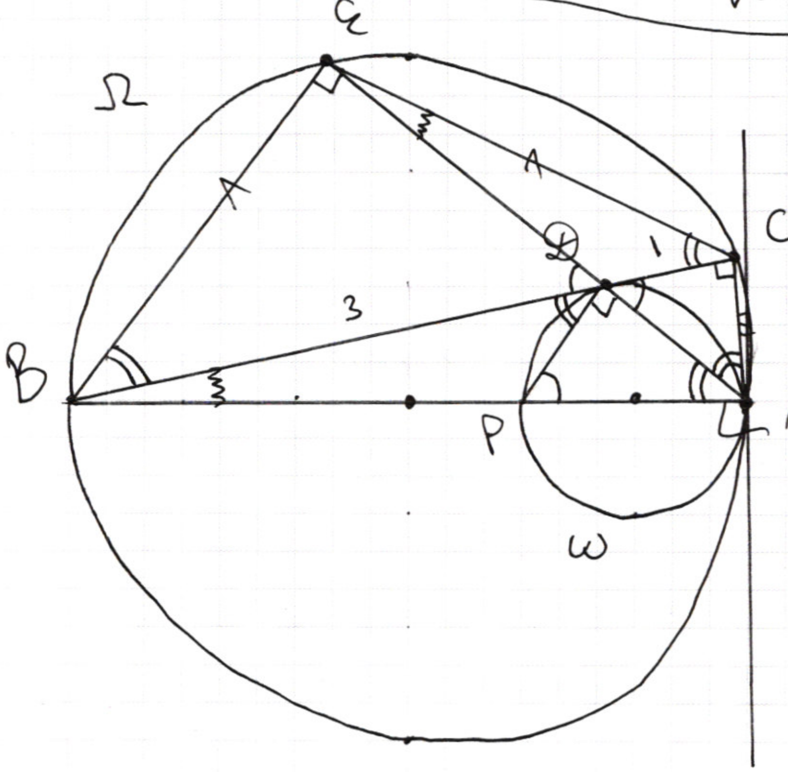
$BX\cdot XA = DB^2 = 9$

$\Rightarrow \overset{\frown}{EC} = \overset{\frown}{BE}$

$ED\cdot EA = EC^2$

$\frac{AX}{BA} = \frac{AD}{AE}$

$\frac{AD}{DC} = \frac{1}{\cos\varphi} = \frac{BD}{BE} = \frac{BD}{EC} = \frac{BD}{\sqrt{ED\cdot EA}}$



$CD = 1;\ BD = 3.$

$DP \parallel BE.$

$BP\cdot BA = D_\Omega\cdot(D_\Omega - D_\omega) = BD^2 = 3^2 = 9.$

$\frac{AP}{BP} = \frac{AD}{ED}$

$EC^2 = ED\cdot EA = k(k+1)AD^2$

$ED = k\cdot AD$

$k\cdot AD^2 = BD\cdot DC = 3$

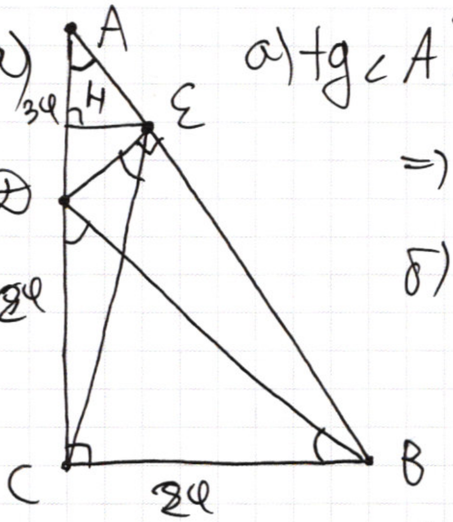
$\Rightarrow EC^2 = BE^2 = (k+1)AD^2$

$\frac{BP}{ED} = \frac{DP}{DC} = \cancel{\frac{EC}{BD}}\ \frac{BD}{EC}.$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

{Черновик}

№4



a) $tg\angle A$? $\angle CED = 45^\circ \Rightarrow \angle DBE = 45^\circ$ $\overset{\shortparallel}{\angle CDB}$.

$\Rightarrow tg\,\alpha = \frac{2}{5}$.

б) $AC = \sqrt{29}$. S_{CED}?

$\Rightarrow CB = 2,\ AC = 5.$

$\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{29}} \Rightarrow$

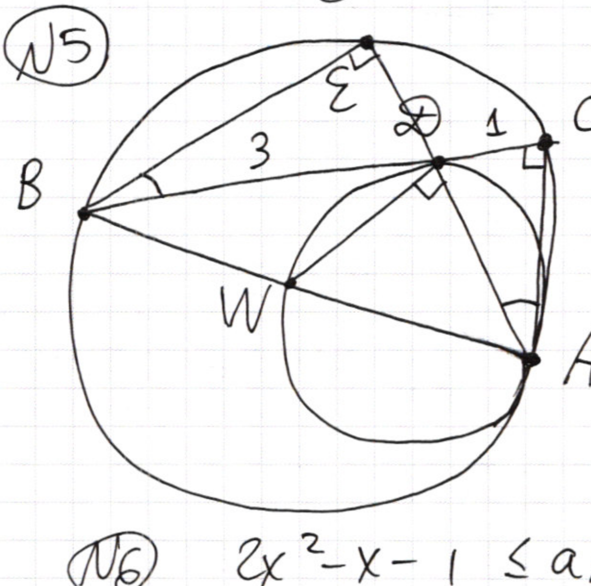
$\Rightarrow AE = \frac{3}{\sqrt{29}} \Rightarrow$

$\Rightarrow EH = AE\sin\alpha =$

$= AD\sin\alpha\cos\alpha = \frac{10}{29}AD = \frac{30}{29}.$

$\Rightarrow S = \frac{1}{2}DC\cdot EH = \frac{30}{29}$.

№5



R_Ω? R_ω? S_{BACE}?

$CD = 1$ $BD = 3$

$BW\cdot BA = 9 = 4R_1R_2$

?

№6 $2x^2 - x - 1 \le ax + b \le x + |2x-1| \rightarrow$

$\rightarrow \forall x: \left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

$(2x+1)(x-1) \le ax+b \le \begin{cases} 3x-1, & x \geq \frac{1}{2} \\ 1-x, & x < \frac{1}{2} \end{cases}$

№7 $\cancel{f\left(\frac{x}{y}\right)\cdot f(y) = f\left(\frac{1}{y}\right)}$ $f\left(\frac{1}{y}\right) + f(y) = f(1)$

$f(1) = 0$ $\Rightarrow f\left(\frac{1}{y}\right) = -f(y)$

"Черновик":

$f(\frac{1}{y}) = -f(y)$

$\Rightarrow f(x \cdot \frac{1}{y}) = f(x) - f(y)$

$\Rightarrow f(x) < f(y).$

$f(1) = 0$

$f(2) = f(3) = 1$

- $f(4) = f(2) + f(2) = 2$
- $f(5) = 2$
- $f(7) = 3$

$f(11) = \cancel{10}\ 5$

$f(13) = 6$

$f(17) = 8$

$f(19) = 9$

~~$f(8$~~

$\Rightarrow Var =$
$= 1 \cdot 20 + 2 \cdot 18 +$
$+ 4 \cdot 14 + 6 \cdot 8 +$
$+ 4 \cdot 4 + 3 + 2 + 1 =$
$= 20 + 36 + 56 + 48 +$
$+ 16 + 6 =$
$= 112 + 70 = \boxed{182}$

1	0	✓
2	1	✓
3	1	✓
4	2	×
5	2	×
6	2	×
7	3	o
8	3	o
9	2	×
10	3	o
11	5	v
12	3	o
13	6	v
14	4	ч
15	3	o
16	4	ч
17	8	v
18	3	o
19	9	~
20	4	ч
21	4	ч

1×0	20
2×1	18
4×2	14
6×3	8
4×4	4
~~1×5 1,6,8,9~~	
1×5	3
1×6	2
1×8	1
1×9	0

$\Rightarrow$ ~~$f(6) = 2$~~ $f(8) = f(2 \cdot 4) = 3$

$f(9) = 2$; $f(10) = 3$;

$f(12) = 3$; $f(14) = 4$; $f(15) = 3$

$f(16) = 4$; $f(18) = 3$; $f(20) = 4$; $f(21) = 4$.

~~$\Rightarrow \{0; 1; 1; 2; 2; 2; 3; 3; 2; 3; 5;$~~

$\Rightarrow$ 1×0 $\Rightarrow 1 + 2 + 4 + 6 + 3 + 4 \to 20.$
2×1
4×2
6×3
4×4
1×5, 6, 8, 9.

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)