# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

## 10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа $a$, $b$, $c$ являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа $a$, $b$, $c$ не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике $ABC$ на катете $AC$ и гипотенузе $AB$ отмечены точки $D$ и $E$ соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла $BAC$, если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника $CED$.

5. [5 баллов] Окружности $\Omega$ и $\omega$ касаются в точке $A$ внутренним образом. Отрезок $AB$ – диаметр большей окружности $\Omega$, а хорда $BC$ окружности $\Omega$ касается $\omega$ в точке $D$. Луч $AD$ повторно пересекает $\Omega$ в точке $E$. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

   выполнено для всех $x$ на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция $f$ определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел $a$ и $b$ из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа $p$ ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее $x$). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1) Пусть $q$ – шаг прогрессии, т.е.

$b = aq, \quad c = aq^2, \quad x = aq^3$

$ax^2 + 2bx + c = 0$

~~$a \cdot x^2 + 2$~~

$a \cdot (aq^3)^2 + 2aq \cdot aq^3 + aq^2 = 0.$

$a^3q^6 + 2a^2q^4 + aq^2 = 0$

Пусть 3 член последовательности $aq^2 = t$, тогда:

$t^3 + 2t^2 + t = 0$

$t(t^2 + 2t + 1) = 0$

$t(t+1)^2 = 0.$

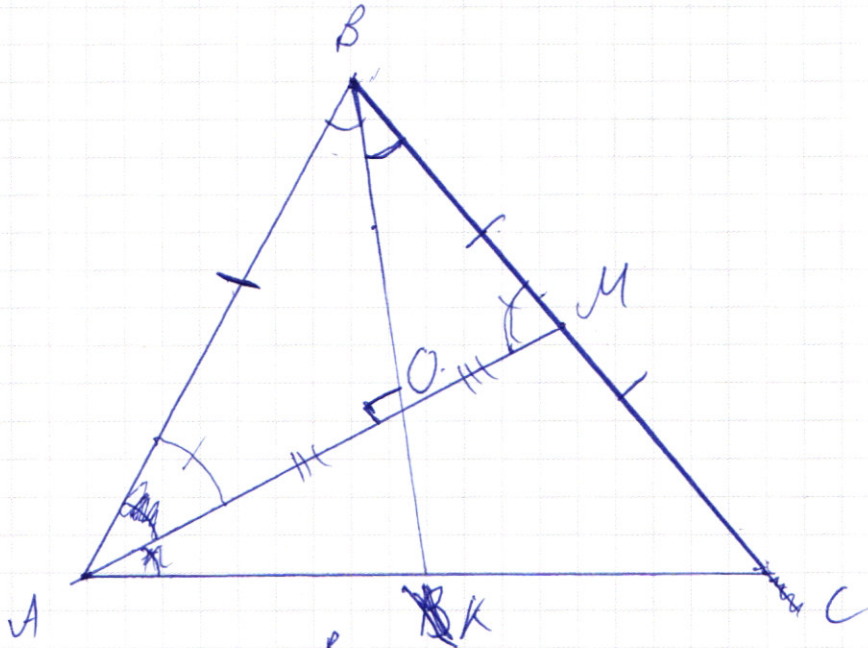
$t = -1.$ $t \neq 0$ – т.к. тогда либо $q = 0$ либо $a = 0$, а значит или все или все кроме первого члена последовательности равны 0, что не может быть, значит $t = -1$

~~Ответ: −1.~~

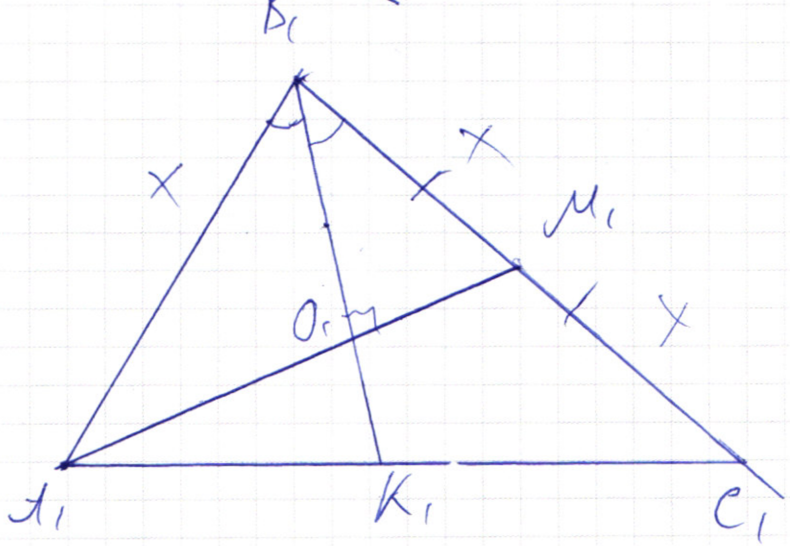
Ответ: −1.

№2).

1)




2).




AM – медиана △ABC, BK – его биссектриса.

В △ABM BO – биссектриса и высота, значит △ABM – равнобедренный, значит $2AB = BC$.

Проверим, что если одна сторона у этого треугольника в 2 раза больше другой то ~~этот~~, у этого треугольника одна из сторон 2 раза больше другой.

В △$A_1B_1C_1$ – $A_1M_1$ – медиана $B_1K_1$ – биссектриса, ~~значит~~ т.к. $A_1B_1 = \frac{1}{2} B_1C_1$ то $A_1B_1 = B_1M_1$, значит в

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~$\triangle A_1B_1C_1 - B_1O_1$~~

$\triangle A_1B_1M_1 - B_1O_1$ - является биссектрисой, следовательно и высотой.

Очевидно что в треугольнике биссектриса и медиана проведенные из одной вершины не могут быть перпендикулярны друг другу.

~~Тогда~~ Пусть у треугольника описанного в условии стороны равные $x$, тогда другая сторона равна $2x$ и третья сторона $- c$, тогда.

$$\begin{cases} 3x + c = 1200 \\ 2x < x + c \\ c < 2x + x \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + c = 1200 \\ c > x \\ c < 3x \end{cases}$$

Значит $x \in (200; 300)$.

Для каждого из $x$ - определена ровно 1 $c$. Значит всего система имеет 99 целочисленных значений. А значит всего ~~возможно~~ таких ~~бре~~ 99 треугольников.

Ответ: 99 треугольников.

№3) $\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$

$\begin{cases} y-2x=\sqrt{y(x-1)-2(x-1)} \\ 2(x^2-2x+1)+y^2-4y+4=+3 \end{cases}$

$\begin{cases} y-2x=\sqrt{(y-2)(x-1)} \\ 2(x-1)^2+(y-2)^2=3 \end{cases}$

$\begin{cases} (y-2)-2(x-1)=\sqrt{(y-2)(x-1)} \\ 2(x-1)^2+(y-2)^2=3 \end{cases}$

Пусть $y-2=a$, $x-1=b$

$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ 2a^2+b^2=3 \end{cases}$

$\begin{cases} a^2-4ab+4b^2=ab \\ 2a^2+b^2=3 \\ \cancel{ab\geq 0} \\ a-2b\geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} a^2-5ab+4b^2=0 \\ 2a^2+b^2=3 \\ \cancel{ab\geq 0} \\ a-2b\geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=b \\ a=4b \end{array}\right. \\ 2a^2+b^2=3 \\ a-2b\geq 0 \end{cases}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=b \\ 2a^2+b^2=3 \\ a-2b\geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a=4b \\ 2a^2+b^2=3 \\ a-2b\geq 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=b \\ \left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=-1 \end{array}\right. \\ a-2b\geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a=4b \\ \left[\begin{array}{l} a=\frac{4}{11}\sqrt{11} \\ a=-\frac{4}{11}\sqrt{11} \end{array}\right. \\ a-2b\geq 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=-1 \\ b=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} a=\frac{4}{11}\sqrt{11} \\ b=\frac{1}{11}\sqrt{11} \end{cases} \end{array}\right.$$

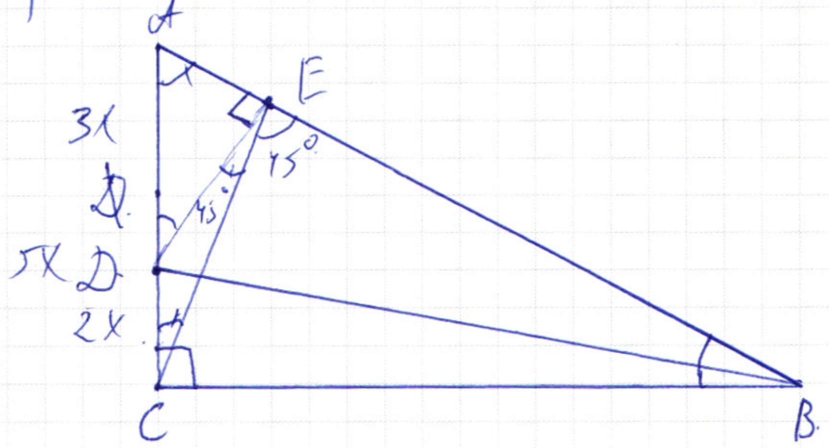
Т.к. $y-2=a$ и $x-1=b$ то:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y-2=-1 \\ x-1=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} y-2=\frac{4}{11}\sqrt{11} \\ x-1=\frac{1}{11}\sqrt{11} \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=1 \\ x=0 \end{cases} \\ \begin{cases} y=2+\frac{4}{11}\sqrt{11} \\ x=1+\frac{1}{11}\sqrt{11} \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(0;1)$; $\left(1+\frac{1}{11}\sqrt{11};\ 2+\frac{4}{11}\sqrt{11}\right)$

№4)




$$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC}$$

$\cancel{AD}$ $$\frac{3x}{AB} = \frac{AE}{5x} = \frac{DE}{BC}$$

$\cancel{\frac{\sin\angle A}{DE} = \sin\angle A}$ Пусть $AD = 3x$, тогда $DC = 2x$.

По теореме синусов:

$$\frac{\sin\angle AED}{AD} = \frac{\sin\angle A}{DE}$$

$$\frac{\sin\angle AEC}{AC} = \frac{\sin\angle A}{CE}$$

$$\frac{\sin\angle AED\cdot AC}{AD\cdot\sin\angle AEC} = \frac{CE}{DE}$$

$$\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}\cdot\frac{5}{3} = \frac{CE}{DE}$$

$$\frac{10}{3\sqrt{2}} = \frac{10\sqrt{2}}{6} = \frac{5\sqrt{2}}{3} = \frac{EC}{ED}$$

~~Пусть~~ $\cancel{EC = a}$~~, тогда~~ $\cancel{ED = \frac{5\sqrt{2}}{3}\cdot a}$

Пусть $ED = a$, тогда $EC = \frac{5\sqrt{2}}{3}a$.

По теореме косинусов: $DC^2 = ED^2 + EC^2 - 2\cdot\cos 45^\circ\cdot ED\cdot EC =$
$= a^2 + \frac{50}{9}a^2 - 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{5\sqrt{2}}{3}a^2 = a^2 + \frac{50}{9}a^2 - \frac{10}{3}a^2 = a^2 + \frac{20}{9}a^2 = \frac{29}{9}a^2$.

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$4x^2 = \frac{29}{9} a^2.$

$a^2 = \frac{36}{29} x^2$

$a = \frac{6\sqrt{29}}{29} x.$

~~$\sin\angle DAE =$~~

~~$\sin\angle BAC =$~~

~~$\cos\angle BAC =$~~

$\sin\angle BAC = \frac{DE}{AD} = \frac{a}{3x} = \frac{6\sqrt{29}}{29\cdot 3} = \frac{2\sqrt{29}}{29}$

$\cos\angle BAC = \sqrt{1-\sin^2\angle BAC} = \frac{5\sqrt{29}}{29}$

$\operatorname{tg}\angle BAC = \frac{\sin\angle BAC}{\cos\angle BAC} = \frac{2}{5}.$

По теореме о площади треугольника.

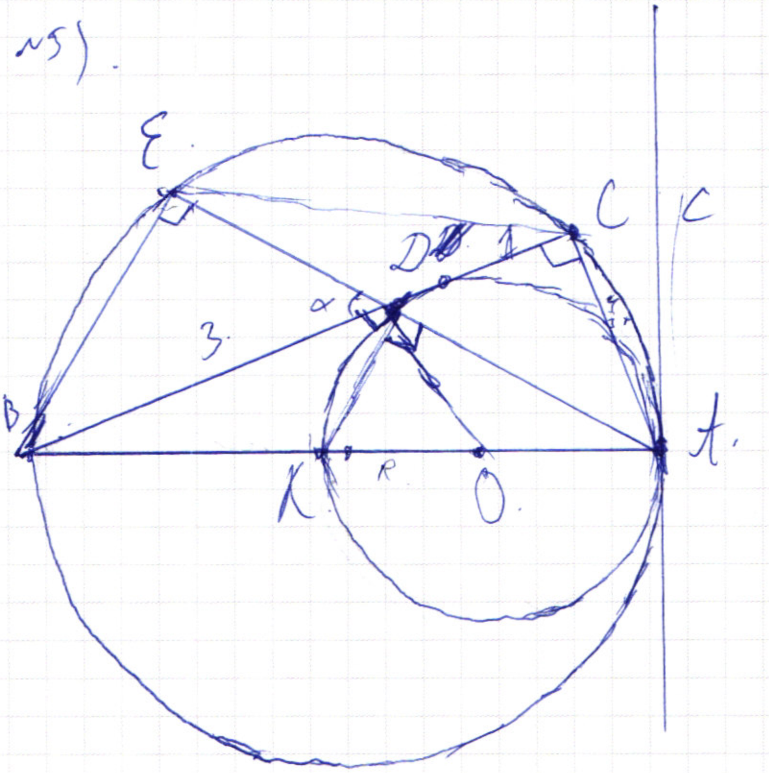
$S_{\triangle EDC} = \frac{1}{2}\cdot\sin 45^\circ \cdot DE\cdot EC = \frac{1}{2}\cdot\sin 45^\circ a\cdot \frac{5\sqrt{2}}{3} a =$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot a\cdot\frac{5\sqrt{2}}{3}\cdot a = \frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{5}{3} a = \frac{5}{6} a^2 =$

$= \frac{36}{29}\cdot\frac{5}{6}\cdot x^2 = \frac{36}{29}\cdot\frac{5}{6}\cdot\left(\frac{AC}{5}\right)^2 = \frac{36\cdot 5\cdot 29}{29\cdot 6\cdot 25} = \frac{6}{5} = 1{,}2.$

Ответ: $S_{\triangle EDC} = 1{,}2$; $\operatorname{tg}\angle BAC = \frac{2}{5}.$

№5).




$ED \cdot AD = BD \cdot DC = 3$

Т.к. окружности $\Omega$ и $\omega$ касаются внутренним образом ~~в~~ в т. $A$ и $AB$ – диаметр, то значит $AB$ проходит и через центр другой окружности. Докажем это: проведем к окружностям общую касательную ($c$) и т.к. $AB \perp c$, то и диаметр другой окружности должен быть перпендикулярен $c$, получается центры ~~окружностей~~ обоих окружностей лежат на прямой $AB$.

$\cancel{BD^2 = BK \cdot BA =}$

Пусть радиус большей окружности равен $R$, а меньшей $r$. тогда:

$BD^2 = BK \cdot BA \Rightarrow 9 = 4(R - r) \cdot R = (R^2 - rR) \cdot 4.$

$BO^2 = OD^2 + BD^2 \Rightarrow (2R - r)^2 = 9 + r^2.$

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cancel{BD^2} = \begin{cases} BD^2 = BK \cdot BA \\ BO^2 = BD^2 + DO^2 \end{cases}$ — т.к. $BC$ — касательная

$\begin{cases} 9 = (2R-2r)\cdot 2R \\ (2R-r)^2 = 9 + r^2 \end{cases}$

$\begin{cases} 9 = 4R^2 - 4Rr \\ 4R^2 - 4rR - 9 = 0 \end{cases}$

$AD \cdot ED = BD \cdot DC = 3$

т.к. $\angle BDO = 90°$ и $\angle C = 90°$ (как опирающийся на диаметр), то $OD \parallel AC$, значит $\triangle BDO \sim \triangle BCA$

$\frac{BD}{BO} = \frac{BC}{BA} \Rightarrow \frac{3}{BO} = \frac{4}{BA}$

$4BO = 3BA \Rightarrow BO = \frac{3}{4}BA \Rightarrow 2R - r = \frac{3}{4}\cdot 2R \Rightarrow r = \frac{1}{2}R$

$4R^2 - 4Rr = 9$

$4R^2 - 4\cdot R\cdot\frac{1}{2}R = 9$

$2R^2 = 9$

$R = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow r = \frac{1}{2}R = \frac{3}{4}\sqrt{2}$

$S_{BECA} = \cancel{\frac{1}{2}} \cdot \cancel{AE} \cdot AE \cdot BC \cdot \frac{1}{2}\sin\alpha$

$AD^2 = CD^2 + CA^2 = 1 + \frac{16}{9}r^2 = 1 + \frac{16}{9}\cdot\frac{9}{16}\cdot 2 = 3$

$AD = \sqrt{3}$, значит $BE = 2\cdot AD = 2\sqrt{3}$

$\sin\alpha = \frac{BE'}{BD}$, $BE = 2DK = 2\sqrt{AK^2 - AD^2} = 2\cdot\sqrt{\phantom{x}}$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cancel{\sqrt{x}=y}$

$x=\sqrt{y}$

$y\geq 0$

$x^2-y=0$

$(x-\sqrt{y})(x+\sqrt{y})=0$

$x=\pm\sqrt{y}$

$0>-\sqrt{y}-y\neq 0$

$\underline{x>0}$

$a^2-5ab+4b^2=0$

$\underline{a=b}$

$a^2-5a^2+4a^2=0$

$(a-b)(a-4b)=0$

$\underline{a=b}$

$2a^2+a^2=0$

$\begin{cases} a=\pm 1 \\ b=\pm 1 \end{cases}$ $\begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$ $\begin{cases} a=-1 \\ b=-1 \end{cases}$

$\begin{cases} a-2b\geq 0 \\ a=-1 \quad b=-1 \end{cases}$

$a=4b$

$2a^2+16a^2=3$

$\cancel{a^2=t}$

$2\cdot 16b^2+b^2=3$

$33b^2=3 \Rightarrow b=\frac{\sqrt{11}}{11}$

$a=\frac{4}{11}\sqrt{11}$

$b=-\frac{\sqrt{11}}{11}$

$\begin{cases} a=\frac{4}{11}\sqrt{11} \\ b=\frac{1}{11}\sqrt{11} \end{cases}$ $\begin{cases} a=-\frac{4}{11}\sqrt{11} \\ b=-\frac{1}{11}\sqrt{11} \end{cases}$

$\cancel{\sqrt{\frac{3}{11}}}$ $\frac{2}{11}\sqrt{11}$

$\underline{a-2b}$

$\sqrt{ab}=\sqrt{\frac{4}{11}\sqrt{11}\cdot\frac{1}{11}\sqrt{11}}=\sqrt{\frac{4}{11}}=\underline{\frac{2}{11}\sqrt{11}}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)