МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45°$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

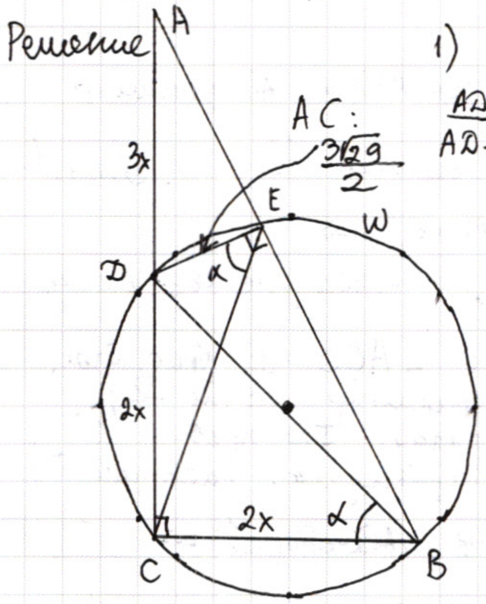
выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4 а) Дано: $\triangle ABC$ - прямоуг., AC - катет, AB - гипотенуза. Точки D, E, такие, что: $AD : AC = 3 : 5$; $DE \perp AB$. $D \in [AC]$; $E \in [AB]$ $\angle CED = 45°$. Найти: tgBAC?

Решение



1) $\frac{AD}{AC} = \frac{3}{5}$; Т.к. $D \in [AC]$, то $AD + DC = AC$. Подставим $\frac{AD}{AD+DC} = \frac{3}{5}$; обе ч. ур-ния получим.: $\frac{AD}{AD} + \frac{DC}{AD} = \frac{5}{3}$

$\frac{DC}{AD} = \frac{2}{3}$. Пусть $DC = 2x$ усл. единицу. Тогда $AD = 3x$. $AC = DC + AD = 2x + 3x = 5x$

2) Рассм. выпуклый $\square CDEB$. Он выпуклый потому что его диагонали [DB] и [CE] пересекаются.

$\angle DCB = 90°$ (т.к. $\triangle ABC$ - прямоуг. по усл.: $\angle C = 90°$)
$\angle DEB = 90°$ (т.к. $DE \perp AB$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle DCB + \angle DEB = 180° \Rightarrow$ около четырех-ка можно описать окр. ω (сумма противоположных углов вып. 4^х-ка равна 180°, это эквивал. тому, что 4^х-к вписанный.) Построим эту окр.

3) Пусть $\angle DEC = \alpha$. По усл. $\alpha = 45°$.

$\angle DBC = \angle DEC = \alpha$ (как впис. в окр. ω, опир. на одну дугу)

$\triangle DCB$ - прямоуг. ($\angle C = 90°$) $\Rightarrow tgDBC = \frac{DC}{BC}$; $tg45° = 1 \Rightarrow DC = BC$; $BC = 2x$

4) $\triangle ABC$ - прямоуг. $tgBAC = \frac{BC}{AC} = \frac{2x}{2x+3x} = \frac{2}{5} = 0{,}4$. $\boxed{\text{Ответ. } 0{,}4.}$

б) Пусть $AC = \sqrt{29}$. Получается, что $2x + 3x = \sqrt{29}$; $x = \frac{\sqrt{29}}{5}$

5) Рассмотрим $\triangle AED$ и $\triangle ACB$. В них: $\angle AED = 90°$ ($DE \perp AB$), $\angle ACB = 90°$ ($\triangle ABC$ - прямоуг. : AB - гипот.) $\Rightarrow \angle AED = \angle ACB$.
$\angle DAE$ - общий $\Big\} \Rightarrow \triangle AED \sim \triangle ACB$ (по 2 равным углам) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AD}{DE} = \frac{AB}{BC}$

$\triangle ABC$ - прямоуг. Теор. Пифагора ($\angle C = 90°$): $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{(5x)^2 + (2x)^2} = x\sqrt{29}$

$\frac{3x}{DE} = \frac{x\sqrt{29}}{2x}$; $DE = \frac{3\sqrt{29}}{2}x$

6) В вписанном 4^х-ке сумма противоположных углов равна 180°:

$\square CDEB$: $\angle EDC = 180° - \angle EBC \Rightarrow \sin EDC = \sin(180° - EBC) = \sin EBC$

$\triangle ABC$-прямоуг. $\Rightarrow \sin EBC = \sin ABC = \frac{AC}{AB} = \frac{5x}{x\sqrt{29}} = \frac{5\sqrt{29}}{29}$

$\sin CDE = \frac{5}{\sqrt{29}}$.

6) $S_{CDE} = \frac{1}{2} CD \cdot DE \cdot \sin CDE = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot \frac{3\sqrt{29}}{2}x \cdot \frac{5}{\sqrt{29}} = \frac{15x^2}{2}$

Подставляем $S_{CDE} = \frac{15 \cdot \left(\frac{\sqrt{29}}{5}\right)^2}{2} = \frac{3 \cdot 29}{10} = 8,7$. б) Ответ: 8,7.

радиус R радиус r

№5 Дано: Ω и ω касаются в A внутр. образом. [AB]-диаметр Ω; BC-хорда Ω; BC касается ω в т. D. $AD \cap \Omega = A, E (E \neq A)$

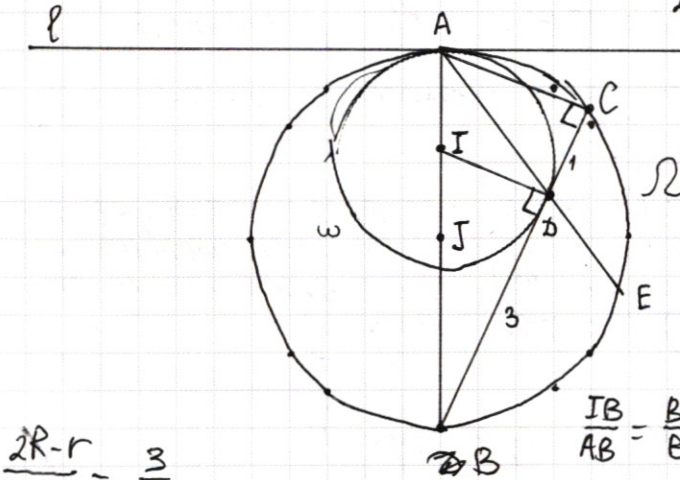
CD = 1, BD = 3. Найти: R-?; r-?; S_{BACE}

1) Пусть I-центр ω; J-центр Ω. При этом J-сер AB (т.к. AB-диаметр)

Докажем, что $I \in AJ$. Проведем общ. касательную окр-тей Ω и ω. Обозн. l

$AI \perp l$ (радиус, провед. в т. кас.) $AJ \perp l$ (аналогично) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~$AI \perp l$~~, $I \in AJ$, т.к. 2 прямые, $\perp$ третьей, и имеющие общ. точку, совпадают.



2) Проведем AC. $\angle ACB = 90°$ (впис. угол, опир. на диаметр окр-ти Ω).

$\angle IDB = 90°$ (радиус ID, провед. в т. касания, перпендик. касательной)

$\angle ACB = \angle IDB$; $\angle ABC$-общий $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle IDB \sim \triangle ACB$ (по 2 равн. углам) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{IB}{AB} = \frac{BC}{BD}$, ~~$BC = BD + BC = 4$~~; ~~$IB = 2R$ (диаметр Ω)~~

$AB = \cancel{2} IB - AI$

$\frac{IB}{AB} = \frac{BD}{BC}$

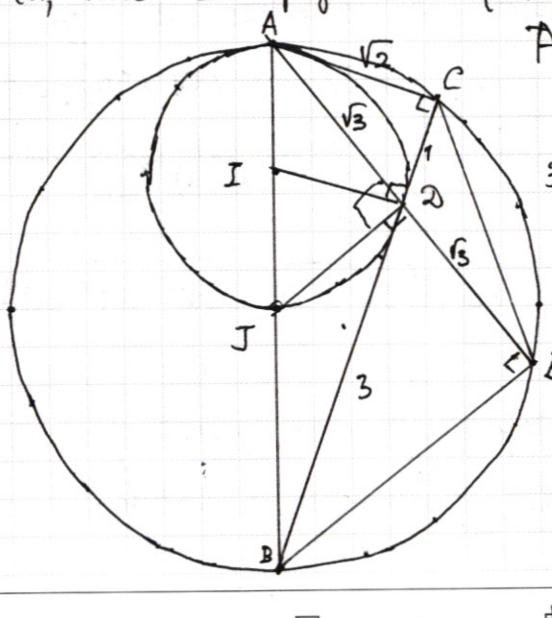
$\frac{2R-r}{2R} = \frac{3}{4}$

$IB = AB - AI$ ($I \in AB$); $IB = 2R - r$. $AB = 2R$; ($AB = 2R$ - диаметр Ω; AI - радиус ω)

$1 - \frac{r}{2R} = 1 - \frac{1}{4}$; $\frac{r}{R} = \frac{1}{2}$; $R = 2r$

BD = 3; BC = 4.

Получается, что I-середина AJ ($AI = \frac{AJ}{2}$). Перерисуем чертеж.



А значит AJ-диаметр ω

$\omega \cap AB = A, J$

3) $JD \perp AD$, т.к. $\angle JDA = 90°$ т.к. впис., опир. на диаметр ω.

$\angle BEA = 90°$, т.к. впис, опир. на диаметр $\Omega \Rightarrow AE \perp BE$.

$\left.\begin{array}{l} AE \perp BE \\ AD \perp JD \\ D \in AE \end{array}\right\}$ $JD \parallel BE$ (прямые различны, т.к. проходят через разные точки пр. AE)

☐ черновик ☑ чистовик Страница №2

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5 продолж.

$\Rightarrow JD \parallel BE$. (По теор Фалеса (прямой)) ; $BJ \cap AE = A$, $JD \parallel BE$, $AJ = JB$ $\Rightarrow AD = DE$. Пусть $DE = AD = x$

Теор о пересек. хорда~~х~~ в окр. Ω

$AD \cdot DE = BD \cdot DC$; $x^2 = 3$; $x = \sqrt{3}$

$\triangle ACD$ - прямоуг ($\angle ACD = 90^\circ$) верна теор. Пифагора: $AC = \sqrt{AD^2 - CD^2} = \sqrt{3-1} = \sqrt{2}$

$\triangle ACB$ - прямоуг. ($\angle ACB = 90^\circ$). Теор. Пифагора: $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} =$

$= \sqrt{2 + 16} = \sqrt{18} = \sqrt{2 \cdot 9} = 3\sqrt{2}$

$AB = 2R = 3\sqrt{2}$ (диаметр Ω) $\Rightarrow R = \frac{3\sqrt{2}}{2}$; $r = \frac{R}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$ $\sqrt{2}/\sqrt{3}$

Найдем ~~∠ cos ADB из △~~ $\sin ADC = \frac{AC}{AD} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \cancel{\frac{\sqrt{6}}{3}}$ (прямоуг. $\triangle ADC$ $\angle C = 90^\circ$)

$S_{BACE} = \frac{1}{2} BC \cdot AE \cdot \sin ADC = \frac{1}{2} 4 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{2}$.

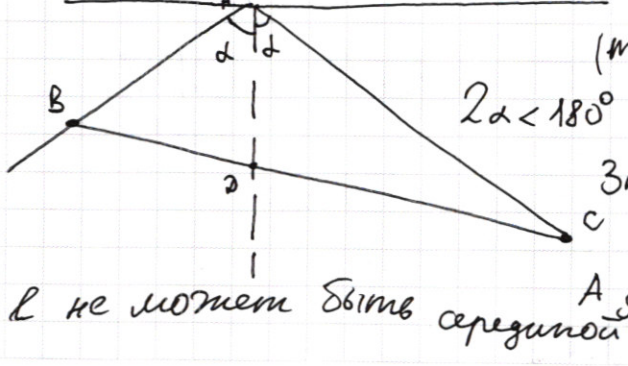
Ответ: Радиус Ω: $\frac{3\sqrt{2}}{2}$; радиус ω: $\frac{3\sqrt{2}}{4}$; ~~Радиус~~ $S_{BACE} = 4\sqrt{2}$.

~~№4~~ $\cancel{\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2} \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 \end{cases}}$

№2 Рассм. $\triangle ABC$.

а) и бис., и мед. проведены из 1 угла. AM - мед; AD - бис.; $AM \perp AD$. Док-м, что такое невозможно.

в $\triangle ABC$, проведем только бис. AD., а также прямую l, которая $\perp AD$ и проходит через т. A.



Пусть $\angle BAC = 2\alpha$, где $\angle BAD = \angle DAC = \alpha$ (такое возм., т.к. AD - бис.)

$2\alpha < 180^\circ \Rightarrow \alpha < 90^\circ$ (угол △-ка < 90°).

Значит D, B, C лежат в 1 полупл-ти отн. l.

А значит никакая точка прямой l не может быть серединой от BC ($l \not\cap$ отрезок BC)

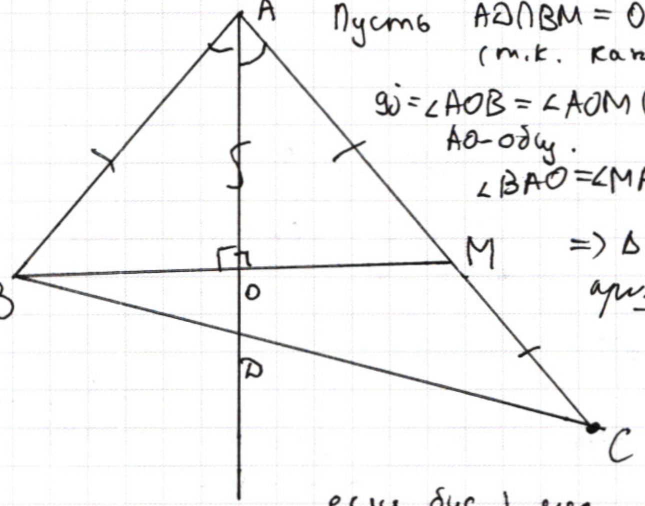
☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Значит не существует такой M, что $MA \perp DA$; M-сер. BC.

Значит бис. и медиана проведены из разных углов.

б) рассм. $\triangle ABC$; AD-бис. Δ-ка; BM-медиана Δ; $AD \perp BM$



Пусть $AD \cap BM = O$. O лежит внутри $\triangle ABC$ (т.к. каждый из отр. лежит внутри Δ)

$$\left.\begin{array}{l} 90° = \angle AOB = \angle AOM \text{ (т.к. } AO \perp BM) \\ AO\text{-общ.} \\ \angle BAO = \angle MAO \text{ (т.к. AD-бис. } \triangle ABC) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{равн.}$$

$\Rightarrow \triangle BAO = \triangle MAO \Rightarrow$ по 2 углам, прилеж. к равной стороне $\Rightarrow$

$\Rightarrow AB = AM = \frac{AC}{2}$

если бис. ⊥ мед., то одна сторона вдвое больше другой

Докажем обратное утв.

Пусть AD-бис-са; BM-мед., провед. к ст. AC, причем $AB = \frac{AC}{2}$ (~~нас не обязывал~~ мы можем выбрать произв. бис. и медиану по условию.)

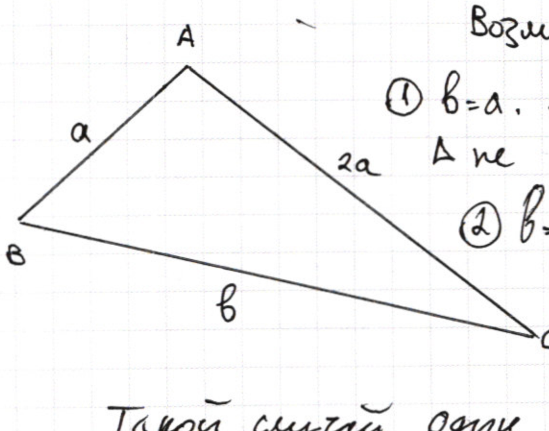
Тогда $\angle BAO = \angle MAO$ (бис. AD); $AB = \frac{AC}{2} = AM$ (мед. BM);

AO-общая $\Rightarrow \triangle BAO = \triangle MAO$ (по 2 ст. и углу между ними);

$\Rightarrow \angle AOB = \angle AOM \Rightarrow AO \perp BM$ ($\angle BOA + \angle AOM = 180°$ - смежные)

Значит Δ подходит усл. задачи, тогда и только тогда, когда его стороны целочисл; одна сторона вдвое больше другой и периметр равен 1200 (и он существует)

Рассм. такой $\triangle ABC$, что $AB = a$; $BC = b$; $AC = 2a$



Возможны случаи: (с учетом того, что $a \neq 2a$ при $a > 0$)

① $b = a$. Но тогда $AC = AB + BC$ ($2a = a + a$. Нер-во Δ не выполн.)

② $b = 2a$: $1200 = a + 2a + 2a$; $5a = 1200$, $a = 240 \in \mathbb{Z}$.

$$\left\{\begin{array}{l} a < 2a + 2a \\ 2a < a + 2a \\ 2a < a + 2a \end{array}\right. \text{ нер-во Δ выполн}$$

$$\left\{\begin{array}{l} AB < AC + BC \\ AC < AB + BC \\ BC < AB + AC \end{array}\right.$$

Такой случай один

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

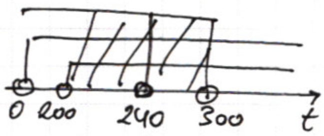
③ $2a \neq b$ и $b \neq a$. Тогда должно выполняться нер-во Δ-ка

$$\begin{cases} AB < AC + BC \\ AC < AB + BC \\ BC < AB + AC \end{cases} \quad \begin{cases} a < 2a + b \leftarrow \text{истинно всегда } (-b < a;\ -b < 0 < a) \\ 2a < a + b \\ b < a + 2a \end{cases} \iff \begin{cases} a < b \\ b < 3a \end{cases}$$

$0 < a < b < 3a$, $b \neq 2a$.

$a + 2a + b = 1200 \iff 3a + b = 1200;$ $\begin{cases} a = t \\ b = 1200 - 3t \end{cases}$ $t \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} t > 0 \\ 1200 - 3t > t \\ 3t > 1200 - 3t \\ 1200 - 3t \neq 2t \end{cases} \iff \begin{cases} t > 0 \\ 4t < 1200 \\ 6t > 1200 \\ 5t \neq 1200 \end{cases} \quad \begin{cases} t > 0 \\ t < 300 \\ t > 200 \\ t \neq 240 \end{cases}$$



$\iff t \in (200; 300)$

$t \in \mathbb{Z} \Rightarrow t \in \{\cancel{200}\ 201; 202; \ldots; 239\} \cup \{241; 242; \ldots; 299\}$

↑ имеет $239 - 201 + 1 = 39$ элем.

↑ имеет $299 - 241 + 1 = 99 - 40 = 59$ элем.

Все возм. зн. t отвечают за свой Δ-к, ~~...~~ а значит суммарное число способов в этом случае: $39 + 59 = 98$

Всего, с учетом ①, ②, ③: $98 + 1 = 99$.

Ответ: 99.

№3 $\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2} \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (y-2) - 2(x-1) = \sqrt{x(y-2) - (y-2)} \\ (2x^2 - 4x + 2) + (y^2 - 4y + 4) = 3 \end{cases} \iff$

$\iff \begin{cases} (y-2) - 2(x-1) = \sqrt{(x-1)(y-2)} \\ 2(x-1)^2 + (y-2)^2 = 3 \end{cases}$

Замена: $\begin{cases} a = (y-2) \\ b = (x-1) \end{cases}$ $\begin{cases} a - 2b = \sqrt{ab} \\ 2b^2 + a^2 = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} a - 2b \geq 0 \\ (a-2b)^2 = ab \\ 2b^2 + a^2 = 3 \end{cases} \iff$

$\iff \begin{cases} a - 2b \geq 0 \\ a^2 - 4ab + 4b^2 = ab \\ 2b^2 + a^2 = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} a - 2b \geq 0 \\ a^2 - 5ab + 4b^2 = 0 \\ 2b^2 + a^2 = 3 \end{cases} \iff$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 2b \\ a^2-4ab-ab+4b^2=0 \\ a^2+2b^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\geq 2b \\ a(a-4b)-b(a-4b)=0 \\ a^2+2b^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a\geq 2b \\ (a-b)(a-4b)=0 \\ a^2+2b^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a\geq 2b \\ a-b=0 \\ a^2+2b^2=3 \end{cases} \\ \begin{cases} a\geq 2b \\ a-4b=0 \\ a^2+2b^2=3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a\geq 2b \\ a=b \\ 3a^2=3 \end{cases} \\ \begin{cases} a\geq 2b \\ a=4b \\ 16b^2+2b^2=3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a\geq 2b \\ a=b \\ a^2=1 \end{cases} \\ \begin{cases} a\geq 2b \\ a=4b \\ \cancel{18a^2}\ 18b^2=3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a\geq 2b \\ a=b=1 \end{cases} \\ \begin{cases} a\geq 2b \\ a=b=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} a\geq 2b \\ a=4\cdot\frac{1}{\sqrt6} \\ b=\frac{1}{\sqrt6} \end{cases} \\ \begin{cases} a=-\frac{4}{\sqrt6} \\ b=\frac{1}{\sqrt6} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} a\geq 2b \\ \left[\begin{array}{l} a=b=1 \\ a=b=-1 \\ \begin{cases} a=\cancel{4}\frac{2\sqrt6}{3} \\ b=\frac{\sqrt6}{6} \end{cases} \\ \begin{cases} a=-\frac{2\sqrt6}{3} \\ b=\cancel{=}=\cancel{\frac{2\sqrt6}{3}}-\frac{\sqrt6}{6} \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b=1 \\ \begin{cases} a=\frac{2\sqrt6}{3} \\ b=\frac{\sqrt6}{6} \end{cases} \end{array}\right.$$

$b^2=1/6$

Проверим усл. $a\geq 2b$:

$a=b=1$ $\quad 1\geq 2$. ложь. ~~не подх.~~ $\Rightarrow$ постор. к.

~~$a=b=-1$~~ ; $-1\geq -2$ истинно. Ok

$a=\frac{2\sqrt6}{3}$, $b=\frac{\sqrt6}{6}$: $\frac{2\sqrt6}{3} \vee 2\cdot\frac{\sqrt6}{6}$, $\frac{2}{3}\vee\frac{2}{6}$; $\frac{2}{3}>\frac{1}{3} \Rightarrow$ ~~Ge~~ $\frac{2\sqrt6}{3}>2\cdot\frac{\sqrt6}{6} \Rightarrow$

$\frac{2\sqrt6}{3}\geq\frac{\sqrt6}{6}$ – истинно Ok $\Rightarrow$ ~~$-\frac{2\sqrt6}{3}$~~

$a=-\frac{2\sqrt6}{3}$; $b=-\frac{\sqrt6}{6}$: $-\frac{2\sqrt6}{3}\geq -2\frac{\sqrt6}{6}$ – ложь $\Rightarrow$ $-\frac{2\sqrt6}{3}<-2\frac{\sqrt6}{6}$

$\Rightarrow$ постор. к.

Обр. замена. Исх. ~~до~~ система равносильна следующей:

$$\cancel{x=1}\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y-2=1 \\ x-1=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} y-2=\frac{2\sqrt6}{3} \\ x-1=\cancel{2}\frac{\sqrt6}{6} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=\cancel{3}\ 1 \\ x=\cancel{2}\ 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y=\frac{6+2\sqrt6}{3} \\ x=\frac{1+\sqrt6}{6} \end{cases} \end{array}\right.$$

~~Ответ: $\{2;3\}$; $\left(\frac{1+\sqrt6}{6};\frac{6+2\sqrt6}{3}\right)$.~~

Ответ: $(0;1)$; $\left(\frac{\sqrt6+1}{6};\frac{6+2\sqrt6}{3}\right)$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 a, b, c - последовательные члены геометрич прогр. (1-ый, 2-ой, 3-ий соответств.)

4-ый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2+2bx+c=0$.

Найти 3-ий член прогр. (т.е. c)

$a; b; c; x_0$ – посл. члены геом. пр. Значит каждое из этих чисел ~~является~~ не равно 0, причем x_0 – корень ур-ния $ax^2+2bx+c=0$

~~По опр. Геом. прогр: $\frac{b}{a} = \frac{x}{c} \Rightarrow x = \frac{cb}{a}$~~

~~Т.к. $x = \frac{bc}{a}$ – корень уравнения, то $ax^2+2bx+c=0$~~

~~$a\left(\frac{bc}{a}\right)^2 + 2b\cdot\frac{bc}{a} + c = 0 \Rightarrow; \quad \frac{b^2c^2}{a} + \frac{2b^2c}{a} + c = 0 \Big| : \frac{c}{a} \neq 0.$~~

~~$b^2c + 2b^2 + a = 0$~~

По определению геометрической прогрессии имеем:

$\frac{b}{a} = \frac{c}{b} \Rightarrow c = \frac{b^2}{a} \Rightarrow \frac{1}{c} = \frac{a}{b^2}$ (все числа $a, b, c, x_0 \neq 0$)

$\frac{x_0}{c} = \frac{c}{b} \Rightarrow x_0 = \frac{c^2}{b}$.

При $x = x_0$ $ax_0^2+2bx+c=0$ – равенство. Подставляем:

$a\cdot\frac{c^4}{b^2} + 2b\cdot\frac{c^2}{b} + c = 0; \quad \overbrace{\frac{a}{b^2}}^{1/c}\cdot c^4 + 2c^2 + c = 0 \Rightarrow;$

$c^3 + 2c^2 + c = 0 \quad \Big| : c \neq 0;$

$c^2 + 2c + 1 = 0;$

$D = 4 - 1 = 3; \quad c = \frac{-2 \pm \sqrt{3}}{2}$

$c = \frac{-2-\sqrt{3}}{2}$ или $\frac{-2+\sqrt{3}}{2}$. Каждое из этих чисел, очевидно, не равно 0:

$\frac{-2-\sqrt{3}}{2} < 0; \quad \frac{-2+\sqrt{3}}{2}$ т.к. $\sqrt{4} \neq \sqrt{3}$.

Ответ: $\left\{\frac{-2-\sqrt{3}}{2}; \frac{-2+\sqrt{3}}{2}\right\}$.

№6 Найти все пары $(a; b)$, такие, что $\forall x \in \left[\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$ выполнено:

$2x^2 - x - 1 \leq ax + b \leq x + |2x-1|$

Рассмотрим 3 ф-ции: $y_1 = 2x^2 - x - 1$; $y_2 = ax + b$; $y_3 = x + |2x-1|$

Построим гр-ки первых 2-х ф-ций. на множестве $\mathbb{R}$.

$D_1(y_1) = \mathbb{R}$.

① $y_1 = 2x^2 - x - 1$ — парабола, ветви которой напр. вверх.

~~верш.~~ $x_в = -\frac{-1}{4} = 0{,}25$; $y_в = \frac{2}{16} - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{1}{8} - 1 = -\frac{9}{8}$

$x = x_в$ — ось симметрии параболы.

Дополн. т.

x	0,5	1	3/2	$-1/4$
y	-1	0	2	$-5/8$

$\frac{9}{8} - \frac{3}{4} - 1 = \frac{9}{8} - \frac{6}{8} - \frac{8}{8} = -\frac{5}{8}$

$\frac{2}{16} + \frac{1}{4} - 1 = \frac{3}{8} - 1 = -\frac{5}{8}$

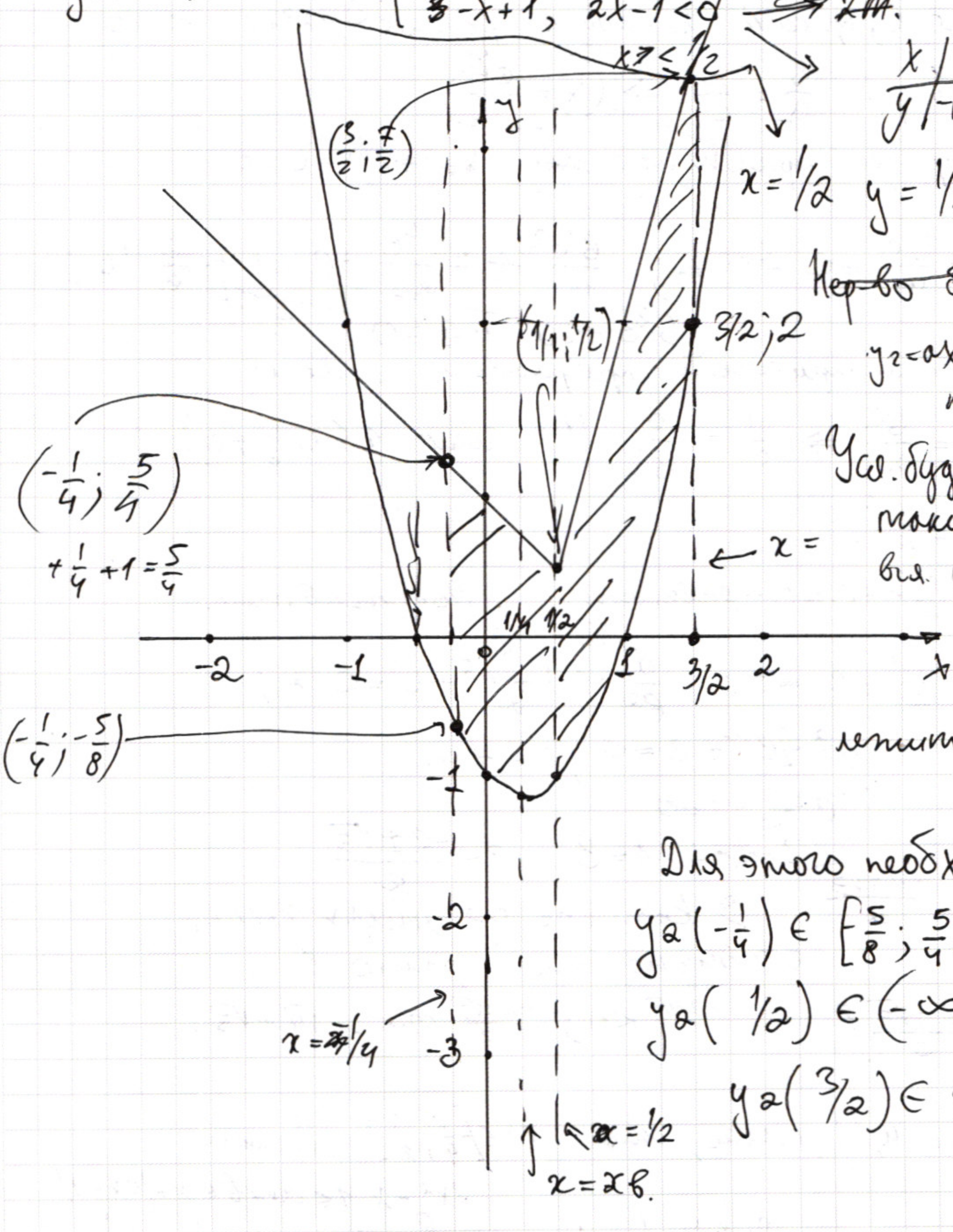
части ~~оси~~

② $y_3 = x + |2x-1| = \begin{cases} 3x-1, & 2x-1 \geq 0 \quad x \geq 1/2 \\ -x+1, & 2x-1 < 0 \quad x < 1/2 \end{cases}$ → ~~2т.~~

Прямые, постр по 2т.

x	1	2	1/2	3/2
y	2	5	1/2	7/2

x	0	-1
y	-1	-3



$x = 1/2 \quad y = 1/2$

~~Нер-во бу~~

$y_2 = ax + b$ — прямая в коорд. пл-ти.

$x =$

Усл. будет выполн при таких a, что вся ~~прямая~~ часть прямой $\left[-1/4; 3/2\right]$ лежит в заштрих. обл-ти

Для этого необходимо, чтобы

$y_2\left(-\frac{1}{4}\right) \in \left[\frac{5}{8}; \frac{5}{4}\right]$

$y_2\left(1/2\right) \in \left(-\infty; 1/2\right]$

$y_2\left(3/2\right) \in \left[2; \frac{7}{2}\right]$

☐ черновик ☑ чистовик Страница №8

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} -\frac{5}{8} \le -\frac{a}{4} + b \le \frac{5}{4} \\ \frac{a}{2} + b \le \frac{1}{2} \\ 2 \le \frac{3a}{2} + b \le \frac{7}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2{,}5 \le -a + 4b \le 5 \; / \cdot 1 \\ a + 2b \le 1 \\ 4 \le 3a + 2b \le 7 \end{cases} \Rightarrow 8b \le 8;\ b \le 1 \Rightarrow 2b \le 2$$

$$2b \le 2 \Rightarrow 3a + 2b \le 3a + 2$$

$$4 \le 3a + 2 \Rightarrow a \geq \frac{2}{3}$$

$$\begin{cases} -2{,}5 \le -a + 4b \le 5 \\ a + 2b \le 1 \\ 4 \le 3a + 2b \le 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2{,}5 \le -a + 4b \le 5 \\ 1 \geq a + 2b \\ -4 \geq -3a - 2b \geq -7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -2a \le -3;\ a \geq \frac{3}{2}$$

$$\begin{cases} -5 \le -2a + 8b \le 10 \\ a + 2b \le 2 \,|\cdot 2 \\ 4 \le 3a + 2b \le 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} -2a + 8b \le 10 \\ 2a + 4b \le 4 \end{matrix} \Rightarrow 12b \le 14;\ b \le \frac{7}{6}$$

$$\begin{matrix} -6 \le -3a + 6b \\ 4 \le 3a + 2b \end{matrix} \Rightarrow -2 \le 8b\ ;\ b \geq -\frac{1}{4}$$

Найти.

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$300-200+1 = 101$

4 ~~$x; 3x; z$~~ $x; 2x; z$.

$x < z < 3x$

$0 < x < z < 3x$

$z + 3x = 1200$

$1200 / 4$

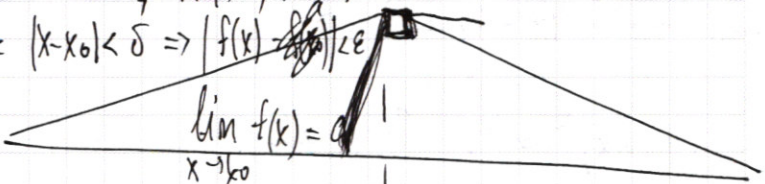
$3t + 1 > 0$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0,\ \forall x \neq x_0,\ x \in D(f):$ 700

$z_0 = 1197$ $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$

$x_0 = 1$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$



$x = 3t + 1$

$z = 1197 - t$ $t \in \mathbb{Z}$ 10 ок

$1; 2; 3; \ldots 29$

$41; 42; \ldots; 99$

1 2 3

$2+4+4+5+5$

$299 - 201 + 1 =$

$= 99 - 1 = 98$

$39 + 59 =$

$= 80 + 18 = 98$

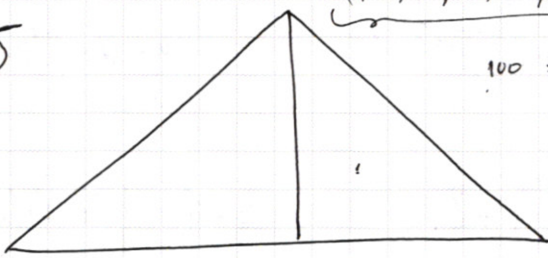
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

$5 - 3 + 1$

$3; 4; 5$

~~200~~; 1; 2; 3; 4; 5; 9; ...; 100

100 эл



$1; 2; 3$

$(3-1)+1$

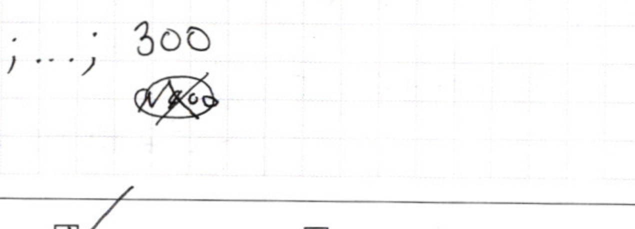
$a\,b\,c\,x$

$x \cdot b = c^2$

$x = \frac{c^2}{b}$ $(b \neq 0)$

$ax^2 + 2bx + c = 0$

$\frac{ac^4}{b^2} + 2c^2 + c = \frac{ac^4 + 2c^2b^2 + cb^2}{2}$



$201; 202; 203; \ldots; 300$

1 2 3 ~~200~~

$a; b; c$

$b^2 = ac$

$D = b^2 - 4ac = -3ac$ $D \geq 0 \Rightarrow ac$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$2x^2-x-1 \le ax+b \le x+|2x-1|$ $\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$ Тонр-тм. $\frac{3}{2}$

$\frac{9}{4}\cdot 2-\frac{3}{2}-1=$

$=\frac{9}{2}-\frac{3}{2}-1=$

$=\frac{6}{2}-1=2$

§ $D(f)=Q_+$; $f(ab)=f(a)+f(b)$; $f(p)=[p/2]$

$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$ $1=\sqrt{0-0-1+2}$ ~~2x+y=a~~ OK $\begin{cases} y-2x=a \\ xy=b \end{cases}$

$\cancel{2x(}\ x(2x+a)=b$

$2x^2+ax-b=0$

$(y-2x)^2=xy-2x-y+2$

$D=a^2-4$

$-2x-y=(y-2x)^2-xy-2$

$2x^2=-ax+b$

$-4x-2y=-(y-2x)^2-2xy-\cancel{2}4$

~~$a-b$~~ $=\sqrt{ab}$

$2x^2+y^2-(y-2x)^2-2xy-4-2y+3=0$ $\begin{cases} a-b=\sqrt{ab} \\ 2a^2+b^2=3 \end{cases}$ $\uparrow^2 \Leftrightarrow$

$2x^2 \cancel{+y^2-y^2}+4xy-4x^2-2xy-4-2y+3=0$

$\Leftrightarrow$ $a^2-2ab+b^2=ab$

$2a^2+b^2=3$

$\cancel{2x^2}$ $-2x^2+2xy-2y-1=0$

$\cancel{2x(y-x)-2}$ $y-2-2(x-1)=$

$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$ $y-2x=\sqrt{(x-1)(y-2)}$

$y-2-2(x-1)=\sqrt{(x-1)(y+2)}$

$(2x^2 \cancel{+} -4x+2)+(y^2-4x+4)-3=0$

~~$2(x-2$~~ $2(x-1)^2+(y-2)^2=3$

0 1 $2\cdot 1+1=3$. OK

$b^2x^2+bcx+c^2=0$

x

$abcx$ $c^2=xb$; $xb-?$ $b=\sqrt{-ac}$

$\cancel{ab}$ $\cancel{a^2}$ $a=\frac{b^2}{c}$

$\cancel{axb}$ $ax^2+bx+c=0$

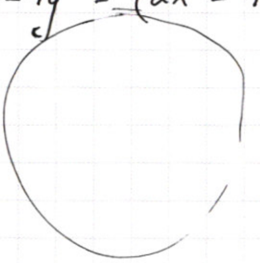
$\frac{b^2}{c}x^2+bx+c=0$ $|\cdot c\neq 0$

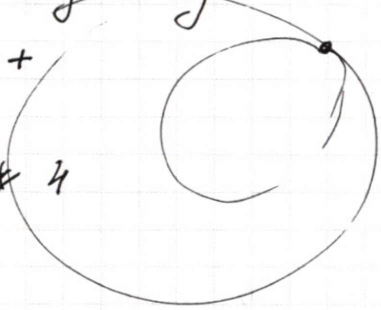
☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$2x^2+y^2-4x-4y = (2x^2-4xy+y^2)+4xy-4x-4y$

$(2x-y)^2+$

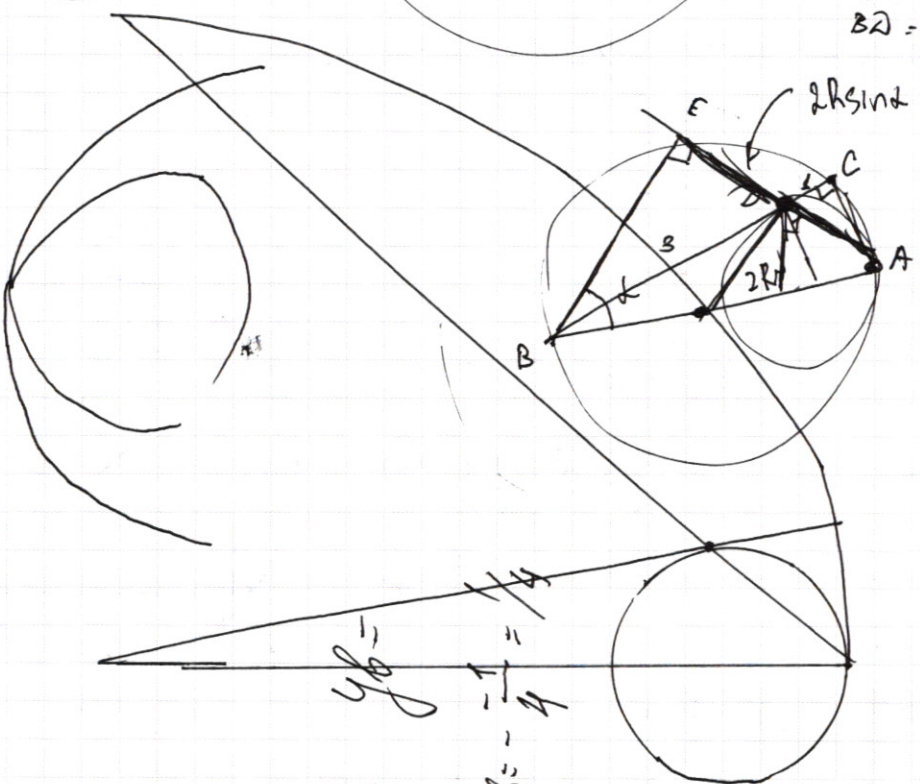




4

$CD=1$

$BD=3$



$3{,}5/2$

$-\frac{35}{2}$ | $\frac{2}{17{,}5}$

$\frac{15}{14}$

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\geq 2x \\ y^2-4xy+4x^2=xy-2x-y+2 \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3 \end{cases}$$

$3x+z=1200$

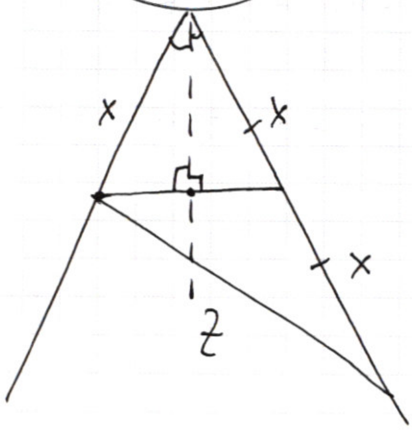
$x<2x+z$ верн

$2x<x+z$

$x<z$

$z<3x$

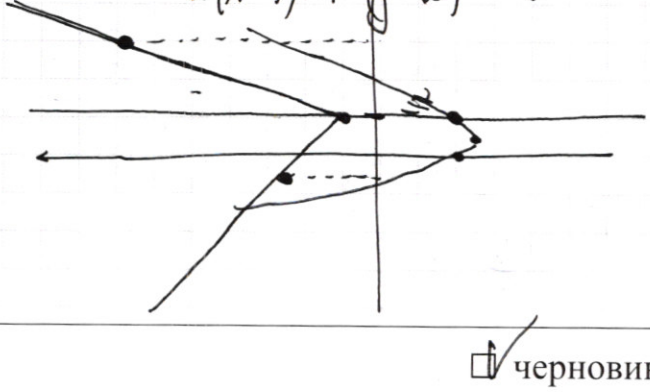
$x<z<3x$



$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+\cancel{2}y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

$2x^2-4x+2+y^2-4y+4-3=0$

$2(x-1)^2+(y-2)^2=3$



$4x^2-5xy+y^2+2x+y-2=0$

$2x^2+y^2-4x-4y+3=0$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

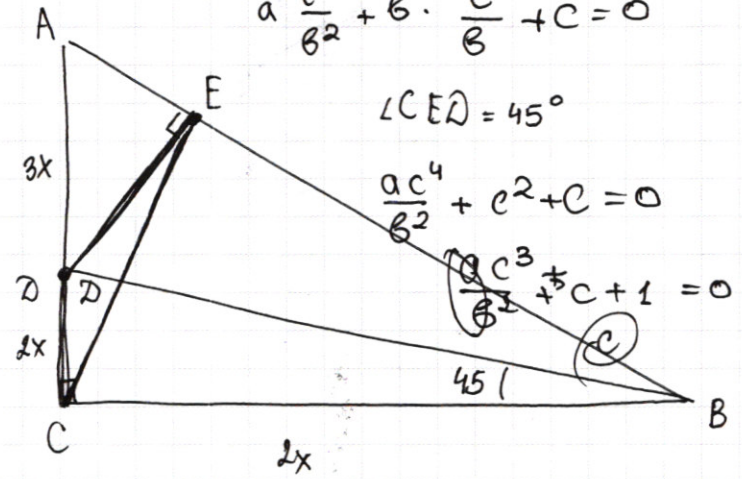
~~2+4+4+5+5+6~~ $2+4+4+5+5+5+5=30$

$29 \cdot 3 = 87$

a b c x

$x=\frac{c^2}{b}$

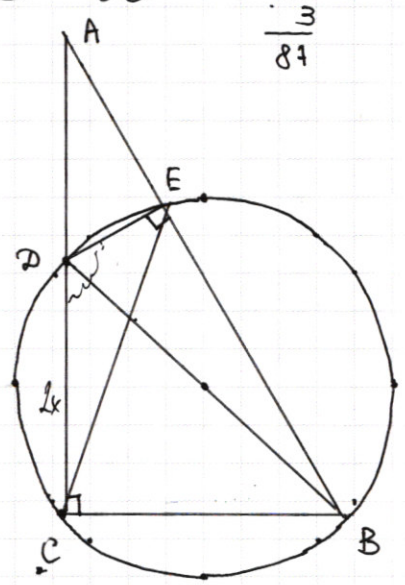
$a\frac{c^4}{b^2}+b\cdot\frac{c^2}{b}+c=0$



$\angle CED = 45°$

$\frac{ac^4}{b^2}+c^2+c=0$

$\frac{ac^3}{b^2}+c+1=0$



Числа a, b, c явл. 1-ыми

$a; b; c; x.$

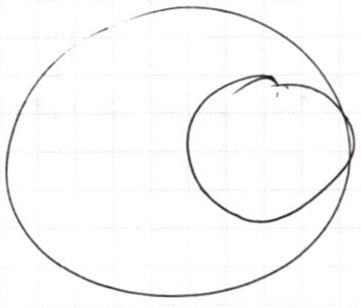
Т.к. Геом. пр. $\Rightarrow$ $a=0 \Rightarrow b, c=0$ невозм.

$y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2}$

$\frac{b}{a}=\frac{x}{c}$

$2x^2+y^2-4x-4y+3=0$

$x=\frac{cb}{a}$



$y \geq 2x$

$y^2-4xy+4x^2=xy-2x-y+2$

$b^2=ac$

~~y^2-4xy~~ $y^2-3xy+4x^2+2x+y-2=0$

$a\left(\frac{cb}{a}\right)^2+b\frac{cb}{a}+c=0$

$\frac{cb^2}{a}+\frac{cb^2}{a}+c=0 \mid \cdot a$

$2cb^2+ac=0$

$2b^2+a=0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)