МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~1. Пусть $b = aq$; $c = aq^2$

$ax^2 - 2bx + c = ax^2 - 2aqx + aq^2 = 0$

$x^2 - 2qx + q^2 = (x-q)^2 = 0$

$x = q = aq^3$

$q(aq^2 - 1) = 0 \quad q \neq 0$

$a = \frac{1}{q^2} \Rightarrow b = \frac{1}{q} \Rightarrow c = 1$

Ответ: 1

~3. $\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \end{cases}$ $\quad a = \sqrt{x-6}$, $b = \sqrt{y-1}$

$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{(y-1)(x-6)} \\ (x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18 \end{cases}$

$\begin{cases} a^2 - 6b^2 = ab \\ a^4 + 2b^4 = 18 \end{cases}$ из 1 $\Rightarrow$ $a^2 - ab - 6b^2 = 0$

$D = b^2 + 24b^2 = (5b)^2$

$a = \frac{b \pm 5b}{2}$

$a = 3b \qquad a = -2b$

$a = 3b$

$81b^4 + 2b^4 = 18$

$b^2 = \pm\sqrt{\frac{18}{83}} = y - 1 \Rightarrow$ $\quad a^2 = 9b^2 = \pm 9\sqrt{\frac{18}{83}} = x - 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow y_1 = 1 \pm \sqrt{\frac{18}{83}}$ $\quad \Rightarrow x_1 = 6 \pm 9\sqrt{\frac{18}{83}}$

~~$x_1 \geq 6$; $y_1 \geq 1 \Rightarrow \sqrt{(x-6)(y-1)}$ существует:~~ $\quad$ $x - 6 = 4$; $x - 6 = -4$

$x = 2$

Теперь $a = -2b$ $\quad$ $a = 4$

$16b^4 + 2b^4 = 18$ $\quad$ $y - 1 = 1$ $\quad$ $y - 1 = -1$ $\quad$ $x - 6 = 4$; ~~$x - 6 = -4$~~

$b^4 = 1 \Rightarrow b^2 = \pm 1$ $\quad$ $y = 2$ $\quad$ $y = 0$ $\quad$ $x = 10$ $\quad$ ~~$x = 2$~~

• У нас получились пары $(x;y)$:

1. $\left(6+9\sqrt{\frac{18}{83}};\ 1+8\sqrt{\frac{18}{83}}\right)$

2. $\left(6-9\sqrt{\frac{18}{83}};\ 1-\sqrt{\frac{18}{83}}\right)$

3. $(10;\ 2)$

4. $(8^{-2};\ 0)$

$\Rightarrow$ 1. подкоренное выражение >0 ; $x>6y$

2. $\sqrt{xy-6y-x+6} \geq 0$; $x<6y$

3. $x-6y=-2<0$

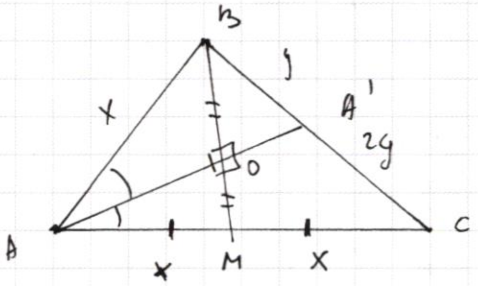
4. $\cancel{\sqrt{xy-6y-x+6}<0}$

$x-6y<0$

Проверим получившиеся значения $\Rightarrow$ подходит только 1 корень

Ответ: $x=6+9\sqrt{\frac{18}{83}}$; $y=1+\sqrt{\frac{18}{83}}$

№2



$\triangle ABO=\triangle AMO$ - равн.

$AM=AB=x$

$\frac{BA'}{A'C}=\frac{AB}{AC}=\frac{1}{2}=\frac{y}{2y}$

$3x+3y=900 \Rightarrow x+y=300$

$3y+x>2x \Rightarrow 3y>x$

$3y<3x \Rightarrow x>y$

$3y+y=300 \Rightarrow y\geq 75$

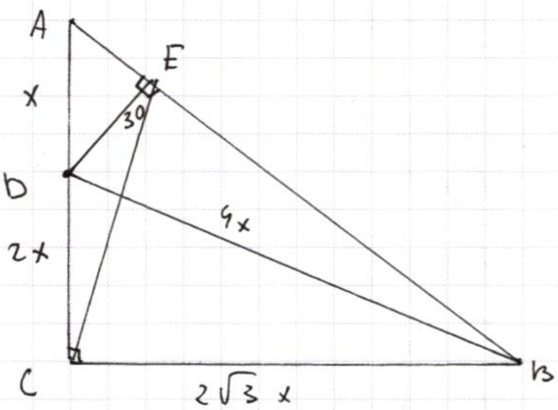
$2x=300 \quad x\geq 150$

$2y=300 \quad y\leq 150$

Для любого y есть единственный x $\Rightarrow$ если y принимает 76 значений, то и x принимает 76 значений, значит всего существует 76 таких $\triangle$

Ответ: 76.

№4.



$AD = x;\ DC = 2x;\ AC = 3x$

Заметим, что $CDEB$ вписанный, т.к. $\angle DCB + \angle DEB = 180^\circ \Rightarrow \angle DEC = \angle DBC = 30^\circ \Rightarrow DB = 2DC = 4x \Rightarrow$

$BC = \sqrt{16x^2 - 4x^2} = 2\sqrt{3}\,x \Rightarrow$

$tg\angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{2\sqrt{3}\,x}{3x} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$AC = \sqrt{7} = 3x;\ x = \frac{\sqrt{7}}{3}$

$S_{CDE} = \frac{2}{3} S_{AEC} = \frac{2}{3}(S_{ABC} - S_{BEC});\ BC = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{7}}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{21}$

$S_{ABC} = \frac{2\sqrt{3}\,x \cdot 3x}{2} = 3\sqrt{3}\,x^2 = \cancel{21}\ 3\sqrt{3} \cdot \frac{7}{9} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$

$\sin\angle CBA = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{7}}{AB} = \frac{\sqrt{7}}{\frac{7\sqrt{3}}{3}} = \cancel{\frac{7\cdot 3}{7\sqrt{7}}}\ \frac{\sqrt{7}\cdot 3}{7\sqrt{3}} = \frac{3\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}}{7\cdot 3} = \frac{\sqrt{21}}{7}$

$AB = \sqrt{(2\sqrt{3}\,x)^2 + 9x^2} = x\sqrt{21} = \frac{\sqrt{7}}{3} \cdot \sqrt{7}\cdot\sqrt{3} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$

$S_{BEC} = \frac{BE \cdot BC \cdot \sin\angle EBC}{2}$. $AE \cdot AB = AD \cdot AC = 3x^2$.

$BE = AB - EA = AB - \frac{AD \cdot AC}{AB} = \frac{7\sqrt{3}}{3} - \frac{3\cdot\frac{7}{9}}{\frac{7\sqrt{3}}{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} =$

$= \frac{7\sqrt{3} - \sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$

$S_{BEC} = \frac{2\sqrt{3} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{21} \cdot \frac{\sqrt{21}}{7}}{2} = 2\sqrt{3}$

$S_{CED} = \frac{2}{3}\left(\frac{7\sqrt{3}}{3} - \frac{6\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$

Ответ: $S_{CED} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$

№7. $f(1) = f(1) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$

$f(2) = f[2/2] = 1$

$f(3) = 1 = [3/2]$

$f(4) = f(2) + f(2) = 2$

$f(5) = 2$

$f(6) = 2$

$f(7) = 3$

$f(8) = 3$

$f(9) = 2$

$f(10) = 3$

$f(11) = 5$

$f(12) = 3$

$f(13) = 6$

$f(14) = 4$

$f(15) = 3$

$f(16) = 4$

$f(17) = 8$

$f(18) = 3$

$f(19) = 9$

$f(20) = 4$

$f(21) = 4$

$f(22) = 6$

$f(\frac{1}{2}) = f(2) + f(\frac{1}{4}) = 1 + f(\frac{1}{4})$

$f(\frac{1}{4}) = f(\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2})$

$f(\frac{1}{2}) = -1$; $f(\frac{1}{4}) = -2$; $f(\frac{1}{8}) = f(\frac{1}{4}) + f(\frac{1}{2}) = -3$

$f(m^k) = k \qquad f(m^0) = 0$

Пусть $f(m^k) = k \quad k \le n$

$f(m^{k+1}) = f(m^k) + f(m) = k+1 \Rightarrow f(m^{k+1}) = (k+1)$

$f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) = f(x) - f(y)$: Нужно найти

кол-во пар $(x;y)$ $f(x) < f(y)$ $x; y \in [2;22]$

для $x = 2;3$ y принимает все значения ~~кроме~~ кроме 2, 3

т.е. $S = \underset{f(x)=1}{2 \cdot 19} + \underset{f(x)=2}{4 \cdot 15} + \underset{f(x)=3}{6 \cdot 9} + \underset{f(x)=4}{4 \cdot 5} + \underset{f(x)=5}{1 \cdot 4} + \underset{f(x)=6}{2 \cdot 2} + \underset{f(x)=8}{1 \cdot 1} + \underset{f(x)=9}{0 \cdot 0} =$

кол-во решений для

$S = 38 + 60 + 54 + 20 + 4 + 4 + 1 =$ ~~98 + 84 =~~ 183

$= 99 + 74 + 8 = 99 + 82 = 181$

Ответ: 181

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6. $8x - 6|2x-1| = y$

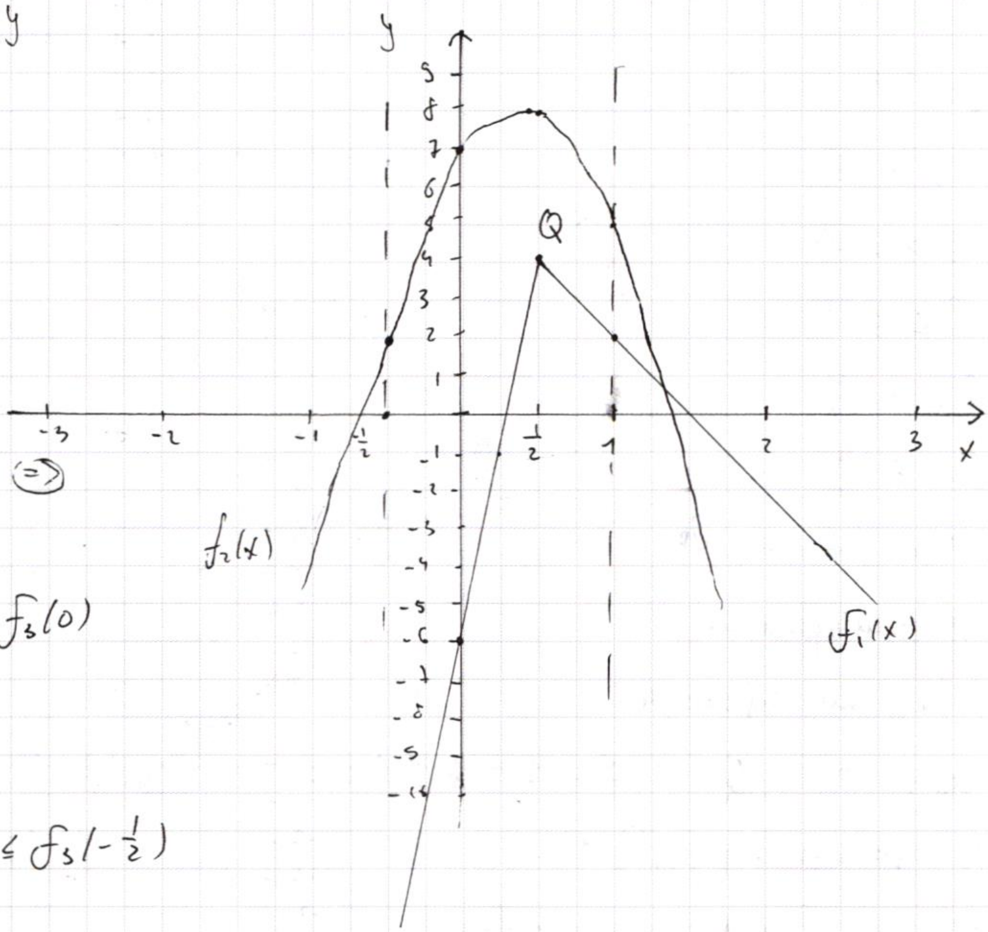
$2x - 1 \ge 0 \quad x \ge \frac{1}{2} \Rightarrow 8x - 12x + 6 = 6 - 4x$

$2x - 1 \le 0 \quad x \le \frac{1}{2} \Rightarrow 20x - 6$

$-8x^2 + 6x + 7 = y$

$x_0 = \frac{3}{8}$

$\cancel{y_0 = }$



$f_1(x) = 8x - 6|2x-1|$

$f_2(x) = -8x^2 + 6x + 7$

$f_3(x) = ax + b$

$f_1(x) \le f_3(x) \le f_2(x) \Leftrightarrow$

$x \in [-\frac{1}{2}; 1]$

$\Rightarrow f_1(0) \le f_2(0) \le f_3(0)$

$-6 \le b \le 7$

1. $b \in [-6; 7]$

$f_1(-\frac{1}{2}) \le f_2(-\frac{1}{2}) \le f_3(-\frac{1}{2})$

2. $-16 \le b - \frac{a}{2} \le 2$

$f_1(1) \le f_2(1) \le f_3(1)$

3. $2 \le a + b \le 5$

$f_1(\frac{1}{2}) \le f_2(\frac{1}{2}) \le f_3(\frac{1}{2})$

4. $4 \le \frac{a}{2} + b \le 8$

искомая прямая $ax + b = f_3(x)$

$f_3(x) \ge f_1$

$f_3(-\frac{1}{2}) \le f_2(-\frac{1}{2})$

$f_3(\frac{1}{2}) \ge f_1(\frac{1}{2})$

$f_3(\frac{1}{2} 1) < f_2(1)$

условия 1-4 необходимо и достаточно для за выполнения неравенства

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

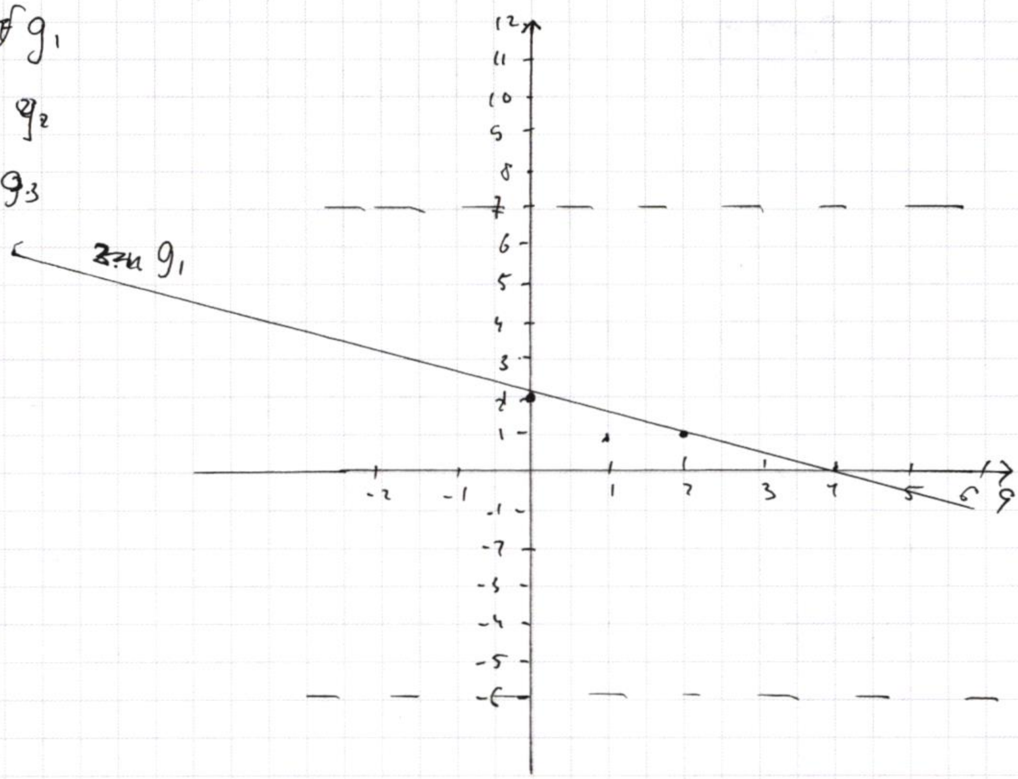
(Нумеровать только чистовики)

1. $b \in [-6;7]$ g_1

2. $-16 \le b - \frac{a}{2} \le 2$ g_2

3. $2 \le a+b \le 5$ g_3

g_4 $4 \le \frac{a}{2} + b \le 8$



$b - \frac{a}{2} \le 2$

$b \le 2 - \frac{a}{2}$

$b - \frac{a}{2} \ge 16$

$b \ge 16 - \frac{a}{2}$

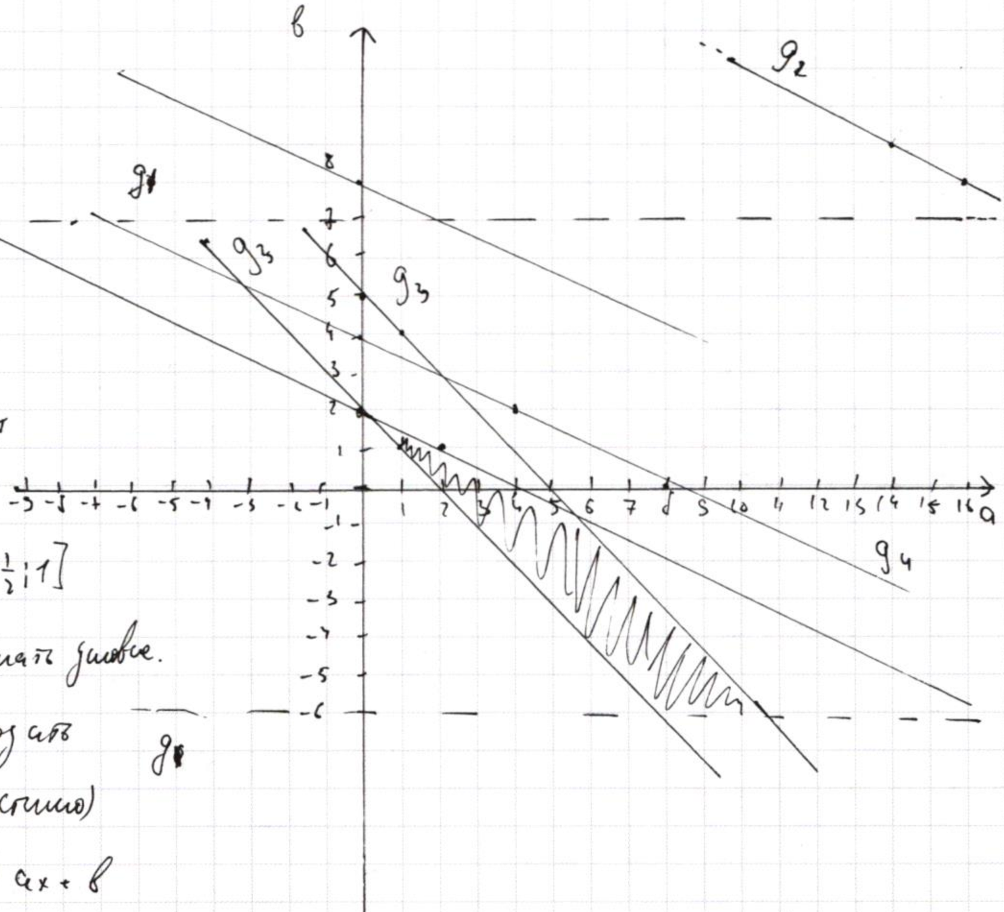
$2 \le a+b \le 5$

$b \ge 2-a$

$b \le 5-a$

$b \ge 4 - \frac{a}{2}$

$b \le 8 - \frac{a}{2}$



Можно понять, что если прямая $ax+b$ не проходит через точку Q то в границах отрезка $[-\frac{1}{2};1]$ либо она будет пересекать дважды (возможно далее проходить под Q), что недопустимо) тогда $ax+b$ $Q \in ax+b$

при этом не забываем условия для ~~$f(-\frac{1}{2})$~~ в точках $x=-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1$

получаем $f(-\frac{1}{2})=2$; $f(\frac{1}{2})=4$; $f(1)=5$ т.е. ~~$a=\frac{1}{2}$ $2b=13$~~

$a=2$; $b=3$ Ответ: $(2;3)$

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 6

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

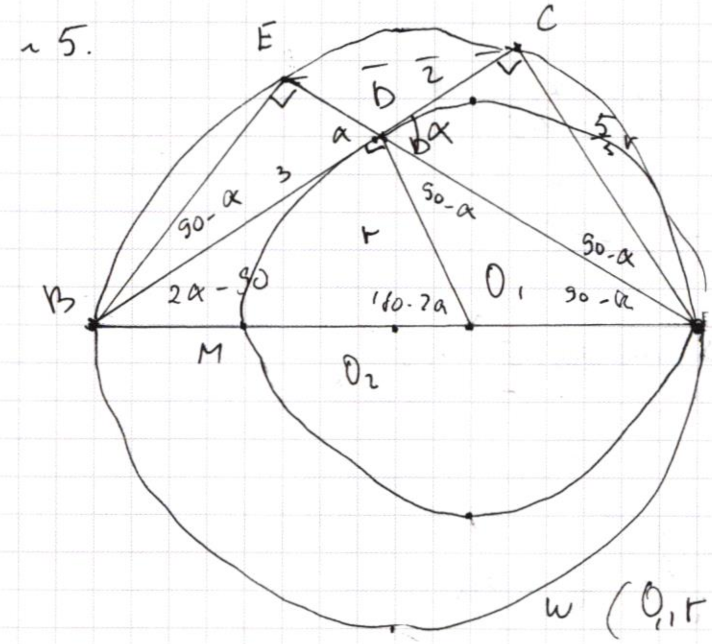
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.



$O_1; O_2 \in AB$;

$\angle BCA = \angle BEA = \angle ODB$ – из радиуса и кас.

из AB = диаметр

$\angle CDA = \alpha$; $\angle CAD = 90-\alpha =$
$= \angle CBE$; $\angle DO_1A = 2\alpha$; $O_1D = O_1A \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle O_1DA = \angle O_1AD = 90-\alpha$

$BD \cdot DC = ED \cdot DA = 6$

$\omega(O_1, r); (O_2; R)\Omega$;

$\angle DO_1B = 180-2\alpha \Rightarrow \angle DBO_1 = 2\alpha-90 \Rightarrow \angle EBA = \alpha$

$\triangle BDO_1 \sim \triangle BCA$; $k = \frac{3}{5}$; $\begin{cases} BM \cdot BA = BD^2 \\ \frac{BO_1}{BA} = \frac{BD}{BC} \end{cases}$

$\begin{cases} BM \cdot (BM + 2r) = 9 \\ \frac{BM + r}{BM + 2r} = \frac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow 5BM + 5r = 3BM + 6r \Rightarrow BM = \frac{r}{2}$

$\frac{r}{2} \cdot 2{,}5r = 9$

$2{,}5r^2 = 18$

$r^2 = 7{,}2$

$r = \cancel{2\sqrt3}\sqrt{7{,}2}$

$AC = \cancel{2\sqrt3}\sqrt{7{,}2} \cdot \frac{5}{3} = \cancel{\frac{10\sqrt3}{3}}$; $\sqrt{\frac{7{,}2 \cdot 25}{9}} = \sqrt{0{,}8 \cdot 25} = 4\sqrt5 = \sqrt{20}$

$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{36 + \frac{30}{9}} =$
$= \sqrt{36 + \frac{10}{3}} = \sqrt{\frac{118}{3}} = \sqrt{39\frac{1}{3}}$

$AB = 2R \Rightarrow R = \sqrt{\frac{118}{12}} = \sqrt{\frac{59}{6}}$

$AB = \sqrt{25 + \frac{300}{9}} = \sqrt{\frac{75+100}{3}} = \sqrt{\frac{175}{3}} = 2R$

$R = \sqrt{\frac{175}{12}}$

$AB = \sqrt{20 + 5} = 5$

$R = 2{,}5$

$S_{BACE} = \frac{BC \cdot AE}{2} \sin\angle\alpha$;

$\cancel{\sin\angle\alpha = \frac{AC}{AD} = \frac{\frac{5}{3}r}{\sqrt{4+\frac{25}{9}r^2}} = \frac{\frac{10\sqrt{3}}{3}r}{\sqrt{4+\frac{25}{3}\cdot R}} = \frac{\frac{10\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{4+\frac{100}{3}}} = \frac{\frac{10\sqrt{3}}{3}}{\frac{\sqrt{112}}{\sqrt{3}}} = \frac{10}{\sqrt{112}}}$

$\cancel{AE = 3\sin\alpha = \frac{30}{\sqrt{112}}}$

$\cancel{S_{BACE} = \frac{\frac{30}{\sqrt{112}} \cdot 5 \cdot \frac{10}{\sqrt{112}}}{2} = \frac{1500}{224} = \frac{750}{112} = \frac{375}{56}}$

Ответ: $\cancel{r = 2\sqrt{3};\ R = \sqrt{\frac{175}{12}};\ S = \frac{375}{56}}$

$r = \sqrt{7{,}2}$; $R = 2{,}5$; $S_{\cancel{AB}BACE} = 2{,}5$

$\sin\angle a = \frac{3\sqrt{20}}{\sqrt{24}} = \sqrt{\frac{5}{6}}$

$S_{BACE} = \frac{5 \cdot 3\sqrt{\frac{5}{6}} \cdot \sqrt{\frac{5}{6}}}{2} = \frac{5 \cdot \cancel{3} \cdot \frac{5}{\cancel{6}}}{2} = \frac{10}{4} = 2{,}5$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

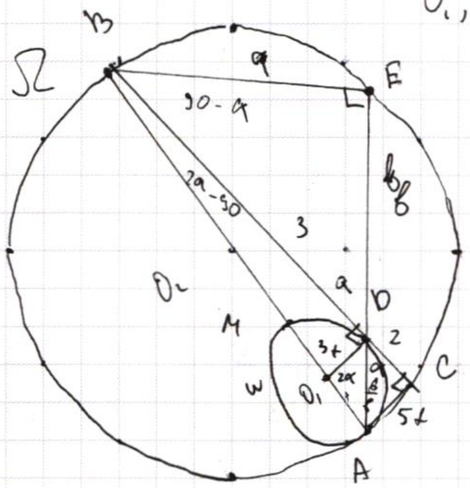
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.



$O_1, O_2 \in AB$; $\angle BCA = \angle BEA = 90^\circ$ т.к. AB => диаметр; $\angle O_1DB = 90^\circ$ т.к. $r \perp BC$ кас.:

$CD = 2$; $BD = 3$

$\angle ABC = \alpha$; $\angle BDO_1A = 2\alpha$;

$\angle EAC = 90 - \alpha = \angle CBE$ т.к. равные дуги Ω ; $\angle BO_1D = 180 - 2a$;

$\angle ABD = 180 - 90 - (180 - 2a) = 2\alpha - 90$ => $\angle ABE = 90 - a + 2a - 90 = a$; $\angle O_1AD = \angle CAD = 90 - \alpha = \angle O_1DA$; $tg(90 - \alpha) = \frac{2}{5x}$

$ED \cdot DA = BD \cdot DC = 6$ по св-ву корд. ~~$BE = a$; $ED = \frac{2a}{5x}$~~

~~$BO_1^2 = (BM + r)^2 =$~~

$\frac{BO_1}{BA} = \frac{BM + r}{BM + 2r} = \frac{3}{5}$

$5BM + 5r = 3BM + 6r$

$2BM = r$ $\quad BM = \frac{r}{2}$

$BE = a$; $ED = \frac{2a}{5x}$

$\frac{a}{3} = \frac{b}{3} = \frac{2}{\frac{6}{6}}$

$\frac{b}{3} = \frac{b}{3}$

~~$\left(\frac{4}{25}x^2 a^2 + 1\right) a^2 = 3^2$~~

~~$\frac{4}{25}x^2 + 1 = \left(\frac{3}{a}\right)^2$~~

~~$DA \cdot DE = 6 = \sqrt{25x^2 + 4} \cdot \frac{2}{5}x a$~~

$\frac{36}{b^2} = 4 + 25x^2$

$\frac{4a^2}{25x^2} + a^2 = 3$

$b^2 = \frac{36}{4 + 25x^2}$

$a^2 \frac{4}{25x^2} + 1 = \left(\frac{3}{a}\right)^2$

$b = \sqrt{\frac{6}{4 + 25x^2}}$

$\sqrt{4 + 25x^2} \cdot \frac{2a}{5x} = 6$

~~$\frac{4a^2}{25x^2} + a^2$~~ $= 9$

$(4 + 25x^2) \frac{4a^2}{25x^2} = 36$

$\frac{16a^2}{25x^2} + 4a^2 = 36$

$36 \cdot 3 = 108$; $\frac{108}{10}$; $118 - 3 ... 28 - 28$; $\frac{3}{33}$

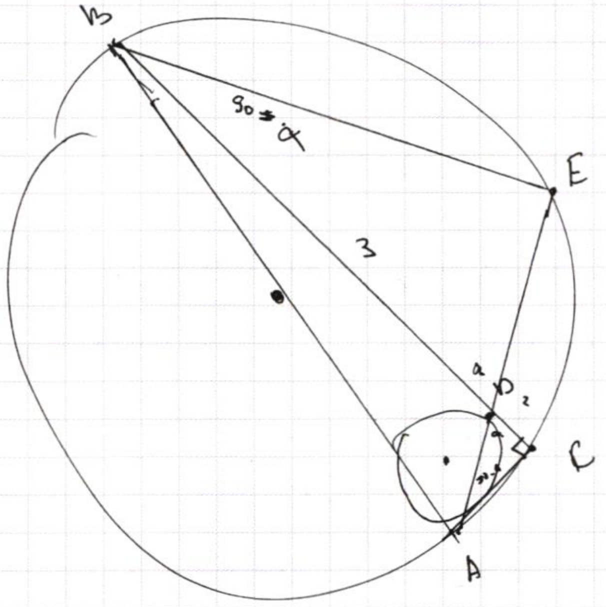
$25 \cdot \quad 75 + 10$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$\frac{5}{3} \cdot 2\sqrt{3} = \left(\frac{10\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{100 \cdot \cancel{3}}{\cancel{9}_3}$

$\frac{175}{3} =$

$2\cancel{5}\ (5)^2 + \left(\frac{10\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \sqrt{25 + \frac{100 \cdot 3}{\frac{\cancel{9}}{3}}} =$

$= \sqrt{\frac{175}{3}} =$

$\frac{175}{12}$ $\quad$ $175 \mid 12$, -12, 55, 15 $\quad$ $\cancel{2}\sqrt{15}$

$4 \quad 2\sqrt{3}$

$\frac{18}{2,5}$

$12 \cdot 2 = 24$

$8 \cdot 2,5$

$180 \mid 25$, 175, 5, $7,2$

$\frac{5}{3} \cdot \sqrt{3}$

$\frac{5}{3} \cdot 2\sqrt{3} = \frac{10\sqrt{3}}{3}$

$\frac{\sqrt{\frac{300}{9}}}{\sqrt{\frac{112}{3}}} = \sqrt{\frac{300}{112}} = \frac{10}{\sqrt{112}}$

$25 \cdot 0,8 =$

$\begin{array}{r} 25 \\ \times\ 8 \\ \hline 200 \end{array}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

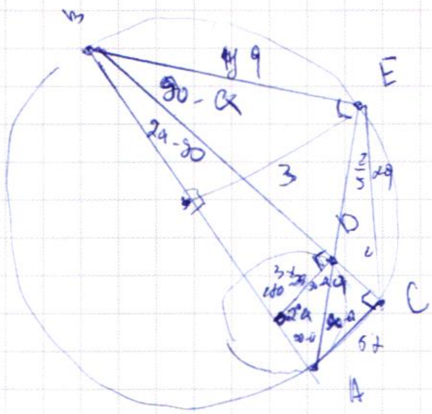
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.



$r; R; S_{BACE}$

$CD=2 \quad BD=3$

$\frac{BD}{BC} = \frac{OD}{CA}$

$ED \cdot DA = 6$

$tg\,a = \frac{2}{5x}$

$tg\,a = \frac{ED}{BE} = \frac{\frac{2}{5}x9}{9}$

$9^2 + \frac{2}{5}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2 9^2 = 3$

$9^2 + 2{,}5 9^4 = 9^2$

$2{,}5t^2 + t - 9 = 0$

$D = 1 + 4\cdot 9\cdot 2{,}5 = 91$

$t = \frac{-1 \pm\sqrt{91}}{2{,}5}$

$t = \frac{-1+\sqrt{91}}{5}$

$9 = \sqrt{\frac{-1+\sqrt{91}}{5}}$

$r = 3\cdot 6{,}25\cdot\sqrt{\frac{-1+\sqrt{91}}{5}}$

$R =$

$\left(\frac{2}{5}x9\right)^2 + 9^2 = 3^2$

$\left(\frac{4}{25}x^2+1\right)9^2 = 3^2$

$\frac{4}{25}x^2+1 = \left(\frac{3}{9}\right)^2$

$\sqrt{4+25x^2}\cdot\frac{2}{5}x9 = 6$

$(4+25x^2)\cdot\frac{4}{25}x9 = 36$

$\frac{16}{25}x9 + 4x^3 9 = 36$

$x9\left(4x^2+\frac{16}{25}\right) = 36$

$4x9\left(x^2+\frac{4}{25}\right)$

$\frac{16}{25}x9\left(\frac{4}{25}x^2+1\right) = 36$

$\frac{16}{25}x9 \quad \frac{9}{9^2} = 36$

$\frac{x}{9}\cdot\frac{16\cdot 9}{25} = 36$

$\frac{x}{9} = \frac{36\cdot 25}{16\cdot 9} = \left(\frac{30}{12}\right)^2 =$

$= (2{,}5)^2 = 6{,}25$

$x = 6{,}25 9$

$6{,}25\cdot\frac{2}{5} = 2{,}5 9^2$

$\left(\frac{3}{9}\right)^2$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{(y-1)(x-6)} \\ (x-6)^2+2(y-1)^2=18 \end{cases}$$

$\sqrt{x-6}=a$

$\sqrt{y-1}=b$

$$\begin{cases} x-6y=ab \\ a^4+2b^4=18 \end{cases}$$

$(x-6)(y-1)=$

$(x-6)(y-1)$

$a^2-6b^2=x-6-6y+6=$

$$\begin{cases} a^2-6b^2=ab \\ a^4+2b^4=18 \end{cases}$$

~~$ab-b^2$~~ $=6b$

$a^2-ab-6b^2=0$

$D=b^2+24b^2=(5b)^2$

$a=\frac{b\pm5b}{2}=3b;-2b$

$a=3b$

$81b^4+2b^4=18$

$b^4=\frac{18}{83}$

$b=\sqrt{\frac{18}{83}}$ $a=3\sqrt{\frac{18}{83}}$

$\downarrow$

$\sqrt{x-6}=3\sqrt{\frac{18}{83}}$

$x-6=9\cdot\frac{18}{83}$

$x=\frac{162-6\cdot83}{83}$; $b=\sqrt{y-1}=\sqrt{\frac{18}{83}}$

$y=1+\frac{18}{83}$

$+\frac{18}{9}$ $9^2\cdot2=162$

$+\frac{83}{6}$

$+\frac{12}{8}$

$64-96+20$ $2;4$

$6-9\sqrt{\frac{18}{83}}-6+6$

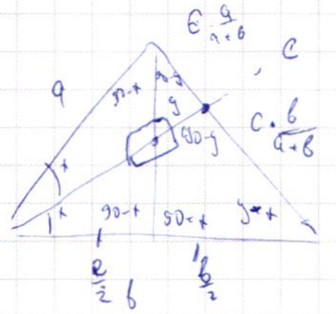
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$f(ab) = f(a)+f(b)$ $f(p)=[p/2]$

$x\in[2;22]$ $f(\frac{x}{y})<0$

$y\in[2;22]$

$f(1)=f(1)+f(1)$

$f(1)=0$

$f(k$

$f(\frac{x}{y})=f(x)+f(y)$

$x\in Z$ or $y\in Z \Rightarrow$

$f(\frac{x}{y})=f(x)$ or $f(y)$

$y\in Z$ $x\in Z$

$f(2)=f(1)=0$

$f(3)=f(1)=0$

$f(1)=f(5)=0$

$f(12)=f(4)+f(3)=0$

$f(13)=f(6)=0$

$f(14)=f(7)+f(2)=0$

$f(15)=f(3)+f(5)=0$

$f(16)=f(4)+f(4)=0$

$f(17)=f(8)=f(4)+f(2)=0$

$f(18)=$

$f(4)=f(2)+f(2)=0$

$f(5)=f(2)=0$

$f(6)=f(3)+f(2)=0$

$f(7)=f(3)=0$

$f(8)=f(4)+f(2)=0$

$f(9)=f(3)+f(3)=0$

$f(10)=f(5)+f(2)=0$

$f(\frac{1}{2})=$

$f(\frac{1}{4})=2f(\frac{1}{2})$

$f(\frac{1}{4}\cdot 2)=f(2)+f(\frac{1}{4})=f(\frac{1}{2})$

$f(\frac{1}{4})=2f(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})$

$f(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{4})=0$

$f(\frac{1}{2k})=2f(\frac{1}{k})$

$f(\frac{1}{k})=f(k)+f(\frac{1}{k^2})$

$f(\frac{1}{k^2})=2f(\frac{1}{k})=f(1)+f(\frac{1}{k^2}$

$f(\frac{1}{k})=f(\frac{1}{k^2})=2f(\frac{1}{k})\Rightarrow$

$\boxed{\geq 7}$

$\Rightarrow f(\frac{1}{k})=0$: $f(\frac{m}{k})=f(m)+f(k)=0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№1 done ; №2 done

1 +
2 +
3 +
4 +
5 +
6 +
7 +

$$\begin{array}{r} 56 \\ \times\ 4 \\ \hline 224 \\ +\ 36 \\ \hline 260 \end{array}$$

$8x - 6|2x-1|$

$2x - 1 > 0$

$x > \frac{1}{2}$

$8x - 12x + 6 = 6 - 4x$

$8x + 12x - 6 = 20x - 6$

$-8x^2 + 6x + 7 = 0$

$D = 36 + 4 \cdot 8 \cdot 7 =$

$\frac{-6}{-2 \cdot 8} = \frac{6}{2 \cdot 8} = \frac{3}{8}$

$-8 \cdot \frac{9}{64} + \frac{3 \cdot 6}{8} + 7$

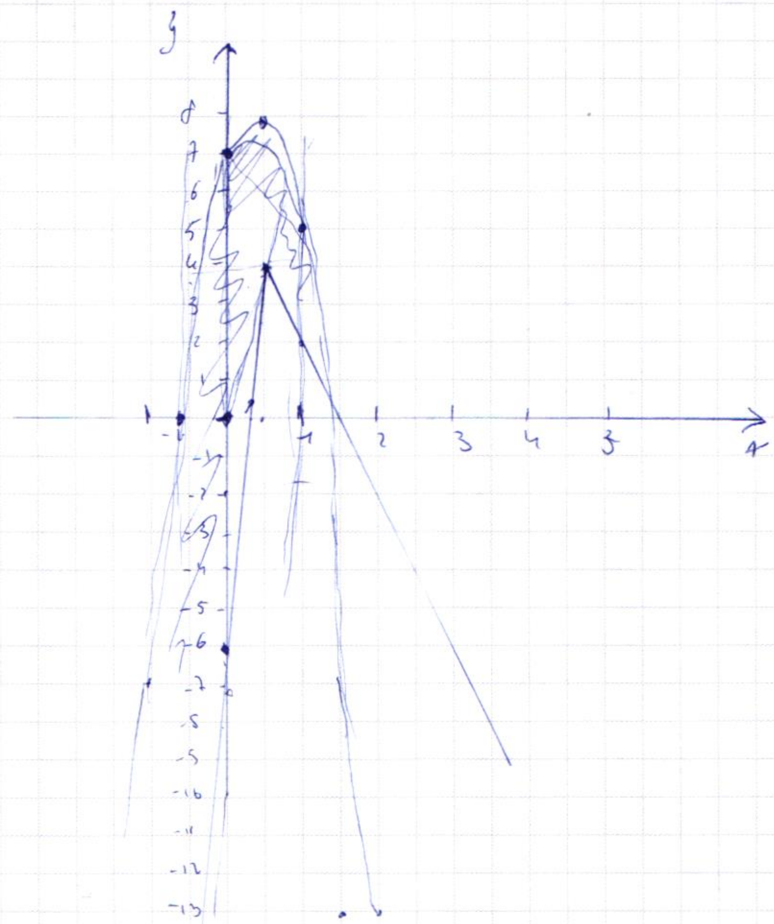
$\frac{-72 + 18 + 56}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

$-8 \cdot \frac{9}{4} + 6 \cdot \frac{3}{2} + 7$

$-18 + 9 + 7 = -2$

$\frac{-6}{-16} = \frac{-3}{-8} = \frac{3}{8}$

$x_0 ; y_0 = \frac{3}{8} ; \frac{1}{4}$



$-8 \cdot \frac{9}{64} + \frac{6 \cdot 3}{8} + \frac{56}{8} =$

$= \frac{-9 + 18 + 56}{8} \quad \frac{64}{8} =$

$-8 \cdot \frac{1}{4} + 6 \cdot \frac{1}{2} + 7$

$-2 + 3 + 7 = 8$

$b \geq -6$

$b \in [-6; 7]$

$-8 \cdot 4 + 12 + 7$

$-32 + 18 = -13$

$-8 - 6 + 7$

$f(\frac{1}{2}) \geq 4$

$a\frac{1}{2} + b \geq 4$

$b \in [-6; 7] \geq 4$

$a + 2b \geq 4 \quad a > 0$

$a \geq 4 - 2b$

$-8 \cdot \frac{1}{4} - 6 \cdot \frac{1}{2} + 7$

$-2 - 3 + 7 = 2$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a, b, c \quad a, aq, aq^2$

$ax^2 - 2bx - c = 0$

$D = 4b^2 - 4ac = 2\sqrt{b^2 - ac}$

$x = \frac{2b \pm 2\sqrt{b^2 - ac}}{2a} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} = aq^3$

$(x+6)^2 + (\sqrt{2}y - \sqrt{2})$ $\quad 2y^2 - 4y + 2 = 0$

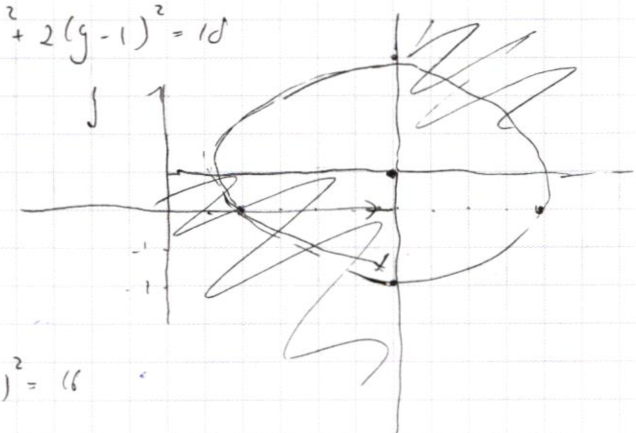
36 $\quad 4 = 2\cdot\sqrt{2}$ v

$x = \frac{2\sqrt{2}}{7}$

$(x-6)^2 + 8 = (y-1)^2 = 18$

$36 + 2 -$

$(x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18$



$x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}$

$xy - 6y - x + 6 \geq 0$

$y(x-6) - (x-6) \geq 0$

$(y-1)(x-6) \geq 0$

$x - 6y \geq 0$

$x^2 - 12xy + 36y^2 = xy - 6y - x + 6$

$x^2 - 13xy + 36y^2 + 6y + x - 6 = 0$

$(x-6y)^2 = (y-1)(x-6)$

$(x-6)^2 = 16$

$x - 6 = 4 \quad x = 2$

$x = 10;$

$f(1) = 0 \quad f(3) = 1$

$f(2) = 1 \quad f(4) = 2$

$f(5) = 2$

$f(6) = 2$

$f(7) = 3$

$f(8) = 3$

$f(9) = 2$

$f(\frac{1}{2}) = f(2) + f(\frac{1}{4})$

$f(\frac{1}{4}) = f(\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2})$

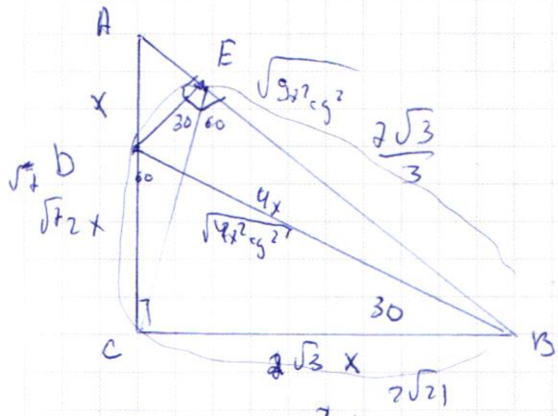
$f(\frac{1}{2}) = 1 + f(\frac{1}{4})$

$f(\frac{1}{4}) = 2f(\frac{1}{2})$

$f(\frac{1}{2}) = -1$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)



$\angle BAC$ $= 4$

$\sqrt{16x^2-4x^2} = 2\sqrt{3}x$ $= 49$

$tg\angle BAC = \frac{2\sqrt{3}x}{3x} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\frac{AE}{x} = \frac{3x}{AB}$

$AB \cdot AE = 3x^2$

$AC = \sqrt{7}$; $CD = \frac{2}{3}\sqrt{7}$

$\sqrt{7} + 2\sqrt{21}\, 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{7}}{3} =$

$\sqrt{7} = AC$ $S_{CED} = \frac{2}{3} S_{AEC} = \frac{2}{3}(S_{ABC} - S_{BEC})$

$CB = \frac{2}{3}\sqrt{21}$

$AB = \sqrt{7 + \frac{4}{9}\cdot 21} = \sqrt{7 + \frac{28}{3}} =$

$= \sqrt{\frac{49}{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$

$S_{CED} = \frac{2}{3}(S_{ABC} - S_{BEC})$

S_{BEC} из т. косинусов.

$ax^2 - 2aqx + aq^2 = 0$

$x^2 - 2qx + q^2 = 0$

$(x-q)^2 = 0$

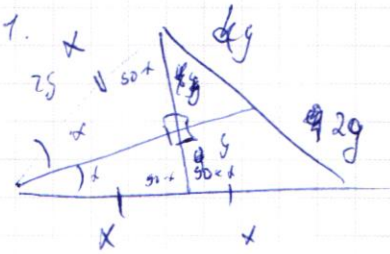
$q = x \Rightarrow aq^3 = q$

$q(aq^2 - 1) = 0$

$aq^2 - 1 = 0$

$a = \frac{1}{q^2} \Rightarrow b = \frac{1}{q}; c = 1$

Ответ: $c = 1$ $= 1.$



$3x + 3a = 900$

$x + a = 300$

$x + 3a > 2x$

$3a > x$

$x + a = 300$

$3a < 3x$

$\frac{k}{k+2} = \frac{b}{b+1}$

$kb + k = bk + 2b$

$k = 2b$

$\frac{ky}{ky+2y} = \frac{by}{by+y}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)