МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a = b_1$ = №1

$b = b_1 q = b_2$

$c = b_1 \cdot q^2 = b_3$

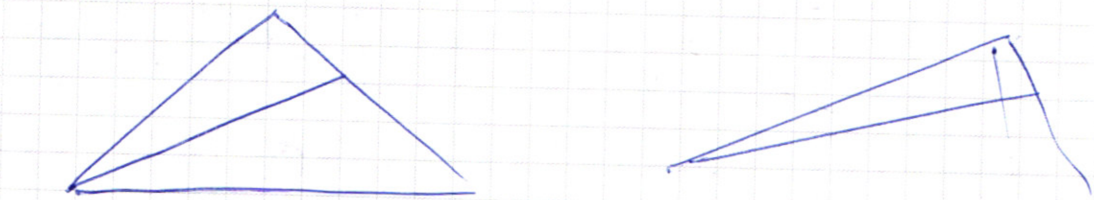
$a x^2 + 2b x + c = 0$

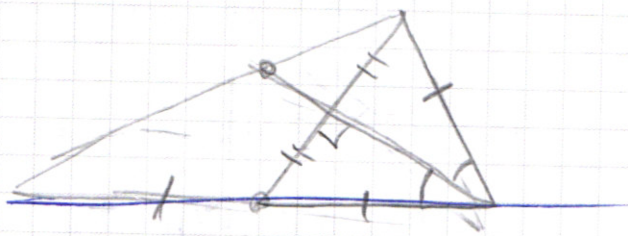
$D = (2b)^2 - 4ac = 4b^2 - 4ac = 4b_1^2 \cdot q^2 - 4 \cdot b_1^2 \cdot q^2 = 0$

$b_4 = \dfrac{-2b}{2a} = -\dfrac{b}{a} = \dfrac{-b_1 q}{b_1} = -q$

$\dfrac{b_4}{b_3} = q \qquad \dfrac{-q}{b_1 q^2} = q \Rightarrow -\dfrac{1}{b_1 q} = q$

$\boxed{-1 = q^2 b_1}$





$2 \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{4}(a+1) - (1+b) = 0$

$\frac{1}{8} + \frac{1}{4}a + \frac{1}{4} - 1 - b = 0 \;\Big|\cdot 8$

$1 + 2a + 2 - 8 - 8b = 0$

$2a - 8b = 5$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

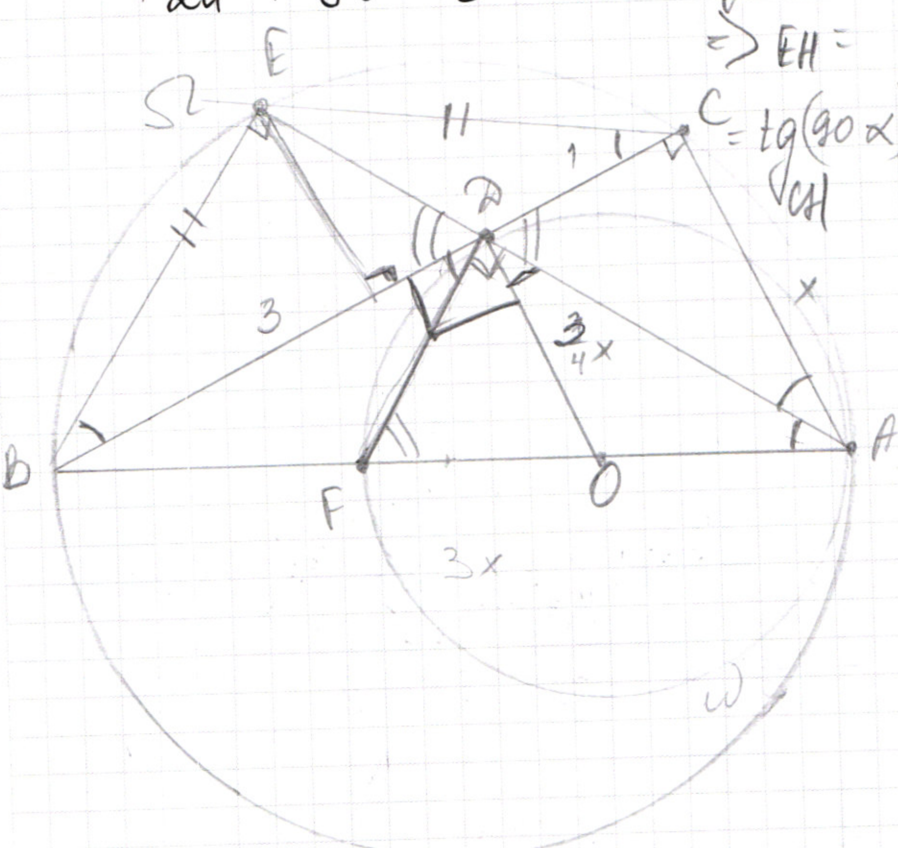
$$12a + 8b = -16$$
$$+\ 2a - 8b = 5 \Rightarrow$$

$$-11 = 14a \Rightarrow a = \frac{-11}{14}$$

$$\operatorname{tg}(90-\alpha) = \frac{EH}{CH} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow EH = \operatorname{tg}(90\alpha)\cdot CH$$

$$B^2 = AB \cdot BF$$
$$ED \cdot DA = 3$$



$$\frac{-33}{14} + \frac{28b}{14} = \frac{-56}{14}$$

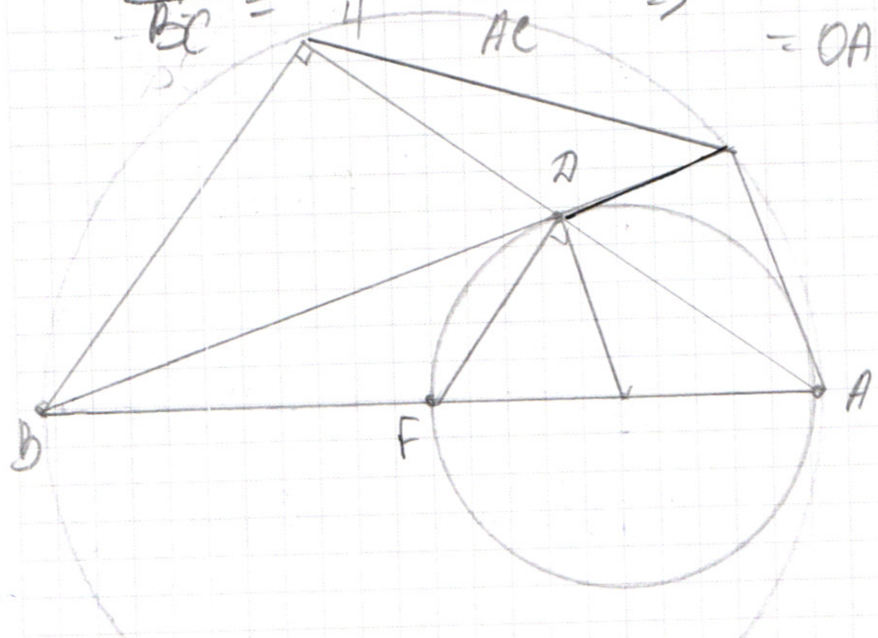
$$28b - 33 = -56$$

$$R_{\Omega} = \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{AB}{2} = \frac{3x}{2}$$

$$x^2 + 16 = 9x^2 \Rightarrow 8x^2 = 16 \qquad x = \sqrt{2}$$

$$\frac{BD}{BC} = \frac{3}{4} = \frac{OD}{AC} \Rightarrow$$

$$OD = \frac{3AC}{4} = \frac{3x}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{4} =$$
$$= OA = FO = R_{\omega}$$



$$2\cdot\frac{9}{4} - \frac{3}{2}a - \frac{3}{2} - 1 + $$
$$+ b = 0$$

$$\frac{9}{2} - \frac{3}{2}a - \frac{3}{2} - 1 + b = 0 \ | \cdot 2$$

$$9 - 3a - 3 - 2 + 2b = 0$$

$$-2b - 3a = 4 \ | \cdot 4$$
$$2a - 8b = 5$$

$$+\begin{array}{l} 8b - 12a = 16 \\ -8b + 2a = 5 \end{array}$$

$$-10a = 21$$
$$a = -2{,}1$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x_1 = \frac{2y+4}{8} = \frac{y+2}{4}$

$x_2 = \cancel{\frac{y+1}{}}\ y-1$

(2) $y - 2y + 2 \geq 0$ $\quad 2 \geq y$

(1) $y - \frac{y+2}{2} \geq 0$

$2y - y - 2 \geq 0$

$y \geq 2$

$D = 144 - 12 \cdot 4 = 144 - 48 =$

$= 96 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{16 \cdot 6} = 4\sqrt{6}$

$y_{12} = \frac{12 \mp 4\sqrt{6}}{6} = 2 \mp \frac{2}{3}\sqrt{6}$

Только $2 + \frac{2\sqrt{6}}{3}$

$$\begin{array}{r} 144 \\ -\ 48 \\ \hline 96 \end{array}$$

$2 \cdot (y-1)^2 + y^2 - 4(y-1) - 4y + 3 = 0$

$2 \cdot (y^2 - 2y + 1) + y^2 - 4y + 4 - 4y + 3 = 0$

$2y^2 - 4y + 2 + y^2 - 4y \overset{+4}{} - 4y + 3 = 0$

$3y^2 - 12y + 9 = 0 \quad |:3$

$y^2 - 4y + 3 = 0$

(+) $y_1 = 1$ $\quad y_2 = 3$ (−) - не удовл. ОДЗ $(y \leq 2)$

$2 \cdot \left(\frac{y+2}{4}\right)^2 + y^2 - (y+2) - 4y + 3 = 0$

$2 \cdot \frac{y^2 + 4y + 4}{16} + y^2 - y - 2 - 4y + 3 = 0 \quad |\cdot 8$

$y^2 + 4y + 4 + y^2 \cdot 8 - 8y - 16 - 32y + 24 = 0$

$9y^2 - 36y + 12 = 0 \quad |:3 \qquad 3y^2 - 12y + 4 = 0$

$y \geq 2y - 2$

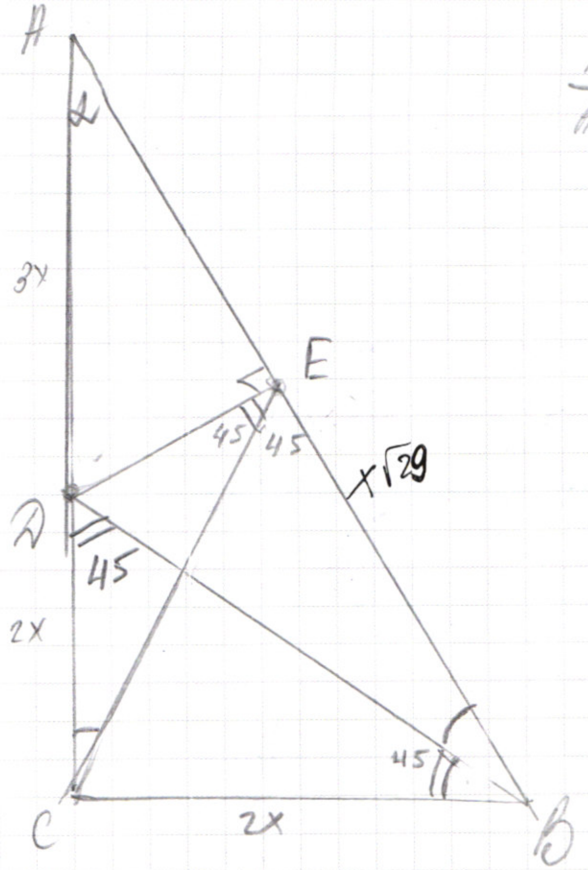
$2 \geq y$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

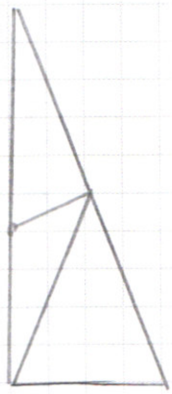
Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{3x}{AB} = \frac{AE}{5x}$$

$$tg\angle BAC = \frac{BC}{AC} = \boxed{\frac{2}{5}}$$



$$\frac{5}{\sqrt{29}}$$

$$\frac{\frac{15\sqrt{29}x}{29}}{33x} = \frac{15\sqrt{29}}{3} =$$

$$= \frac{5\sqrt{29}}{\sqrt{29}}$$

$$AB = (5x)^2 + (2x)^2 = 25x^2 + 4x^2 = 29x^2 \Rightarrow x\sqrt{29} = AB$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{3x}{x\sqrt{29}} = \frac{DE}{2x} \Rightarrow DE \cdot x\sqrt{29} = 4x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow DE = \frac{6x}{\sqrt{29}} = \frac{6\sqrt{29}x}{29}$$

$$AE \cdot AB = AC \cdot AD$$

$$AE = \frac{AC \cdot AD}{AB}$$

AE

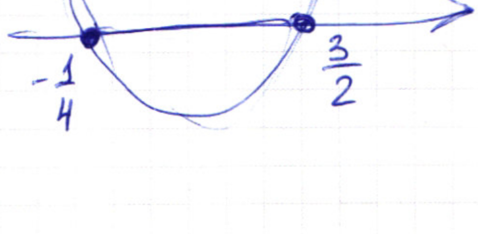
y

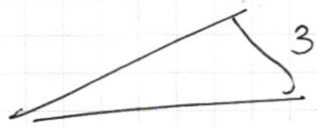
$$DE = \frac{AD \cdot BC}{AB}$$

1

$$2x^2 - x - 1 \le ax + b$$

$$2x^2 - (a+1)x - 1 - b \le 0$$





$$(400 - 1) \cdot 3 = 1200 - 3$$

$$3 \cdot 3 + 3 = 12$$

$$3 \cdot 2 + 6 = 12$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 $\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$

$x(y-2)-(y+2)$

$(x-1)(y-2)$

$1,5 \cdot 3 = 4,5$

При $y-2x \geq 0$ и $xy-2x-y+2 \geq 0$

$xy-2x-y+2=(y-2x)^2=y^2-4xy+4x^2$

$(y^2-4y+4)+2(x^2-2x+1)=3$

$(y-2)^2+2(x-1)^2=3$

$y^2-5xy+4x^2+2x+y-2=0$

$4x^2+x(2-5y)+y^2+y-2)=0$

$D=(2-5y)^2-16(y^2+y-2)=4-20y+25y^2-$
$-16y^2-16y+32=9y^2-36y+36=(3y-6)^2$

$x_1=\frac{-2+5y-3y+6}{8}=\frac{2y+4}{8}$

$x_2=\frac{-2+5y+3y-6}{8}=\frac{8y-8}{8}=y-1$

$2x^2-4x+y^2-4y+3=0$

$D=16-8(y^2-4y+3)=16-8y^2+32y-24=$
$=-8(y^2-4y+1)$

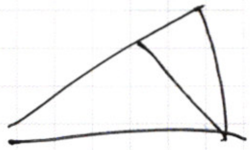
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№3 $\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$



$2(x^2-2x+1)+(y^2-4y+4)=3$

$2(x-1)^2+(y-2)^2=3$

$x(y-2)-(y-2)=(x-1)(y-2)\geq 0$

$3x+y=1200$

$y-2x\geq 0 \Rightarrow y\geq 2x$

$y^2-4xy+4x^2=xy-2x-y+2$

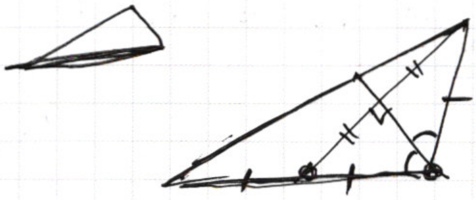
$3x\geq y$

$\cancel{2x^2+y^2-4x-4y+3=0}$

$y^2-5xy+4x^2+2x+y-2=0 \Rightarrow \cancel{y^2+y}$

$4x^2+x(2-5y)+y^2+y-2=0$

$a=-\frac{11}{14}$



$-\frac{11}{7}-8b=5$

$-\frac{11}{7}-\frac{56b}{7}=\frac{35}{7}$

$-\frac{33}{14} \neq -\frac{23}{14}$

$-56b=46$

$b=\frac{-46}{56}=\frac{-23}{28}$

$3\cdot 14=42+11=53$

$\cancel{3x+y=15}$ $3x+y=18$

min $x=$ min $x=4$

max $x=$ $18-3=15$ $\Rightarrow x=5$

$5-4+1=2$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Пусть $a = b_1$, тогда $b = b_1 q = b_2$ и $c = b_1 q^2 = b_3$

Тогда ур-е $ax^2 + 2bx + c = 0$ имеет вид: $b_1 x^2 + 2b_1 q x + b_1 q^2 = 0$

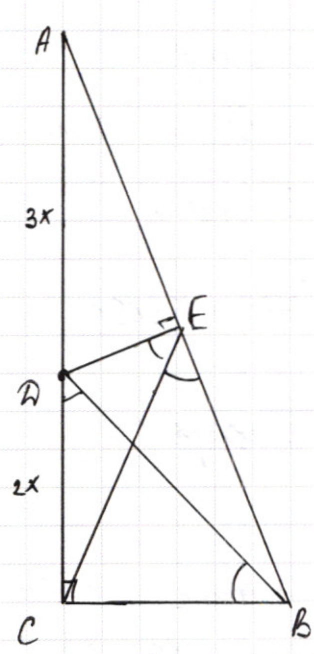
$D = (2b_1 q)^2 - 4b_1^2 q^2 = 0$

Тогда корень этого ур-я $b_4 = -\frac{2b_1 q}{2b_1} = -q$

Т.к. b_4 и b_3 - последовательные члены геом. прогрессии, то $\frac{b_4}{b_3} = q \Leftrightarrow \frac{-q}{b_1 q^2} = q$, т.е. $-\frac{1}{b_1 q} = q$ и $b_1 q^2 = -1$, что в точности есть 3-й член геом. прогрессии

Ответ: -1

№4



Дано: $\angle C = 90^\circ$, $AD : AC = 3 : 5$, $DE \perp AB$, $\angle CED = 45^\circ$, $AC = \sqrt{29}$

Найти: $tg \angle BAC$, $S_{\triangle CED}$

Решение:

1) Пусть $AD = 3x$, тогда $AC = 5x$ и $CD = 2x$

2) Т.к. $\angle CED = 45^\circ$ и $\angle DEB = 90^\circ$ ($DE \perp AB$), то $\angle CEB = 45^\circ$

3) $\angle DEB = \angle DCB = 90^\circ \Rightarrow CDEB$ - впис.

Тогда $\angle DEC = \angle DBC = 45^\circ$ и $\angle CEB = \angle CDB = 45^\circ$ (впис.)

№4 (окончание)

4) Тогда $\triangle CAB$ - р/б и прямоуг., т.е. $DC = BC = 2x$

5) Отсюда $tg\angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}$

6) Найдём AB по т. Пифагора:

$AB^2 = AC^2 + BC^2 \Leftrightarrow AB^2 = (5x)^2 + (2x)^2 = 29x^2 \Rightarrow AB = x\sqrt{29}$

7) $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ ($\angle BAC$ - общ. и $\angle DEA = \angle ACB = 90°$), тогда:

$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow DE = \frac{AD \cdot BC}{AB} = \frac{3x \cdot 2x}{x\sqrt{29}} = \frac{6\sqrt{29} \cdot x}{29}$

8) Аналогично: $\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow AE = \frac{AC \cdot AD}{AB} = \frac{5x \cdot 3x}{x\sqrt{29}} = \frac{x \cdot 15\sqrt{29}}{29}$

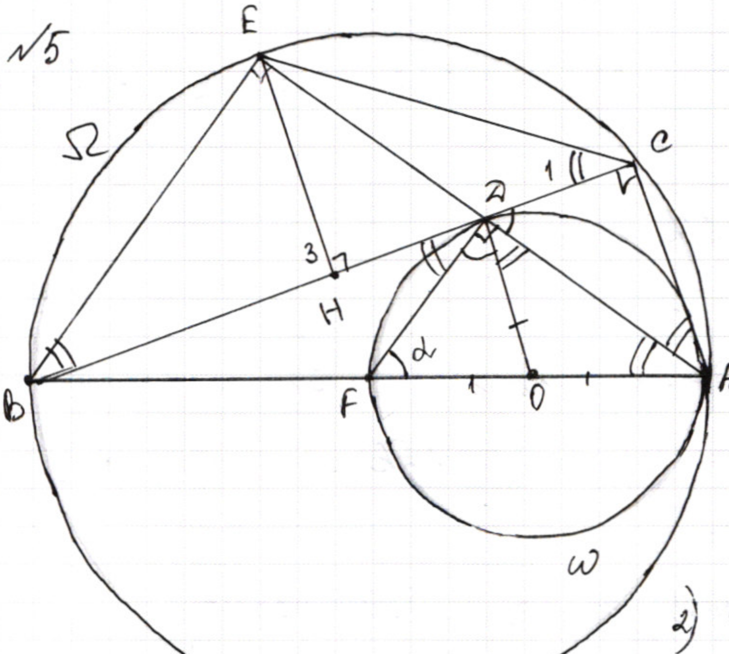
9) Тогда $\sin\angle ADE = \frac{AE}{AD} = \frac{5}{\sqrt{29}} = \sin\angle CDE$ (синусы смежных углов равны)

10) Заметим, что $AC = 5x = \sqrt{29} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{29}}{5}$

11) Тогда: $S_{\triangle CDE} = \frac{1}{2} \cdot \sin\angle CDE \cdot CD \cdot DE = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{\sqrt{29}} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{29}}{5} \cdot$
$\cdot \frac{6 \cdot \frac{\sqrt{29}}{5}}{\sqrt{29}} = \frac{6}{5} = 1,2$

Ответ: $tg\angle BAC = \frac{2}{5}$, $S_{\triangle CDE} = 1,2$

№5



Дано: AB - диаметр Ω, BC - кас. к ω в точке D, CD = 1, BD = 3

Найти: R_ω, R_Ω, S_{BAEC}

Решение:

1) Пусть FA - диаметр ω ($F \in AB$)

2) Тогда $\angle FDA = 90°$, также $\angle BEA = 90°$, т.к. опир. на диам. AB $\Rightarrow$
$\Rightarrow BE \parallel DF$ (соотв. углы равны)

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5 (окончание)

3) DC – кас, поэтому $\alpha = \angle DFA = \angle CDA$ (угол между хордой и касат. равен впис. углу, опир. на ту же хорду) (для ω и $\triangle DFA$)

4) Тогда $\angle DAF = \angle DAC = 90 - \alpha$ (т.к. $\angle BCA = 90°$, опир. на диам. AB) $\Rightarrow$ DA – биссектр $\angle BAC$ в $\triangle BCA$

5) Т.к. DA - биссектр., то по св-ву биссекр.!

$\frac{AB}{CA} = \frac{BD}{CD}$, т.е. , если $AC = x$, то $AB = 3x$

6) $\triangle ABC$ – прямоуг., по т. Пифагора:

$AB^2 = BC^2 + AC^2 \Rightarrow 9x^2 = 16 + x^2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$

7) $R_\Omega = \frac{AB}{2} = 1{,}5x = 1{,}5\sqrt{2}$

8) Пусть O – центр ω, тогда $\angle DAO = \angle ODA = 90° - \alpha$

9) $\angle BDF = \angle DAF = 90° - \alpha$ (т.к. BD – кас.)

10) Из п. 8 и 9 следует, что $\angle BDO = 90°$, т.к. $\angle BDF = \angle ODA$ дополняют $\angle FDO$ до $90°$)

11) $\triangle BOD \sim \triangle BAC$ ($\angle BDO = \angle BCA = 90°$ и $\angle CBA$ - общ.) Тогда:

$\cancel{\frac{BA}{BO}}$ $\frac{BD}{BC} = \frac{OD}{CA} = \frac{3}{4} \Rightarrow OD = \frac{3CA}{4} = \frac{3x}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{4} = R_\omega$

12) $S_{BECA} = S_{\triangle BEC} + S_{\triangle ABC}$

13) $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot CA = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

14) $BECA$ – впис $\Rightarrow$ $\angle EAC = \angle EBC = 90° - \alpha$ (впис.), $\angle EAB = \angle ECB = 90° - \alpha$ (впис) $\Rightarrow$ BEC – р/б ($BE = EC$)

№5 (окончание)

15) ДП: $EH \perp BC$

16) Т.к. $\triangle BEC$ - р/б, то $BH = HC = \frac{BC}{2} = 2$

17) Заметим, что $tg(90^\circ - \alpha) = \frac{EH}{HC} = \frac{CD}{CA} \Rightarrow EH = \frac{CD \cdot HC}{CA} =$
$= \frac{1 \cdot 2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ $(CA = x = \sqrt{2})$

18) $S_{\triangle BEC} = \frac{1}{2} \cdot EH \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 4 = 2\sqrt{2}$

19) $S_{BECA} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle BEC} = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

Ответ: $R_\Omega = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, $R_\omega = \frac{3\sqrt{2}}{4}$, $S_{BECA} = 4\sqrt{2}$

~~4~~ №3

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2} \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-2x)^2 = xy - 2x - y + 2 \\ y - 2x \geq 0 \\ xy - 2x - y + 2 \geq 0 \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 \end{cases}$$

Тогда получим систему:

$$\begin{cases} 4x^2 + x(2-5y) + y^2 + y - 2 = 0 \quad (1) \\ y \geq 2x \\ (x-1)(y-2) \geq 0 \quad (3) \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Решим 1-е ур-е как квадратное, относительно x (y выступает параметром):

$$4x^2 + x(2-5y) + y^2 + y - 2 = 0$$

$$D = (2-5y)^2 - 16(y^2 + y - 2) = 4 - 20y + 25y^2 - 16y^2 - 16y + 32 =$$
$$= 9y^2 - 36y + 36 = 9(y-2)^2 \Rightarrow \sqrt{D} = 3(y-2)$$

$$x_1 = \frac{-2 + 5y - 3y + 6}{8} = \frac{2y + 4}{8} = \frac{y+2}{4}$$

$$x_2 = \frac{-2 + 5y + 3y - 6}{8} = \frac{8y - 8}{8} = y - 1$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 (окончание)

1) Подставим $x_1 = \frac{y+2}{4}$ в ур-е (2) системы:

$$2 \cdot \frac{(y+2)^2}{16} + y^2 - (y+2) - 4y + 3 = 0 \quad | \cdot 8$$

$$y^2 + 4y + 4 + 8y^2 - 8y - 16 - 32y + 24 = 0$$

$$9y^2 - 36y + 12 = 0 \quad | : 3$$

$$3y^2 - 12y + 4 = 0$$

$$D = 144 - 12 \cdot 4 = 144 - 48 = 96 \Rightarrow \sqrt{D} = 4\sqrt{6}$$

$$y_{11} = \frac{12 - 4\sqrt{6}}{6} = 2 - \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

$$y_{12} = \frac{12 + 4\sqrt{6}}{6} = 2 + \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

Проверим каждый корень, удовлетворяет ли он ОДЗ:

$y \geq 2(y+2) \cdot \frac{1}{4} \Leftrightarrow 2y \geq y + 2 \Rightarrow y \geq 2$, т.е. подходит только $y_{12} = 2 + \frac{2\sqrt{6}}{3}$, ему соответствует $x = \frac{4 + \frac{2\sqrt{6}}{3}}{4} = 1 + \frac{\sqrt{6}}{6}$

(данные x и y удовлетворяют ОДЗ (3) в системе, т.к. $y > 2$ и $x > 1 \Rightarrow$ их произведение > 0)

2) Поставим $x_2 = y - 1$ в ур-е (2) системы:

$$2(y-1)^2 + y^2 - 4(y-1) - 4y + 3 = 0$$

$$\cancel{2y^2 + 4y + 2 + y^2 - 4y + 4 - 4y + 3 = 0}$$

$$3y^2 - 12y + 9 = 0 \quad | : 3$$

$$y^2 - 4y + 3 = 0$$

По т. Виета: $y_{21} y_{22} = 3$, $y_{21} + y_{22} = 4 \Rightarrow y_{21} = 1 \vee y_{22} = 3$

Проверим каждый корень, удовлетворяет ли он ОДЗ:

$y \geq 2(y-1) \Leftrightarrow y \leq 2$, т.е. подходит только $y_{21} = 1$,

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

№3 (окончание)

ему соответствует $x=0$ (они оба удовлетворяют ур-ю (3), т.к. $(-1)\cdot(-1)=1\geqslant 0$)

Ответ: $\left(1+\frac{\sqrt{6}}{6};\ 2+\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$; $(0;1)$

№6

$$2x^2-x-1\leqslant ax+b\leqslant x+|2x-1| \quad (*)$$

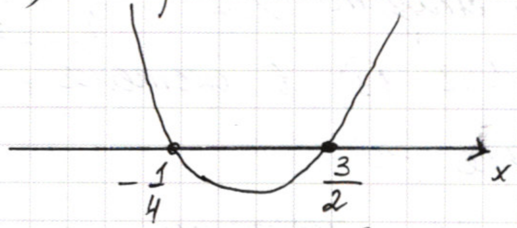
Перепишем (*) как систему нер-в:

$$\begin{cases} 2x^2-x-1\leqslant ax+b & (1)\\ ax+b\leqslant x+|2x-1| & (2)\end{cases}$$

1) Рассмотрим нер-во (1)

$$2x^2-x-ax-1-b\leqslant 0 \Leftrightarrow 2x^2-(a+1)x-(1+b)\leqslant 0$$

Нер-во ~~а~~ выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4};\frac{3}{2}\right]$, значит, парабола, задаваемая $y=2x^2-(a+1)x-(1+b)$ на этом промежутке лежит ниже Ox (см. рис.) (корни $-\frac{1}{4}$ и $\frac{3}{2}$)



Подставим $x=-\frac{1}{4}$:

$$2\cdot\frac{1}{16}+\frac{1}{4}a+\frac{1}{4}-1-b=0 \,\Big|\cdot 8$$

$$2a-8b=5$$

Подставим $x=\frac{3}{2}$:

$$2\cdot\frac{9}{4}-\frac{3}{2}a-\frac{3}{2}-1-b=0 \,\Big|\cdot 2$$

$$9-3a-3-2-2b=0$$

$$3a+2b=-4$$

Тогда: $\begin{cases} 3a+2b=4\cdot(-1)\\ 2a-8b=5\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-\frac{11}{14}\\ b=-\frac{23}{28}\end{cases}$

2) Рассмотрим нер-во (2):

① При $2x-1\geqslant 0 \Leftrightarrow x\geqslant\frac{1}{2}$:

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6 (окончание)

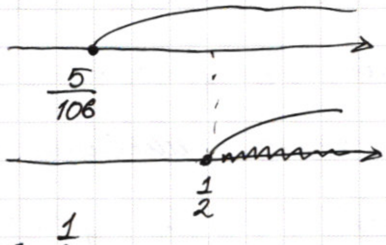
$ax + b \leq x + 2x - 1$

$(3-a)x - 1 - b \geq 0$

$3\frac{11}{14}x - \frac{\cancel{3}5}{28} \geq 0 \quad | \cdot 14$

$53x - \frac{5}{2} \geq 0$

$x \geq \frac{5}{106}$



Если $2x - 1 < 0 \iff x < \frac{1}{2}$

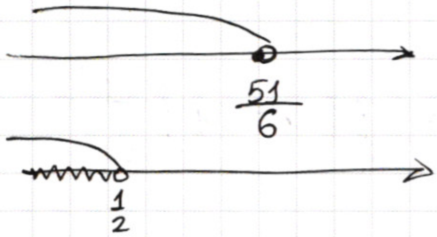
$ax + b \leq x - 2x + 1$

$(a+1)x + b - 1 \leq 0$

$\frac{3}{14}x - \frac{51}{28} \leq 0 \quad | \cdot 14$

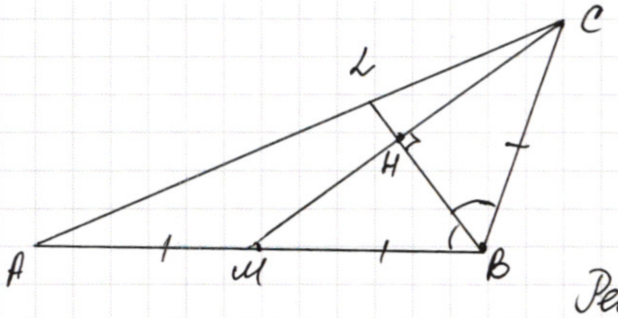
$3x - \frac{51}{2} \leq 0$

$x \leq \frac{51}{6}$



Ответ: $a = -\frac{11}{14}$; $b = -\frac{23}{28}$

№2



Дано: $P_{\triangle ABC} = 1200$, CM - медиана, BL - биссектр., $CM \perp BL$

Найти: кол-во $\triangle ABC$

Решение:

1) BH - высота и биссектр. $\Rightarrow \triangle BMC$ - р/б ($BC = BM$)

2) Т.к. CM - медиана, то $BM = MA$

№2 (окончание)

3) Если $BC = x$, то $AB = 2x$, и т.к. $\triangle ABC$ не вырожден и является $\triangle$, то $AB + BC > AC \Leftrightarrow 3x > y$ ($AC = y$)

4) Тогда $3x + y = 1200$, т.е $3x$ составляет больше половины периметра $\triangle ABC$ (см. п. 3), т.е. минимальное целочисленное значение $x = 201$ ($3x = 603$ и $y = 1200 - 603 = 597 < 603$)

5) Если $y \in \mathbb{Z}$ (а точнее, $y \in \mathbb{N}$), то $y \vdots 3$, т.к. $3x \vdots 3$ и $1200 \vdots 3$, т.е. $\min y = 3$

6) При $\min y = 3$ будет максимальное значение $x = 399$

7) Тогда различных x, а значит, различных $\triangle ABC$ будет $399 - 201 + 1 = 199$ ($\triangle$ со сторонами в другом порядке считаются различными)

Ответ: 199

№7 $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)