МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

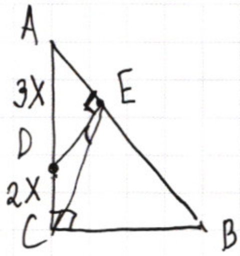
6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

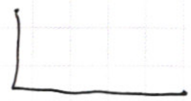
$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

№ 6.





$2x^2 - x - 1 \leq ax + b \leq x + |2x-1|$

$\forall\, x \in \left[-\frac{1}{4} ; \frac{3}{2}\right]$

1) $x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2} : 2x^2 - x - 1 \leq ax + b \leq 3x - 1$

$\cancel{2x^2} \Rightarrow \cancel{2x^2 - 4x \leq 0} \Rightarrow 2x(x-2) \leq 0 \Rightarrow \cancel{x \leq 0}\ 0 \leq x \leq 2$

$\Rightarrow$ 1.1) $2x^2 - (a+1)x - (b+1) \leq 0$

$(2x-1)(2x-3) \leq 0 \Rightarrow a+1 = 8 \Rightarrow a = 7$

$b + 1 = 4 \Rightarrow b = 3.$

$\Rightarrow \mathcal{D} = (a+1)^2 + 8(b+1)$

$\frac{1}{2} = \frac{a+1-\sqrt{\mathcal{D}}}{4} \leq x \leq \frac{a+1+\sqrt{\mathcal{D}}}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow a \cancel{+1+}\sqrt{\ }$

$\Rightarrow 1 = \frac{\sqrt{\mathcal{D}}}{2} \Rightarrow \mathcal{D} = 4 \Rightarrow (a+1)^2 + 8(b+1) = 4$

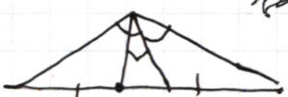
$\frac{\sin^2}{\cos^2}$

$\frac{1}{\cos^2}$

1.2) $ax + b \leq 3x - 1$

$\frac{1}{2}a + b \leq ax + b \leq \frac{3}{2}a + b \leq 3x - 1.$

$\frac{9}{2} - 1 = \frac{7}{2}$



$tg^2 = \frac{\sin^2}{\cos^2} = \cancel{\frac{1-\cos^2}{\cos^2}}\ \frac{\sin^2}{1-\sin^2}$

$\frac{3}{2} AC \geq BC$

$\frac{1}{2} AC + BC \geq AC$

$\Rightarrow \frac{3}{2} AC \geq BC \geq \frac{1}{2} AC$

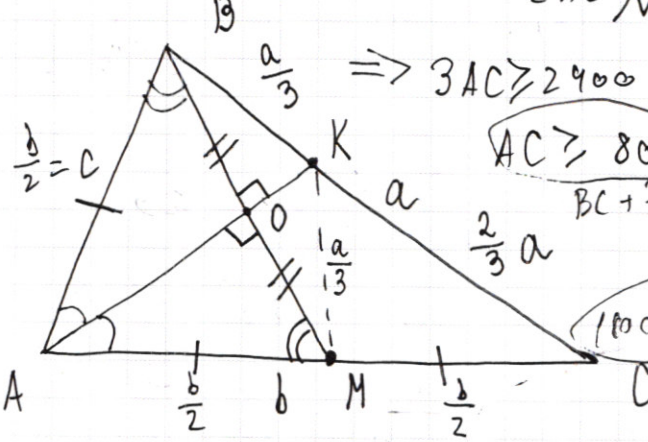
$a, b, c \in \mathbb{Z}$

$\frac{1}{tg^2} = \frac{1}{\sin^2} - 1$

$\frac{1}{\sin^2} = \frac{1+tg^2}{tg^2}$

$\sin^2 =$

№ 2.



$\Rightarrow 3AC \geq 2400$

$AC \geq 800$

$a + b + c = 2400$

$BC + \frac{3}{2} AC \geq 2AC$

$\Rightarrow AC \leq 1200$

$1100 > BC \geq 400$

$\triangle BAK = \triangle MAK$ по СУС

$\Rightarrow BK = MK = \frac{a}{3}$

$\Rightarrow a + b + c = a + b + \frac{b}{2} =$

$= 2400 \Rightarrow a + \frac{3}{2} b = 2400.$

$\Rightarrow \triangle ABM$ – р/б $\Rightarrow c = \frac{b}{2}.$

$\cancel{\triangle AOM = \triangle KOB}$ по $\cancel{\triangle BAK} = \triangle MAK$ по СУС $\Rightarrow BK =$

С Бис: $\frac{BK}{KC} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cancel{BK}\ KC = 2BK = \frac{2}{3} a$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cancel{(y+2x-1)(y+2x+2)} = \cancel{y^2+2xy-2y+2xy+4x^2-2x-y-2x-2}$

$= \cancel{y^2+4x^2} +$

$(y+2x+1)^2 = y^2+4x^2+4xy+2y+4x+1$

$-9xy-y-2x-3$

$\geq 2(x-1)^2+(2x-2)^2 = 2(x-1)^2+4(x-1)^2 = 6(x-1)^2 \Rightarrow$

$3 \quad (x-1)^2 \leq \frac{1}{2} \Rightarrow |x-1| \leq \frac{1}{4}$

$\sqrt{x(y-2x)-(y-2x)+2x^2-4x+2} = \sqrt{(y-2x)(x-1)+2(x-1)^2} =$

$= \sqrt{(x-1)(y-2x+2x-2)} = \sqrt{(x-1)(y-2)}$

$\Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 2 \end{cases}$ или $\begin{cases} x \leq 1 \\ y \leq 2 \end{cases}$

$\Downarrow$

$\underbrace{(x-1)}_{a}\underbrace{(y-2)}_{b} = (y-2x)^2$

$\cancel{a-2b}$

$b-2a$

$\Rightarrow \begin{cases} 2a^2+b^2=3 \\ ab=(b-2a)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2-4ab+4a^2-ab=0 \\ 2a^2+b^2=3 \end{cases} \Rightarrow b^2-5ab+4a^2=0$

1) $b=4a \Rightarrow 2a^2+16a^2=3 \Rightarrow a^2=\frac{3}{18}=\frac{1}{6} \Rightarrow a=\sqrt{\frac{1}{6}}=\frac{\sqrt6}{6}$

$\Rightarrow b=4a=\frac{4\sqrt6}{6}=\frac{2\sqrt6}{3}$

$a=x-1=\frac{\sqrt6}{6} \Rightarrow x=\frac{\sqrt6+6}{6}$

$b=y-2 \Rightarrow y=\frac{2\sqrt6+6}{3}=\frac{2\sqrt6}{3}+2$

1 800 400 200

1 1200 600 201

801 1200

399

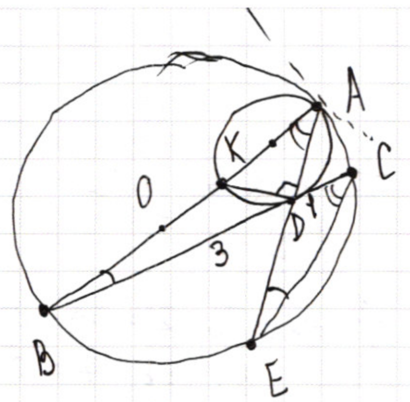
AC $\geq$ 800
BC $\leq$ 1200.

AC $\leq$ 1200
BC $\geq$ 600

AC $\in$ [801; 1199]
BC $\in$ [601; 1199]

200. ~~601~~ 599

№5.



r и R — ?

S_{BACE} — ?

$CD = 1$
$BD = 3$ $\Rightarrow BC = 4.$

$BD \cdot DC = AD \cdot DE = 3$

$AC = \frac{BE}{3}$ $\quad \frac{BD}{AD} = \frac{ED}{DC}$

$BK \cdot BA = BD^2 = 9$

$(2R)^2 = BE^2 + AE^2 \Rightarrow AE^2 = 16 - \frac{8}{9}BE$

$= 16 + AC^2 \quad \frac{BE^2}{9} \quad 16AD^2 \Rightarrow$

$\cancel{BK \cdot 2R}$

$(2R - 2r) \cdot 2R = 9$
$\Rightarrow 4R(R-r) = 9$

$DE = 3AD$
$AE = 4AD$
$3 = \frac{AE}{4} \cdot \frac{3}{4}AE$
$\Downarrow$
$\frac{AE^2}{16} = 1$
$\Downarrow$
$AE = 4$
$AD = 1$
$DE = 3.$

№7.

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = [p/2] = \frac{p-1}{2}$

$y \leq x \leq 2y$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$3x - 1 \overset{?}{\leq} 1 - x$
$4x \leq 2$
$2 \leq 4x \quad x \leq 1$
$\frac{1}{2} \leq x$

$f(2) = [1] = 1.$
$f(3) = 1,$ $\Rightarrow f(6) = 2. \Rightarrow f(1) = 0.$
$f(5) = 2.$

$2x^2 - x - 1 \leq 3x - 1 \Rightarrow 2x^2 - 4x \leq 0$

$2x(x-2) \leq 0$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = \underbrace{f(x)}_{\geq 0} + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0 \Rightarrow f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(2) + f\left(\frac{x}{2y}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{\right.$

$f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{x}{y}\right)$

$AD^2 + KD^2 = AK^2 = r^2$

x — чет. $\Rightarrow f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + 1.$

$\frac{x}{y} \in \mathbb{Z} \ominus \Rightarrow \frac{x}{y} \notin \mathbb{Z}.$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \cancel{f\left(\frac{1}{4}\right) \cdot 2} = \cancel{f\left(\frac{1}{8}\right)} \cdot 4 \ldots$

$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 1 \leq \frac{1}{2}a + b \leq \frac{1}{2}.$

$\frac{9}{2} - \frac{3}{2} - 1 \leq \frac{3}{2}a + b \leq \frac{7}{2}$

$\frac{6}{2} \quad 2$

$a = 3.$

$\cancel{\frac{BE}{AC}} = \cancel{\frac{BD}{AD}} = \cancel{\frac{DE}{DC}}$ $\quad CE = \frac{AB}{3}$

$2x^2 - x - 1 \leq ax + b \leq 1 - x$ $\quad \triangle BDA \sim \triangle EDC$ по УУ $\Rightarrow \frac{BD}{ED} = \frac{DA}{DC} = \frac{BA}{EC}$

$f\left(\frac{1}{y}\right) + f(x)$

$f\left(\frac{1}{x}\right) + f(y)$

$-\frac{1}{4}a + b \leq \frac{5}{4}$

$2x^2 - 2 \leq 0$
$x^2 \leq 1$

$f\left(\frac{1}{y}\right) = f(y) + f\left(\frac{1}{y^2}\right)$

$f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$(2x^2 - \cancel{x}1)(2x-3) \leq 0$ $\quad a+1 = 8 \quad 7$ $\quad b+1 = 3 \quad 2$ $\quad \cancel{\frac{x}{2} + b \leq 3x - 1}$

$(a+1)^2 + 8(b+1) = 4.$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{b+1}{a-3} = -\frac{3}{2} \Rightarrow -2b - 2 = 3a - 9$

$3a + 2b - 7 = 0.$

$AD = 3X, \quad DC = 2X, \quad AC = 5X$

$tg \angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{DE}{AE}$

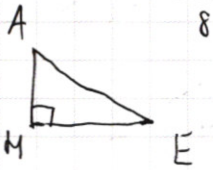
$\triangle ACB \sim \triangle AED$ по УУ $\Rightarrow \frac{AC}{AE} = \frac{CB}{ED} = \frac{AB}{AD}$

$DECB$ – впис. $\Rightarrow \angle DEC = \angle DBC = 45^\circ \Rightarrow DC = BC = 2X.$

$\Rightarrow tg = \frac{2}{5}.$ $\quad 270 - 9 = 261$ $\quad -36$ $\quad 225$ $\quad 29^2 \cdot 9 - 144 = 12^2$

б) $\cancel{DH \parallel AE \Rightarrow DH = \frac{2}{5} AE}$ $\quad (29 \cdot 3)^2 - 12^2$ $\quad 87$

$\cancel{S_{\triangle CED} = \frac{1}{2} DH \cdot CE}$ $\quad \cancel{7}5 \cdot 99$



$EH \parallel BC \Rightarrow EH \perp CD$ $\quad \frac{34}{25} \cdot \frac{2}{5} \cdot \sqrt{29}$

$S_{\triangle CED} = \frac{1}{2} \cdot EH \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot$

$225 - 36 = 189 = 17^2$

$tg \angle CAB = \frac{HE}{AH} = \frac{2}{5} \Rightarrow HE = x \cdot \frac{2}{5} \Rightarrow HE = \frac{17}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{34}{25}$

$AD = \frac{3}{5}\sqrt{29}$

$DE = \frac{2}{5} \cdot AD = \frac{6}{25}\sqrt{29}$

$\cancel{AE = \sqrt{29} \cdot \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{36}{625}} = \frac{\sqrt{29}}{25} \cdot \sqrt{\frac{261}{625}} = \sqrt{\frac{29 \cdot 29 \cdot 9}{625}} = \frac{29 \cdot 3}{25} = \frac{87}{25}}$

$\cancel{9 \cdot 25 = 225 + 36 = 261}$ $\quad 261 - 18 = 81 \mid 9, 29$

$AE = \sqrt{29} \cdot \sqrt{\frac{225 - 36}{625}} = \frac{\sqrt{29 \cdot 17}}{25.}$

$= \cancel{X^2} \Rightarrow \frac{29 \cdot 189}{625} = X^2 \cdot \left(\frac{4}{25} + 1\right) = X^2 \cdot \frac{29}{25} \Rightarrow X^2 = \frac{189}{25}$

$\Rightarrow X = \frac{17}{5}.$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1.

Обозначим: $b = a \cdot q$, $c = a \cdot q^2$ $\Rightarrow$ четвёртый член прогрессии $d = a \cdot q^3$

$ax^2 + 2bx + c = 0 \Rightarrow ax^2 + 2aq \cdot x + aq^2 = 0$
$\Rightarrow a \cdot (x^2 + 2qx + q^2) = 0 \Rightarrow a \cdot (x+q)^2 = 0 \Rightarrow$
$a = 0$ или $x = -q$. $\Rightarrow$ $x = -q$.

Значит, $d = -q$ и $d = a \cdot q^3 \Rightarrow a \cdot q^3 = -q$
$\Rightarrow q \cdot (aq^2 + 1) = 0 \Rightarrow q = 0$ или $a = -\frac{1}{q^2}$
$\Rightarrow a = -\frac{1}{q^2}$.

Значит, $c = a \cdot q^2 = -1$.

Ответ: -1.

№ ~~2~~ 3.

Преобразуем второе уравнение: $2x^2 - 4x + 2 +$
$+ y^2 - 4y + 4 - 3 = 0 \Rightarrow 2 \cdot (x-1)^2 + (y-2)^2$
$= 3$

Преобразуем первое: $y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}$

~~$\Rightarrow \begin{cases} y^2 + 4x^2 - 4xy = xy - 2x - y + 2 \\ y - 2x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$~~

$$\Rightarrow \cancel{\begin{cases} y^2 + 4x^2 - 5xy + 2x + y - 2 = 0 \\ y \geq 2x \end{cases}}$$

$$y - 2x = \sqrt{(x-1)\cdot(y-2)}$$

Значит, $\begin{cases} y - 2x \geq 0 \\ (x-1)\cdot(y-2) \geq 0 \end{cases}$

Замена: $a = x - 1$, $b = y - 2 \Rightarrow y - 2x =$
$= b - 2a \Rightarrow \begin{cases} b - 2a \geq 0 \\ a \cdot b \geq 0 \end{cases}$

Перепишем систему: $\begin{cases} b - 2a = \sqrt{ab} \\ 2a^2 + b^2 = 3 \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} b^2 - 5ab + 4a^2 = 0 \\ 2a^2 + b^2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (b - 4a)(b - a) = 0 \\ 2a^2 + b^2 = 3 \end{cases}$$

1 вар. $\begin{cases} b = 4a \\ 2a^2 + 16a^2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{3}{18} = \frac{1}{6} \\ b = 4a \end{cases} \Rightarrow$

1) $\begin{cases} a = \frac{\sqrt{6}}{6} \\ b = \frac{4\sqrt{6}}{6} \end{cases} \Rightarrow$ проверим на условия: $\begin{cases} \frac{4\sqrt{6}}{6} - \frac{2\sqrt{6}}{6} \geq 0 \quad \oplus \\ \frac{4\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}{6\cdot 6} \geq 0 \quad \oplus \end{cases}$

$\Rightarrow$ подходят! $\Rightarrow x = \frac{\sqrt{6}+6}{6}$, $y = \frac{4\sqrt{6}+12}{6} =$
$= \cancel{3\sqrt{6}} \; \frac{2\sqrt{6}+6}{3}$

2) $\begin{cases} a = -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ b = -\frac{4\sqrt{6}}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{4\sqrt{6}}{6} + \frac{2\sqrt{6}}{6} \geq 0 \quad \ominus \\ \left(-\frac{4\sqrt{6}}{6}\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right) \geq 0 \quad \oplus \end{cases}$

~~2 вар.~~ $\cancel{\begin{cases} b = a \\ 2a^2 + a^2 = \end{cases}}$

$\Rightarrow$ не подходят!

2 вар. $\begin{cases} b = a \\ 2a^2 + a^2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = a \\ a^2 = 1 \end{cases}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow$ условия: $\begin{cases} 1 - 2 \geq 0 \ \ominus \\ 1 \cdot 1 \geq 0 \ \oplus \end{cases} \Rightarrow$ не подх.

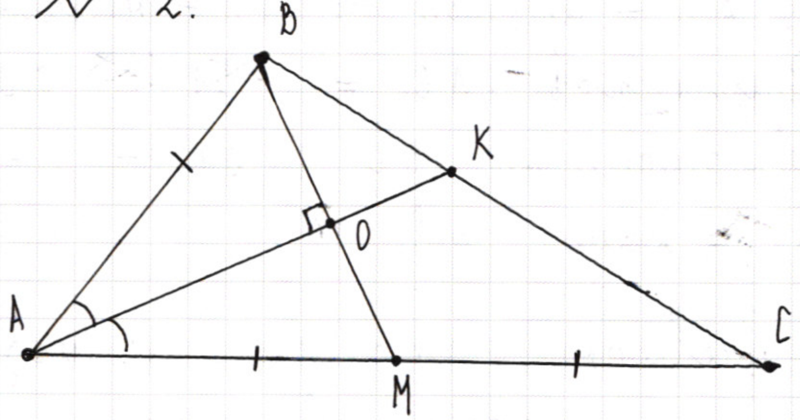
2) $\begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow$ условия: $\begin{cases} -1 + 2 \geq 0 \ \oplus \\ (-1) \cdot (-1) \geq 0 \ \oplus \end{cases} \Rightarrow$ подх.

$\Rightarrow x = a + 1 = 0$, $y = b + 2 = 1$.

Ответ: $(0; 1)$ и $\left(\frac{6+\sqrt{6}}{6}; \frac{6+2\sqrt{6}}{3}\right)$.

№ 2.

Дано: $\triangle ABC$
$P_{\triangle ABC} = 1200$
AK – бис. $\angle BAC$
BM – мед. $\triangle ABC$
$AK \perp BM$



Найти колич. таких треуг.

Решение: (Без ограничения общности возьмём такую бис. и мед.)

Обозначим т. $O = AK \cap BM$. По признаку равнобедр. треуг. (в $\triangle BAM$ AO явл. высотой и бис.) $\triangle BAM$ – равнобедр. $\Rightarrow AB = AM = \frac{AC}{2}$.

Значит, $P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot (AB + BC + AC) = \frac{1}{2} \cdot (BC +$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$+ \frac{3}{2} \cdot AC) = 1200 \Rightarrow \frac{3}{2} \cdot AC + BC = 2400.$

Теперь найдём количество целочисл. пар AC и BC, удовл. равенству. При этом, должны соблюдаться неравенства треуг. $\Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{2} AC > BC \\ BC + AC > \frac{1}{2} AC \\ BC + \frac{1}{2} AC > AC \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{3}{2} AC > BC > \frac{1}{2} AC.$

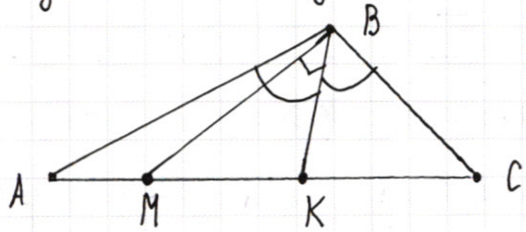
Значит, $3AC > BC + \frac{3}{2} AC = 2400 \Rightarrow AC > 800.$

$BC + \frac{3}{2} AC > 2AC \Rightarrow AC < 1200.$

$\Rightarrow 800 < AC < 1200$ и AC — чётное (иначе $\frac{3}{2} AC$ — нецелое $\Rightarrow BC$ — нецелое ✗) $\Rightarrow$ количество вариантов $AC =$ ~~600 < 40~~ $600 - 400 - 1 = 199.$

Аналогично BC ($BC = 2400 - \frac{3}{2} AC \Rightarrow$ кол. $AC =$ колич. BC).

☆ Очевидно, что бис. и мед. не могут выходить из одной вершины.



Тогда $\angle ABC = 2 \cdot \angle ABK > 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ$ ✗

Ответ: 199.

~~$\triangle ADE$: $\operatorname{tg}\angle DAE = \frac{2}{5} = \frac{DE}{AD} \Rightarrow DE = \frac{2}{5}\cdot AD = \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot AC = \frac{6}{25}\cdot\sqrt{29}$, $AD = \frac{3}{5}\cdot\sqrt{29}$~~

~~По Т Пифагора: $AE = \sqrt{AD^2 - DE^2} = \sqrt{29\cdot\frac{9}{25} - \frac{36}{625}\cdot 29} = \sqrt{29}\cdot\frac{\sqrt{225-36}}{25} = \sqrt{29}\cdot\frac{17}{25}$~~

~~Значит, $AE = \sqrt{29}\cdot\frac{17}{25} = \frac{\sqrt{29}}{2}\cdot X \Rightarrow X =$~~

$\triangle ADE$: $\operatorname{tg}\angle DAE = \frac{2}{5} = \frac{DE}{AE} \Rightarrow \sin\angle DAE = \frac{DE}{AD} = \sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2\angle DAE}{1+\operatorname{tg}^2\angle DAE}} = \sqrt{\frac{\frac{4}{25}}{\frac{29}{25}}} = \frac{2}{\sqrt{29}}$

$AD = \frac{3}{5}\cdot AE = \frac{3}{5}\cdot\sqrt{29}$

$\Rightarrow DE = \frac{2}{\sqrt{29}}\cdot AD = \frac{2}{\sqrt{29}}\cdot\frac{3}{5}\cdot\sqrt{29} = \cancel{\frac{12\sqrt{29}}{5\cdot 29}}$ $\frac{6}{5}$

~~По Т Пиф.: $AE = \sqrt{AD^2 - DE^2} = \sqrt{29\cdot\frac{9}{25} - \frac{144}{25\cdot 29}} = \sqrt{\frac{75\cdot 99}{25\cdot 29}} = \sqrt{\frac{3\cdot 9\cdot 11}{29}} = 3\cdot\sqrt{\frac{33}{29}} = 3\cdot\frac{\sqrt{33\cdot 29}}{29}$~~

~~Значит, $AE = \frac{\sqrt{29}}{2}\cdot X = 3\cdot\frac{\sqrt{33\cdot 29}}{29} \Rightarrow X = \frac{6\sqrt{33}}{29}$~~

~~$S_{\triangle CED} = \frac{1}{2}\cdot EH\cdot DC = \frac{1}{2}\cdot X\cdot\frac{2}{5}\cdot\sqrt{29} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\cdot\sqrt{29}\cdot\frac{6\sqrt{33}}{29} = \frac{6\sqrt{33\cdot 29}}{5\cdot 29}$~~

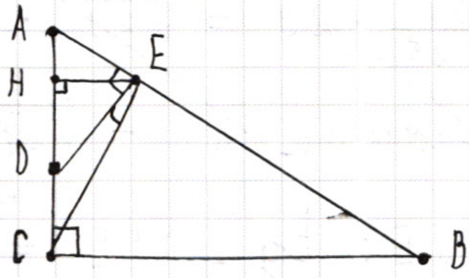
По Т Пифагора: $AE = \sqrt{AD^2 - DE^2} = \sqrt{29\cdot\frac{9}{25} - \frac{36}{25}} = \sqrt{\frac{225}{25}} = \sqrt{9} = 3.$

Значит, $AE = 3 = \frac{\sqrt{29}}{2}\cdot X \Rightarrow X = \frac{6}{\sqrt{29}} \Rightarrow$

$S_{\triangle CED} = \frac{1}{2}\cdot EH\cdot DC = \frac{1}{2}\cdot X\cdot\frac{2}{5}AC = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{5}\cdot\frac{6}{\cancel{\sqrt{29}}}\cdot\cancel{\sqrt{29}} = \frac{6}{5}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4.



Дано: $\triangle ABC$ – прям.
$AD : AC = 3 : 5$, $DE \perp AB$
$\angle CED = 45^\circ$

Найти: а) $\operatorname{tg} \angle BAC$
б) $S_{\triangle CED}$, если $AC = \sqrt{29}$.

Решение: а) заметим, что $\angle DCB = \angle DEB = 90^\circ$ $\Rightarrow DEBC$ – вписанный четырёхугольник (DB – диаметр $\Rightarrow$ по свойству ~~вписанных углов~~ $\angle DEC = \angle DBC$, т.к. они опираются на одну дугу DC $\Rightarrow \angle DBC = 45^\circ$.

Значит, $\triangle DCB$ – прям. и равнобедр. ($\angle CDB = \angle DBC = 45^\circ$) $\Rightarrow DC = CB$.

$\frac{AD}{AC} = \frac{3}{5} \Rightarrow AD = \frac{3}{5} AC \Rightarrow BC = DC = \frac{2}{5} AC \Rightarrow \operatorname{tg} \angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{\frac{2}{5} AC}{AC} = \frac{2}{5}$.

б) Опустим в $\triangle CED$ высоту EH. Обозначим: $EH = x \Rightarrow \operatorname{tg} \angle HAE = \frac{2}{5} = \frac{HE}{AH} \Rightarrow AH = \frac{5}{2} \cdot HE = \frac{5}{2} x$.

$AE = \sqrt{x^2 + \frac{25}{4} x^2} = \frac{\sqrt{29}}{2} \cdot x$
по Т Пифагора

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Ответ: а) $\frac{2}{5}$, б) $\frac{6}{5}$.

№ 6.

1 сл.: $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3}{2} \Rightarrow 2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant$
$\leqslant 3x - 1$

1) $ax + b \leqslant 3x - 1 \Rightarrow (a-3) \cdot x \leqslant -b - 1 \Rightarrow$
$x \leqslant -\frac{b+1}{a-3}$

2) $2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \Rightarrow 2x^2 - (a+1)x - b - 1 \leqslant 0$
$\Rightarrow (D = (a+1)^2 + 8(b+1))$ $\frac{a+1-\sqrt{(a+1)^2+8(b+1)}}{4} \leqslant x$
$\leqslant \frac{a+1+\sqrt{(a+1)^2+8(b+1)}}{4}$

$\Rightarrow \cdot -\frac{b+1}{a-3} = \frac{3}{2} \Rightarrow 3a - 9 + 2b + 2 = 0 \Rightarrow 3a + 2b = 7$

~~Проверим, что $a = 3$ и $b = -1$ подходят:~~

~~1) $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3}{2} \Rightarrow 2x^2 - x - 1 \leqslant 3x - 1 \leqslant 3x - 1$ ⊕~~

~~$2x^2 - 4x \overset{?}{\leqslant} 0 \Leftrightarrow x(x-2) \leqslant 0 \Leftrightarrow$~~
~~$0 \leqslant x \leqslant 2$ ⊕~~

№ 7.

$f(2) = \left[\frac{2}{2}\right] = 1$ $\qquad$ $f(1) = 0$ (т. к. $f(2) =$

$f(3) = \left[\frac{3}{2}\right] = 1$ $\qquad$ $= f(2) + f(1))$

$f(4) = f(2) + f(2) = 2$

Если число $\frac{x}{y}$ – целое, то $f\left(\frac{x}{y}\right) = \begin{cases} \left[\frac{x}{2y}\right], \\ \sum_i f(q_i), \end{cases}$

, если $\frac{x}{y}$ – простое

, где q_i – делитель числа $\frac{x}{y}$

$\Rightarrow$ В обоих случаях $f\left(\frac{x}{y}\right) > 0 \Rightarrow \frac{x}{y}$ – нецелое.

$f(1) = f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right)$, где a – целое число $\Rightarrow$

$f\left(\frac{1}{a}\right) = f(1) - f(a) = -f(a)$

Значит, $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y)$

$< 0 \Rightarrow f(x) < f(y)$

Посчитаем $f(x)$ для всех x от 1 до 21.

x	$f(x)$
1	0
2	1
3	1
4	2
5	2
6	2
7	3
8	3
9	2
10	3
11	5
12	3
13	6
14	4
15	3
16	4
17	8
18	3
19	9
20	4
21	4

Значит, если

$x = 2 \Rightarrow y \in [3; 21] \Rightarrow$ 19 пар

$x = 3 \Rightarrow y \in [4; 21] \Rightarrow$ 18 пар

$x = 4 \Rightarrow y \in [5; 21]$ и $f(y) > 2 \Rightarrow$ 14 пар

5 $\Rightarrow$ 13 пар

6 $\Rightarrow$ 12 пар

7 $\Rightarrow$ 9 пар

8 $\Rightarrow$ 8 пар

9 $\Rightarrow$ 12 пар

10 $\Rightarrow$ 8 пар

11 $\Rightarrow$ 2 пары

12 $\Rightarrow$ 7 пар

13 $\Rightarrow$ 2 пары

14 $\Rightarrow$ 2 пары

15 $\Rightarrow$ 5 пар

16 $\Rightarrow$ 2 пары

17 $\Rightarrow$ 1 пара

18 $\Rightarrow$ 3 пары

19 $\Rightarrow$ 0 пар

20 $\Rightarrow$ 0 пар

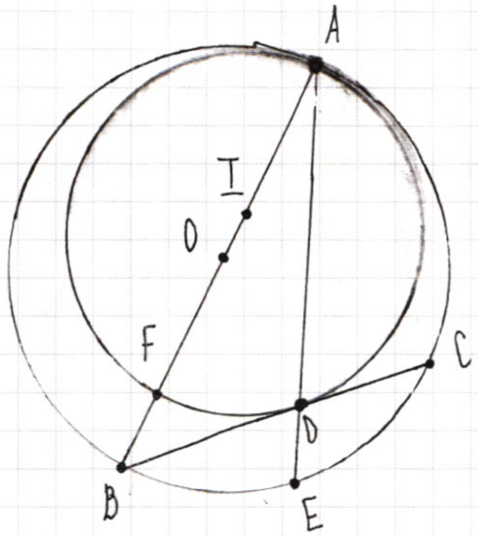
21 $\Rightarrow$ 0 пар

Суммарно пар = 137

Ответ: 137 пар.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 5.



Решение: по свойству пересек. хорд $BD \cdot DC = AD \cdot DE = 3$

По T (о квад. касат.) $BD^2 = BF \cdot BA$, где F – точка перес. BA и ω.

$\Rightarrow 9 = 2R \cdot (2R - 2r)$, где R и r – радиусы окр. Ω и ω.

Окр. Ω – опис. окр. $\triangle ABC \Rightarrow$ т. O (центр Ω) – точка пересеч. серединн. перп. $\triangle ABC$. ~~$\Rightarrow CO$ – сер. перп.~~ ~~$\Rightarrow$~~

$\triangle AFD \sim \triangle ABE$ по 2 углам ($\angle D = \angle E = 90^\circ$, $\angle A$ – общ.)

$\Rightarrow \frac{AF}{AB} = \frac{r}{R} = \frac{FD}{BE} = \frac{AD}{AE} \Rightarrow AD = AE \cdot \frac{r}{R} \Rightarrow DE = AE \cdot \frac{R-r}{R}$

$\Rightarrow \cancel{AD \cdot AE = AE^2 \cdot \frac{r}{R} = 3} \Rightarrow AD \cdot DE = AE^2 \cdot \frac{(R-r)r}{R^2} = 3 \Rightarrow AE^2 \cdot \frac{\frac{9}{4}}{R^2} = 3 \Rightarrow AE = \sqrt{\frac{12R^2}{9}} = \sqrt{\frac{4R^2}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} R$

$\Rightarrow AD = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot r$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4R^2 = \frac{4R^2}{3} + BE^2 \\ 4r^2 = \frac{4r^2}{3} + FD^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BE = \frac{2\sqrt{6}}{3} R \\ FD = \frac{2\sqrt{6}}{3} r \end{cases}$$

~~$\triangle AOE$ и $\triangle AID$ – п/б $\Rightarrow$ они подобны $\Rightarrow \frac{r}{R} =$~~

~~$=$~~