МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1

$ax^2+2bx+c=0$

$D=4b^2-4ac=4a^2q^2-4a\cdot aq^2=0$, где $q=\frac{b}{a}$;

$x=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}=-q$;

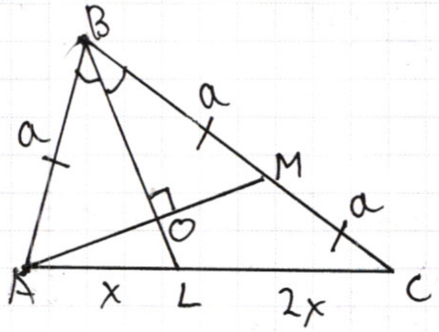
Тогда $-q=aq^3$

$q(aq^2+1)=0$

$q=0$ (неуд.) или $c=aq^2=-1$

Ответ: -1

N2



$\triangle ABM$ – р/б, т.к. BO – высота и бисс. $\triangle ABM$.

Тогда $AB=BM=MC=a$.

BL – бисс $\triangle ABC$

$\Downarrow$

$\frac{AL}{LC}=\frac{AB}{BC}=\frac{1}{2}$;

Обозначим $AL=x$;

По нер-ству $\triangle$-ка:

$\begin{cases}3a>3x\\3x+2a>a\\3x+a>2a\end{cases}$ $\begin{cases}a>x\\a>-3x\\a<3x\end{cases}$ $\Rightarrow$ $\boxed{x<a<3x}$

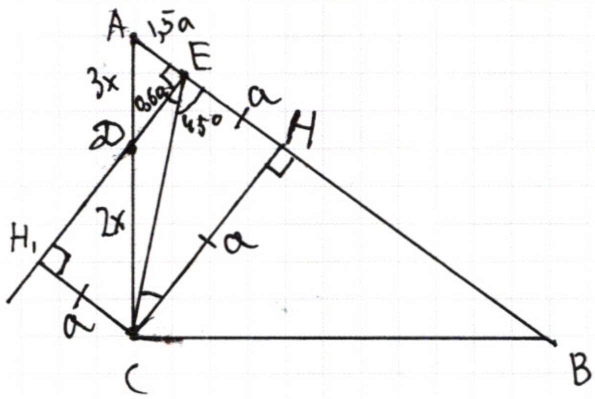
$P_{ABC}=3a+3x \Rightarrow a+x=400 \Rightarrow a=400-x$

Имеем систему:

$\begin{cases}400-x>x\\400-x<3x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x<200\\x>100\end{cases} \Rightarrow$ кол-во $\triangle$-ков 99

Ответ: 99

N4



а) $\frac{AD}{AC}=\frac{3}{5}$ CH – высота $\triangle ABC$

$5AD = 3AC = 3(AD+DC)$

$2AD = 3DC$;

$\triangle DAE \sim \triangle CAH$ ($\angle A$ – общ; $\angle E = \angle H = 90°$)

$\frac{3}{5} = \frac{DA}{CA} = \frac{DE}{CH} = \frac{AE}{AH}$

$5AE = 3AH = 3(AE + EH)$

$2AE = 3EH$;

$\triangle EHC$ – р/б, т.к. $\angle CEH = \angle DEC = \angle ECH = 45° \Rightarrow EH = CH \Rightarrow \boxed{AE = 1{,}5CH}$

$\boxed{DE = \frac{3}{5}CH} \Rightarrow tg\angle BAC = \frac{DE}{AE} = \frac{0{,}6CH}{1{,}5CH} = \frac{6}{15}$;

б) $AC = \sqrt{29}$; $AD = \frac{3}{5}AC = \frac{3}{5}\sqrt{29}$;

$AD^2 = AE^2 + DE^2 = \frac{9}{4}CH^2 + \frac{9}{25}CH^2 = \frac{261}{100}CH^2$

$\frac{\cancel{9 \cdot 29}}{\cancel{25}} = \frac{\cancel{261}}{\cancel{100}_4}CH^2 \Rightarrow \boxed{CH = 2}$

CH_1 – высота $\triangle CDE$; ~~$DE \parallel CH$~~, $H_1E \parallel CH$; $CH_1 \parallel EH$ и $\angle CH_1E = 90° \Rightarrow$

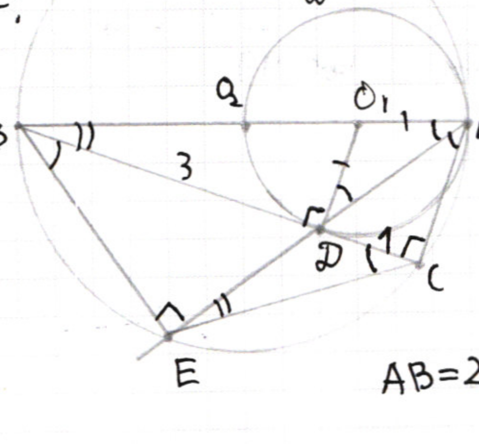
$\Rightarrow CH_1EH$ – прямоуг. и $CH_1 = CH = EH = 2$.

Тогда $S_{CED} = \frac{1}{2} \cdot DE \cdot CH_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}CH^2 = \frac{3}{\cancel{10}_5} \cdot \cancel{4}^2 = \frac{6}{5} = 1{,}2$

Ответ: $tg\angle BAC = \frac{6}{15}$; $S_{CED} = 1{,}2$;

№5

R_Ω – ?
R_ω – ?
S_{BACE} – ?



$\angle BEA = \angle BCA = 90°$ (опир. на диагональ)

$\angle BDO = 90°$ (BC – кас. к ω)

$\angle EBC = \angle EAC$ (опир на одну и ту же дугу)

$\triangle DO_1A$ – р/б ($DO_1 = O_1A$) $\Rightarrow \angle O_1AD = \angle O_1DA$

Но $\angle O_1DA = \angle EAC$, т.к. $DO_1 \parallel AC$

Значит, $\angle O_1AD = \angle DAC = \angle BCE = \angle EBC$

AD – бисс. $\triangle BAC \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{DC}{BD} = \frac{1}{3} = \sin\angle ABC$

$\cos\angle ABC = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$AB = 2R_\Omega = \frac{BC}{\cos\angle ABC} = \frac{4 \cdot 3}{2\sqrt{2}} = 3\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{R_\Omega = \frac{3\sqrt{2}}{2}}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{R_\omega}{BD} = tg\angle ABC = \frac{\sin\angle ABC}{\cos\angle ABC} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \boxed{R_\omega = \frac{\sqrt{2}}{4}BD = \frac{3\sqrt{2}}{4}}$

$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin\angle ABC = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{3}\sqrt{2}\cdot\cancel{4}^{2}\cdot\frac{1}{\cancel{3}} = \boxed{2\sqrt{2}}$

$\cos\angle BAC = \cos 2\angle BAD = 2\cos^2\angle BAD - 1 = \frac{1}{3}$

$\cos^2\angle BAD = \frac{2}{3} \Rightarrow \sin^2\angle BAD = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin\angle BAD = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$BE = AB\sin\angle BAD = \cancel{3}\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cancel{3}} = \sqrt{6}$

$S_{BEC} = \frac{1}{2}BE\cdot BC\cdot\sin\angle EBC = \frac{1}{\cancel{2}}\sqrt{6}\cdot\cancel{4}^{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{2}$

$S_{BACE} = S_{ABC} + S_{BCE} = \boxed{4\sqrt{2}}$

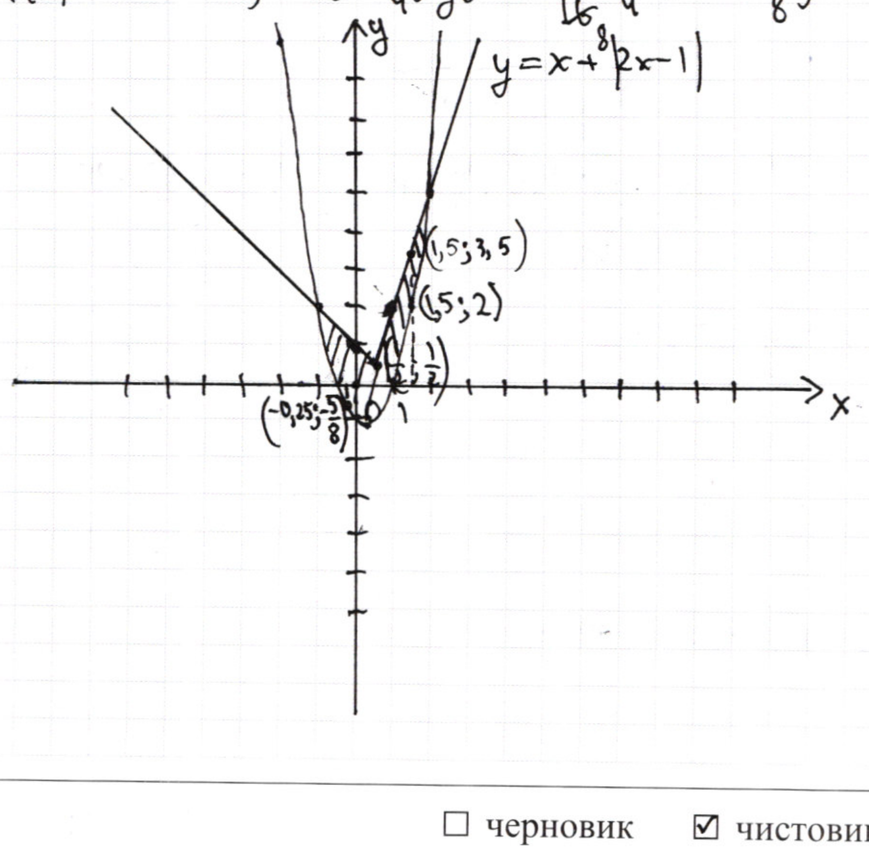
Ответ: $R_\Omega = \frac{3\sqrt{2}}{2}$; $R_\omega = \frac{3\sqrt{2}}{4}$; $S_{BACE} = 4\sqrt{2}$.

N6

Построим графики ф-ий $y = 2x^2 - x - 1$ и $y = x + |2x-1|$

Если $x < \frac{1}{2}$, то $x + |2x-1| = 1 - x$; Если $x \geq \frac{1}{2}$, то $x + |2x-1| = 3x - 1$

$f(x) = 2x^2 - x - 1$; $x_0 = \frac{1}{4}$; $y_0 = 2\cdot\frac{1}{16} - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{9}{8}$;



Точки $(x;y)$, удовл. ~~нер-ву~~ двойному $2x^2-x-1 \le y \le x + |2x-1|$ отмечены штриховкой на графике.

Найдём минимальное a, при кот. прямая будет удовл. усл.

Прямая $y = a_{min}x + b$ должна проходить через точки $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ и $\left(\frac{3}{2};2\right)$

Тогда $a_{min} = \cancel{\frac{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}{2-\frac{1}{2}} = \frac{1}{1.5} = \frac{2}{3}}$ $a_{min} = \frac{2-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}$

Найдём максимальное a, при кот. прямая будет удовл. усл.

Прямая $y = a_{max}x + b$ должна проходить через точки $\left(-\frac{1}{4};-\frac{5}{8}\right)$ и $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

Тогда $a_{max} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{5}{8}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} = \frac{9}{8}\cdot\frac{4}{3} = \frac{3}{2}$

Получили $a_{min} = a_{max} = \frac{3}{2} \Rightarrow$ точки $\left(-\frac{1}{4};-\frac{5}{8}\right)$; $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ и $\left(\frac{3}{2};2\right)$ лежат на одной прямой. Это означает, что только при $a=\frac{3}{2}$ условие будет выполняться. Найдём b:

$2 = \frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2} + b \Rightarrow b = 2 - \frac{9}{4} = -\frac{1}{4} \Rightarrow$ $\boxed{a=\frac{3}{2} \text{ и } b=-\frac{1}{4}}$

Ответ: $\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{4}\right)$

№3

$$\begin{cases} y-2x = \sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

$$\cancel{\begin{cases} y-2x = \sqrt{xy-2x-y+2} \\ \underbrace{4x^2+y^2-4xy}_{(y-2x)^2}+4xy-2x^2-4x-4y+3=0 \end{cases}}$$

$$\cancel{xy-2x-y+2+4xy-2x^2-4x-4y+3=0}$$

$$\cancel{-2x^2+5xy-6x-5y+5=0}$$

$$\cancel{2x^2+6x-5=5y(x-1)}$$

$$\begin{cases} y-2x = \sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2+\underbrace{xy-2x-y+2}_{(y-2x)^2}-xy-2x-3y+1=0 \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2x^2+y^2+y^2+4x^2-4xy-xy-2x-3y+1=0$$

$$2y^2+6x^2-5xy-2x-3y+1=0$$

$$2y^2+6x^2-2xy-3xy-2x-3y+1=0$$

$$2y(y-x)+3x(x-y)+3x^2-2x-3y+1=0$$

$$(y-x)(2y+3x)-(2x+3y)+3x^2+1=0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$q.$ №1

геом. прогрессия $a, b, c, -q$

$ax^2+2bx+c=0$

$D=4b^2-4ac=4\cdot a^2q^2-4a\cdot aq^2=0$

$x=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}=-\frac{aq}{a}=-q$

$-q=aq^3$

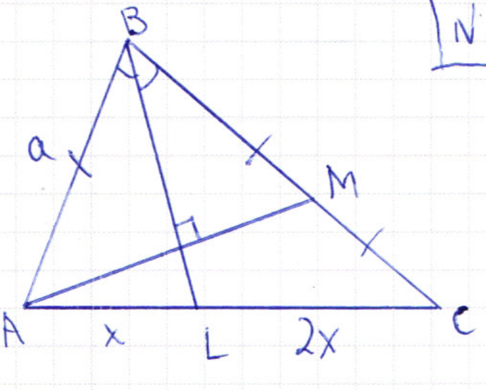
$q(aq^2+1)=0$

$q=0$ или $c=aq^2=-1$

$c=-1$

Ответ: -1

№2



$P_{ABC}=1200$

$\frac{AL}{LC}=\frac{1}{2}$

$\begin{cases} 3a>3x \\ 3x+2a>a \\ 3x+a>2a \end{cases}$ $\quad a>x$, $a>-3x$, $a<3x$

$3a+3x=1200$ $\quad x<a<3x$

$a+x=400$

$\cancel{a>400}$

$\begin{cases} 400-x>x \\ 400-x<3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<200 \\ x>100 \end{cases} \Rightarrow$ кол-во способов 99

Ответ: 99

№3

$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$

$\begin{cases} y^2-4xy+4x^2=xy-2x-y+2 \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases} \Big| -$

$-4xy+4x^2-2x^2+4x+4y-3=xy-2x-y+2$

$-5xy+2x^2+6x+5y-5=0$

$2x^2+x(6-5y)+5y-5=0$

$D=36-60y+25y^2-8(5y-5)=25y^2-100y+76$

$19 \cdot 4 = 76$ $\quad 76|4$ $\quad 4$

$2x^2+6x-5=0$

$D=36+4\cdot2\cdot5=$

$=36+40=76$

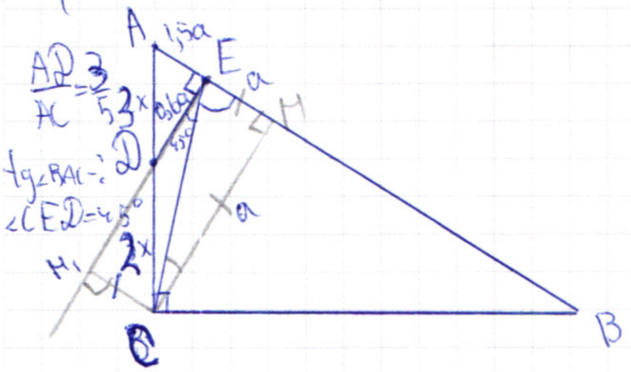
$\sqrt{D}=2\sqrt{19}$

$x_{1/2}=\frac{-6\pm2\sqrt{19}}{4}=\frac{-3\pm\sqrt{19}}{2}$

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

$y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2}$

$2x^2+y^2+y-2x-2x-5y+3=0$



$\angle ACE+\angle CAE=45°$

$\boxed{N4}$

а) $\frac{AD}{AC}=\frac{3}{5}$

$\angle B+\angle ECB=135°$

$5AD=3(AD+DC)$

$2AD=3DC$

$tg\angle BAC=\frac{DE}{AE}=\frac{BC}{AC}$

$\Delta DAE\sim\Delta CAH$

$\frac{3}{5}=\frac{DA}{CA}=\frac{DE}{CH}=\frac{AE}{AH}$

$5AE=3AH=3(AE+CH)$

$2AE=3CH$

$\boxed{AE=1{,}5CH}$ и $\boxed{DE=\frac{3}{5}CH=0{,}6CH}$

$\boxed{tg\angle BAC=\frac{DE}{AE}=\frac{0{,}6CH}{1{,}5CH}=\frac{6}{15}}$

б) $AC=\sqrt{29}$; S_{CED}-?

$AD=\frac{3}{5}\sqrt{29}$;

$AD^2=DE^2+AE^2=\frac{9}{25}CH^2+\frac{9}{4}CH^2=\frac{36+225}{100}=\frac{261}{100}CH^2$

$261 \,|\, 9$
$18 \,|\, 29$
81

$\frac{\cancel{9}\cdot\cancel{29}}{\cancel{25}}=\frac{\cancel{261}}{\cancel{100}}CH^2$

$1=\frac{CH^2}{4} \Rightarrow \boxed{CH=2}$ Высота ΔCED на сторону DE равна $CH_1=CH=2$, т.к. CH_1EH - прямоуг. Тогда $S_{CED}=\frac{1}{2}DE\cdot CH=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}CH^2=\frac{3}{10}\cdot 4=\frac{6}{5}=1{,}2$

Ответ: $tg\angle BAC=\frac{6}{15}$; $S_{CED}=1{,}2$

N5

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

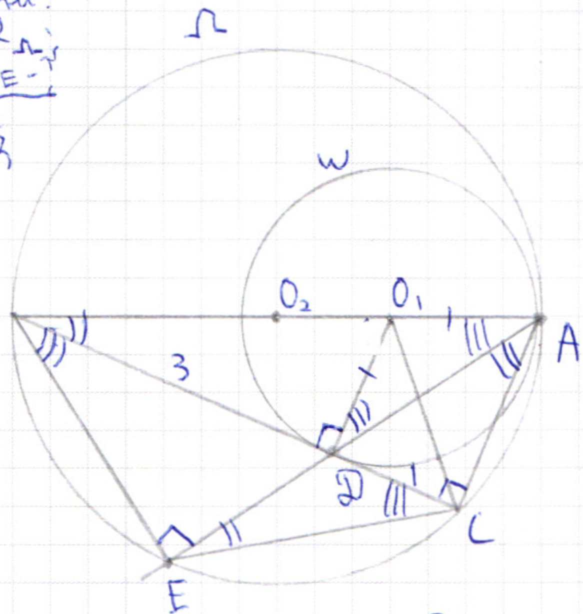
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

Найти: $R_\omega; R_\Omega$; S_{BACE} - ?

$CD=1$

$BD=3$



$R_\Omega(R_\Omega-2R_\omega)=3$

$\triangle BDE \sim \triangle ADC$ $\angle DAC + \angle ADE = 90°$

$\frac{BD}{AD} = \frac{DE}{DC}$ $\angle DAC + \angle$

$\triangle BDA \sim \triangle EDC$

$\frac{BD}{ED} = \frac{DA}{DC}$

$\frac{3}{ED} = DA$

$AD - l_{\triangle BAC} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} = 3 \Rightarrow \sin\angle ABC\ \frac{AC}{AB} = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos\angle ABC = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$AB = 2R_\Omega = \frac{BC}{\cos\angle ABC} = \frac{4\cdot 3}{2\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$ $\frac{R_\omega}{BD} = tg\angle ABC = \frac{\sin\angle ABC}{\cos\angle ABC} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

$\boxed{R_\Omega = \frac{3\sqrt{2}}{2}}$ $\boxed{R_\omega = BD\, tg\angle ABC = \frac{3\sqrt{2}}{4}}$

$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin\angle ABC = \frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{2}\cdot 4\cdot\frac{1}{3} = \boxed{2\sqrt{2}}$

$\cos 2\angle BAD = \frac{1}{3}$

$2\cos^2\angle BAD - 1 = \frac{1}{3}$

$\cos^2\angle BAD = \frac{2}{3} \Rightarrow \cancel{\cos\angle BAD} = \sin^2\angle BAD = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin\angle BAD = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$BE = AB\sin\angle BAD = 3\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{6}$

$S_{BEC} = \frac{1}{2}BE\cdot BC\cdot\sin\angle \overset{EBC}{\cancel{BAD}} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{6}\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{2}$

$S_{BACE} = S_{ABC} + S_{BEC} = 4\sqrt{2}$

Ответ: $R_\Omega = \frac{3\sqrt{2}}{2}$; $R_\omega = \frac{3\sqrt{2}}{4}$; $S_{BACE} = 4\sqrt{2}$

☑ черновик   ☐ чистовик   Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле)   (Нумеровать только чистовики)

№6

$2x^2-x-1 \le ax+b \le x+|2x-1|$

Если $x<\frac{1}{2}$, то $\begin{cases} ax+b \ge 2x^2-x-1 \\ ax+b \le 1-x \end{cases}$ $\begin{cases} (2-a)x^2-x-(1+b)\le 0 \\ (a+1)x \le 1-b \end{cases}$

Если $a>-1$, то: $\begin{cases} (2-a)x^2-x-(1+b)\le 0 \\ x \le \frac{1-b}{a+1} \end{cases}$

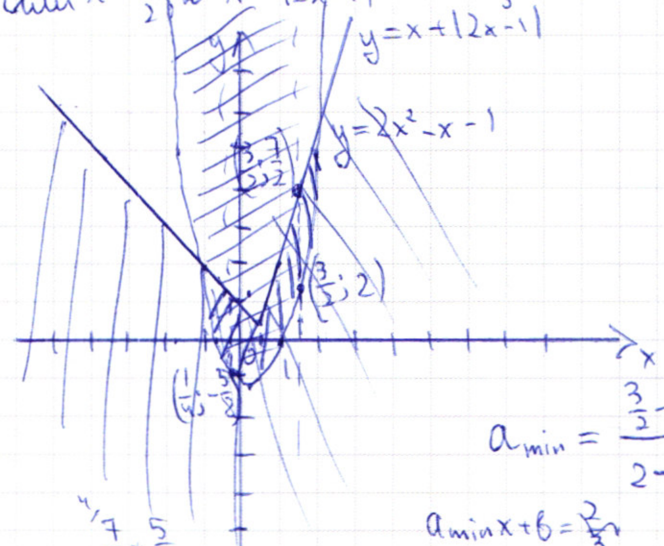
$D = 1+4(1+b)(2-a) = 1+8-4a+8b-4ab = 8b-4a-4ab+9 \ge 0$

Если $-1<a<2$, то ветви вверх.

$4b(a-2) \le -4a-9$

$4b \ge \frac{-4a-9}{a-2} = \frac{4a+9}{2-a}$

Если $x<\frac{1}{2}$, то $x+|2x-1| = 1-x$; Если $x \ge \frac{1}{2}$, то $x+|2x-1| = 3x-1$



x	0	1	-1	2	-2
y	-1	0	2	5	9

$2x^2-x-1$

$x_0 = \frac{1}{4}$

$y_0 = \cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{16}_8} - \frac{1}{4} - 1 =$

$= \frac{1}{8} - \frac{2}{8} - \frac{8}{8} =$

$= -\frac{9}{8}$

$2\cdot\frac{9}{4} - \frac{3}{2} - 1 = 2$

$2\cdot\frac{1}{16} + \frac{1}{4} - 1 =$

$= \frac{1}{8} + \frac{2}{8} - \frac{8}{8} = \frac{-5}{8}$

$a_{min} = \frac{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}{2-\frac{1}{2}} = \frac{1}{1{,}5} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$

$a_{max} = \frac{\frac{7}{2}+\frac{5}{8}}{\frac{3}{2}+\frac{1}{4}} = \frac{33}{8}\cdot\frac{4}{7} = \frac{33}{14}$

$a_{min}x+b = \frac{2}{3}$

~~$a_{min}x+$~~

~~$\frac{1}{2} = a_{min}$~~

$\frac{1}{2} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} + b$

$b = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

$\frac{33}{14}\cdot\frac{1}{2} + b = \frac{1}{2}$

$-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 0$

$\frac{2}{3} \le a \le \frac{33}{14}$

$b = \frac{14}{28} - \frac{33}{28} = \frac{-19}{28}$

$\frac{33}{14}\cdot\frac{3}{2} - \frac{19}{28} = \frac{99-19}{28} = \frac{80}{28} = \frac{20}{7}$

$a_{max} = \frac{\frac{5}{2}+\frac{5}{8}}{\frac{3}{2}+\frac{1}{4}} = \frac{9}{8}\cdot\frac{4}{3} = \frac{3}{2}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)