МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

a, в, c – I, II и III член арифметической ~~прогр~~ прогрессии, тогда: ($k \neq 0$)

$a = a$

$b = ka$

$c = k^2a$

$d = k^3a$, где d – IV член арифметической прогрессии

(при $k=0$, $a=0$; $b=0$; $c=0$, и $d=0$, уравнение $0 \cdot x^2 - 0x + 0 = 0$ имеет бесконечное множество решений, в которое входит 0)

т.к. $ax^2 - 2bx + c = 0$ имеет корень d, то:

$d = \frac{2b + \sqrt{4b^2 - 4ac}}{2a}$ или $d = \frac{2b - \sqrt{4b^2 - 4ac}}{2a}$

$D = 4b^2 - 4ac = 4 \cdot (ka)^2 - 4 \cdot a \cdot k^2a = 4k^2a^2 - 4k^2a^2 = 0$,

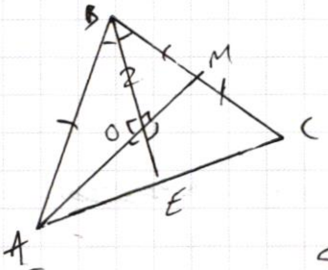
значит $d = \frac{2b \pm 0}{2a} = \frac{2ka}{2a} = k$, т.к. $d = k^3a$, то

$k^3a = k$, т.к. $k \neq 0$, то: $k^2a = 1$, а т.к. $c = k^2a$, значит $c = 1$

Ответ: $c = 1$

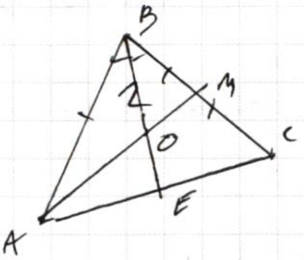
№2

Сначала проанализируем данный треугольник:



Дано:
ΔABC
BE-бис-са ~~[illegible]~~
AM-медиана
$BE \perp AM$

Пусть $BE \cap AM = O$, тогда $\angle ABO = \angle OBM$; BO-общая $\angle AOB = 90° = \angle BOM$, а значит $\Delta ABO = \Delta OBM$ (по стороне и двум прилежащим углам), значит $AB = BM = \frac{1}{2}BC$; заметим достаточность данного условия:



Дано:
ΔABC
BE-бис-са
AM-медиана
$AB = \frac{1}{2}BC = BM$

Пусть $BE \cap AM = O$, тогда $\angle ABO = \angle OBM$; OB общая сторона, $AB = BM$; значит $\Delta ABO = \Delta OBM$ (по 2-м сторонам и углу между ними), откуда $\angle BOM = \angle BOA$, а т.к. $\angle BOM$ и $\angle BOA$ — смежные, то $\angle BOM + \angle BOA = 180°$, значит $\angle BOM = \angle BOA = 90°$, откуда $BE \perp AM$

~~Пусть одна из сторон треугольника (не наибольшая) длиной a, тогда есть другая длиной $2a$~~

Тогда у искомых Δ будут стороны длиной a и $2a$ (где a - целое число и $a > 0$). Пусть 3-я сторона имеет длину c (c-целое)($c > 0$) тогда $3a + c = 900$, из ~~[illegible]~~ неравенства Δ:

$$\begin{cases} a < 2a + c \\ 2a < a + c \\ c < 3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < c \\ c < 3a \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Имеем систему ~~уравнения~~ уравнений и неравенств требующую решений в натуральных числах:

$$\begin{cases} 900=3a+c \\ c<3a \\ a<c \end{cases}$$

Рассмотрим $\begin{cases} 900=3a+c \\ a<c \end{cases} \Rightarrow 4a<900 \Leftrightarrow a<225,$

Пусть $a=225-x$, где x - целое и $x\geq 1$, тогда из $900=3a+c$ следует, что $c=225+3x$, т.к. $c<3a$, то

$225+3x<225\cdot 3-3x$

$6x<225\cdot 3$

$x<75$, т.е. $x\in [1;74]$

Значит всего 74 треугольника, не считая дважды посчитанных; проверим возможные варианты:

1) $\begin{cases} a=2a' \\ 2a=c' \\ c=a' \end{cases}$, где $a, 2a, c$ стороны одного, а $a'; 2a'; c'$ - другого;

Заметим, что этот вариант невозможен: т.к. $a<c$, то $a'>a$ (т.к. $a'=c$), значит $a<2a' \Rightarrow a\neq 2a'$ противоречие г) $\begin{cases} a = c' \\ 2a = a' \\ c = 2a' \end{cases}$; ~~заметим, что этот вариант невоз-можен; $a \ne c$, значит $a < c$ (т.к. $c' = a$), $a' \ne c'$, значит a'~~

Этот вариант невозможен, т.к. $a = 225 - x$, а $c' = 225 + 3x$ и т.к. $x \geq 1$, то $225 - x < 225 + 3x$, откуда $a \ne c'$;

Значит повторно посчитаных Δ нет :

Ответ: 74

№3

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x - 6y \geq 0 \\ x^2 - 12xy + 36y^2 = xy - 6y - x + 6 \\ x^2 - 12x + 36 + 2y^2 - 4y + 2 - 18 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \geq 6y \\ x^2 - 13xy + 6y + x + 36y^2 - 6 = 0 \\ (x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \geq 6y \\ x^2 - 9xy + 3x + 36y^2 - 4xy - 12y + 18y - 2x - 6 = 0 \\ (x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \geq 6y \\ (4y - x + 2)(9y - x - 3) = 0 \\ (x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} ① \begin{cases} x \geq 6y \\ -x + 4y + 2 = 0 \\ (x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18 \end{cases} \\ ② \begin{cases} x \geq 6y \\ 9y - x - 3 = 0 \\ (x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18 \end{cases} \end{array} \right.$$

Рассмотрим ①: $-x + 4y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$; подставим в $(x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18$:

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(x-6)^2 + \cancel{\ldots}$ $\quad 2\left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{2} - 1\right) = 18$

$(x-6)^2 + (x-6)^2 = 18 \Leftrightarrow (x-6)^2 = 9 \Leftrightarrow$

$\left[\begin{array}{l} x-6=3 \\ x-6=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=9 \\ x=3 \end{array}\right.$

Решим систему $\begin{cases} x > 6y \\ \left[\begin{array}{l} x=9 \\ x=3 \end{array}\right. \\ y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x > 6y \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=9 \\ y = \frac{9}{4} - \frac{2}{4} = \frac{7}{4} \end{cases} \\ \begin{cases} x=3 \\ y = \frac{3}{4} - \frac{2}{4} = \frac{1}{4} \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$; т.к. $6 \cdot y = \frac{7}{4} \cdot 6 = 10,5$; т.к. $10,5 > 9$, то

$\begin{cases} x > 6y \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=9 \\ y = \frac{7}{4} \end{cases} \\ \begin{cases} x=3 \\ y = \frac{1}{4} \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 6y \\ x = 3 \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$; т.к. $6y = \frac{1}{4} \cdot 6 = 1,5$, т.к. $1,5 < 3$, то

$\begin{cases} x > 6y \\ x = 3 \\ y = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$, т.е. $(x;y) = (3; \frac{1}{4})$

Рассмотрим (2): $9y - x - 3 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{9}x + \frac{1}{3}$, подставляем в $(x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18$:

$(x-6)^2 + 2\left(\frac{1}{9}x + \frac{1}{3} - 1\right)^2 = 18 \Leftrightarrow$

$81 \cdot (x-6)^2 + 2 \cdot 81 \left(\frac{1}{9}x + \frac{1}{3} - 1\right)^2 = 18 \cdot 81 \Leftrightarrow$

$81(x-6)^2 + 2 \cdot \left(x - \frac{2}{3} \cdot 9\right)^2 = 18 \cdot 81 \Leftrightarrow$

$81(x-6)^2 + 2 \cdot (x-6)^2 = 18 \cdot 81 \Leftrightarrow (x-6)^2 \cdot 83 = 81 \cdot 18 \Leftrightarrow$

$\left[\begin{array}{l} x = \sqrt{\frac{81 \cdot 18}{83}} + 6 \\ x = -\sqrt{\frac{81 \cdot 18}{83}} + 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 27\sqrt{\frac{2}{83}} + 6 \\ x = -27\sqrt{\frac{2}{83}} + 6 \end{array}\right.$

т.к. $y=\frac{1}{9}x+\frac{1}{3}$, то

$$\left[\begin{array}{l} (4)\begin{cases} x=27\sqrt{\frac{2}{83}}+6\\ y=3\sqrt{\frac{2}{83}}+1\end{cases}\\ (3)\begin{cases} x=-27\sqrt{\frac{2}{83}}+6 \\ y=-3\sqrt{\frac{2}{83}}+1\end{cases}\end{array}\right.$$; т.к. $x>6y$, то для (4):

$$27\sqrt{\frac{2}{83}}+6 \vee 6\cdot 3\sqrt{\frac{2}{83}}+6$$

$$9\sqrt{\frac{2}{83}} \vee 0$$

$9\sqrt{\frac{2}{83}}>0$, т.е. $x>6y$ (4) является решением

для (3):

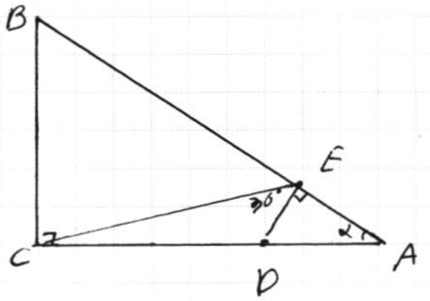
$$-27\sqrt{\frac{2}{83}}+6 \vee -6\cdot 3\sqrt{\frac{2}{83}}+6$$

$$-9\sqrt{\frac{2}{83}} \vee 0$$

$-9\sqrt{\frac{2}{83}}<0$, т.е. $x<6y$; (3) не является решением

Ответ: $(3;\frac{1}{4})$ и $\left(27\sqrt{\frac{2}{83}}+6;\ 3\sqrt{\frac{2}{83}}+1\right)=(x;y)$

№ 4



Дано:
ΔABC
$D\in AC$
$E\in AB$,
$C=90°$
$\frac{AD}{AC}=\frac{1}{3}$
$DE\perp AB$
а) $\angle BAC=?$
$\angle CED=30$
б) $AC=\sqrt{7}$
$S_{CED}=?$

Пусть $\angle BAC=\alpha$

$\angle A$ – общий;
$\angle DEA=\angle BCA$, значит
$\Delta CBA\sim\Delta EAD$ (по 2-м углам)
Т.к. $\frac{AD}{AC}=\frac{1}{3}$, значит $CD=2AD$

Т.к. $\angle BAC=\alpha$, то $\angle EDA=90°-\alpha$ (т.к. сумма $\angle\Delta=180°$)

$\angle EDC=180°-\angle EDA=90°+\alpha$ (св-во смежных $\angle$)

$\angle ECD=180°-\angle EDC-\angle CED=60°-\alpha$ (т.к. сумма $\angle\Delta=180°$)

По теореме синусов для ΔCED:

$\frac{\sin\angle CED}{CD}=\frac{\sin(60°-\alpha)}{DE}$, т.е. $\frac{DE}{2DA}=\frac{\sin(60°-\alpha)}{\sin 30}$ (=)

$\frac{1}{4}\cdot\frac{DE}{DA}=\sin(60°-\alpha)$; Из ΔDEA: $\frac{DE}{DA}=\sin\alpha$; откуда:

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{1}{4}\sin\alpha = \sin(60^\circ - \alpha) \Leftrightarrow \frac{1}{4}\sin\alpha = \sin 60 \cdot \cos\alpha - \sin\alpha \cdot \cos 60^\circ \Leftrightarrow$

$\left(\frac{1}{4} + \cos 60^\circ\right)\sin\alpha = \sin 60^\circ \cdot \cos\alpha$, т.е.

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin 60^\circ}{\frac{1}{4} + \cos 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{3}\cdot 2}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = tg\alpha,$$

т.к. $\angle BAC = \alpha$, то:

а) Ответ: $tg\, BAC = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

По св-ву Δ: Из ΔCEA: $\frac{S_{\Delta CED}}{S_{\Delta EAD}} = \frac{CD}{DA}$

(т.к. у них общая высота); откуда

$S_{\Delta CED} = S_{\Delta EAD}$

Пусть $DE = a$, $EA = b$, тогда из ΔDAE:

$\begin{cases} \frac{a}{b} = tg\alpha \\ DA^2 = a^2 + b^2 \end{cases}$ (из геометр. определения tg; по теореме Пифагора)

Т.к. $AC = \sqrt{7}$, то $DA = \frac{\sqrt{7}}{3}$ $\left(\frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}\right)$, значит:

$\begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ \frac{7}{9} = a^2 + b^2 \end{cases} \Leftrightarrow$ (т.к. $b \neq 0$) $\begin{cases} a = \frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot b \\ \frac{7}{9} = \left(\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 1\right) b^2 \end{cases}$, т.е.

$\begin{cases} b = \sqrt{\frac{\frac{7}{9}}{\frac{7}{3}}} \\ a = \frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ a = \frac{2}{3} \end{cases}$; по св-ву прямоуг. Δ:

$S_{\Delta DAE} = \frac{AE \cdot DE}{2} = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$, значит искомая

$S_{\Delta CED} = \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2\cdot\sqrt{3}}{9}$

б) Ответ: $S_{\Delta CED} = \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$

~~Задача~~

№ 6

$8x-6|2x-1| \leq ax+b \leq -8x^2+6x+7$

~~Построим~~ Рассмотрим график $y=8x-6|2x-1|$:

~~при~~ $2x-1>0 \Leftrightarrow 2x>1 \Leftrightarrow x>\frac{1}{2}$

1) При $x>\frac{1}{2}$:

$y=8x-12x+6=-4x+6$ — прямая зависимость, график прямая

2) При $x\leq\frac{1}{2}$:

$y=8x+12x-6=20x-6$ прямая зависимость, график прямая

Заметим при $x=\frac{1}{2}$, $y=4$ (переломная точка);

~~при $x=-\frac{1}{2}$; $y=-4\cdot-\frac{1}{2}+6=8$; при $x=1$~~

при $x=-\frac{1}{2}$; $y=20\cdot-\frac{1}{2}-6=-16$; при $x=1$; $y=-4+6=2$,

$f(x)=ax+b$ — прямая зависимость, график прямая

эта прямая должна лежать выше $8x-6|2x-1|$ или касаться (т.к. $8x-6|2x-1|\leq ax+b$), т.е:

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \frac{1}{2}a+b\geq 4 \\ \begin{cases} ax+b\geq 20x-6 \\ ax+b\geq -4x+6 \end{cases} \\ x\in[-\frac{1}{2};1] \end{cases} \end{array}\right.$

$\begin{cases} ax+b\geq 4 \\ \begin{cases} -\frac{1}{2}a+b\geq -16 \\ \frac{1}{2}a+b\geq 4 \end{cases} \\ \begin{cases} a+b\geq 2 \\ \frac{1}{2}a+b\geq 4 \end{cases} \\ x\in[-\frac{1}{2};1] \end{cases}$

Рассмотрим график $-8x^2+6x+7$:

$y=-8x^2+6x+7$ — парабола, ветви направлены вниз

вершина имеет координаты $\begin{cases} y=\frac{47}{8} \\ x=\frac{3}{8} \end{cases}$ $(x\in[-\frac{1}{2};1])$;

при $x=1$; $y=5$; при $x=-\frac{1}{2}$; $y=2$, сл-но не пересекается с осью Ox на отрезке $x\in[-\frac{1}{2};1]$ и $y>0$, при $[-\frac{1}{2};1]$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Значит: $ax+b \le -8x^2+6x+7 \iff$

$$\begin{cases} x\in[-\frac{1}{2};1] \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} ax+b\le cx+d \\ c+d=5 \\ -\frac{1}{2}c+d=2 \end{cases} \\ ax+b\le 2 \end{array}\right. \end{cases} \iff \begin{cases} x\in[-\frac{1}{2};1] \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} ax+b\le cx+d \\ c=2 \\ d=3 \end{cases} \\ ax+b\le 2 \end{array}\right. \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} ax+b\le 2x+3 \\ ax+b\le 2 \end{array}\right. \\ x\in[-\frac{1}{2};1] \end{cases}$$

Значит решением

неравенства $8x-6|2x-1|\le ax+b\le -8x^2+6x+7$ является система:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} ax+b\ge 4 \\ \begin{cases} -\frac{1}{2}a+b\ge 16 \\ \frac{1}{2}a+b\ge 4 \end{cases} \\ \begin{cases} a+b\ge 2 \\ \frac{1}{2}a+b\ge 4 \end{cases} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} ax+b\le 2x+3 \\ ax+b\le 2 \end{array}\right. \\ x\in[-\frac{1}{2};1] \end{cases} \iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -\frac{1}{2}a+b\ge 16 \\ \frac{1}{2}a+b\ge 4 \end{cases} \\ \begin{cases} a+b\ge 2 \\ \frac{1}{2}a+b\ge 4 \end{cases} \end{array}\right. \\ \begin{cases} a+b\le 5 \\ -\frac{1}{2}a+b\le 2 \end{cases} \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -\frac{1}{2}a+b\ge 16 \\ \frac{1}{2}a+b\ge 4 \\ a+b\le 5 \\ -\frac{1}{2}a+b\le 2 \end{cases} \\ \begin{cases} a+b\ge 2 \\ \frac{1}{2}a+b\ge 4 \\ -\frac{1}{2}a+b\le 2 \\ a+b\le 5 \end{cases} \end{array}\right. \iff$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$-9xy+x^2+3x$

$36y^2-4xy-12y$

$18y-2x-6$

$(-x+4y+2)(9y-x-3)=0$

$(4y-x+2)(9y-x-3)=0$

$\left[\begin{array}{l} y=\frac{1}{4}x-\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{9}x+\frac{1}{3}\end{array}\right.$

$\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}x$ $\quad$ $\frac{1}{9}x+\frac{1}{3}=\frac{1}{6}x$

$\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)x=\frac{1}{2}$ $\quad$ $\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{9}\right)x=\frac{1}{3}$

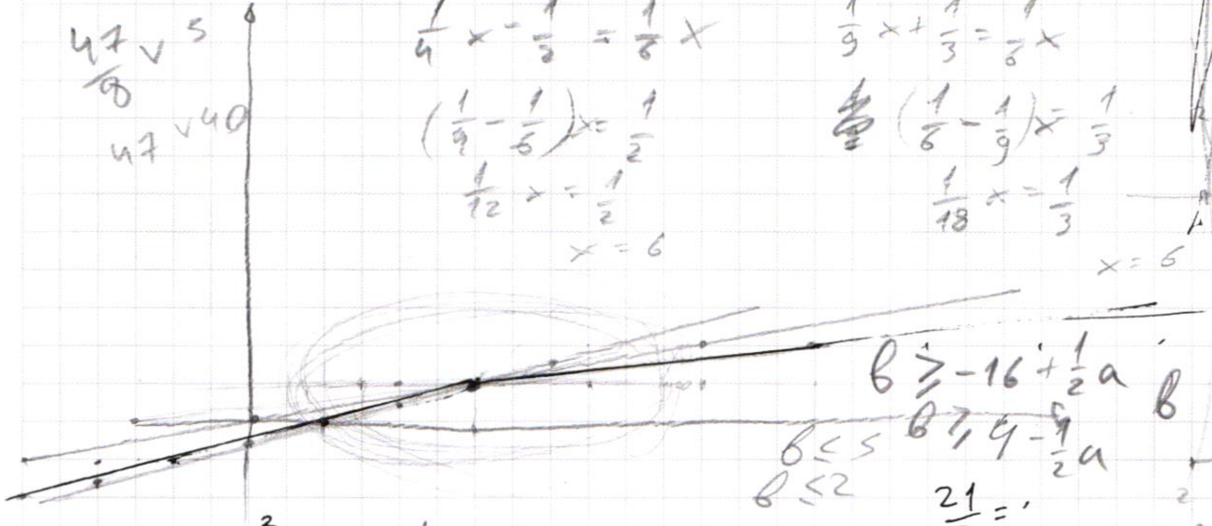
$\frac{1}{12}x=\frac{1}{2}$ $\quad$ $\frac{1}{18}x=\frac{1}{3}$

$x=6$ $\quad$ $x=6$

$47\vee 5$

$\frac{47}{9}$

$47\vee 40$



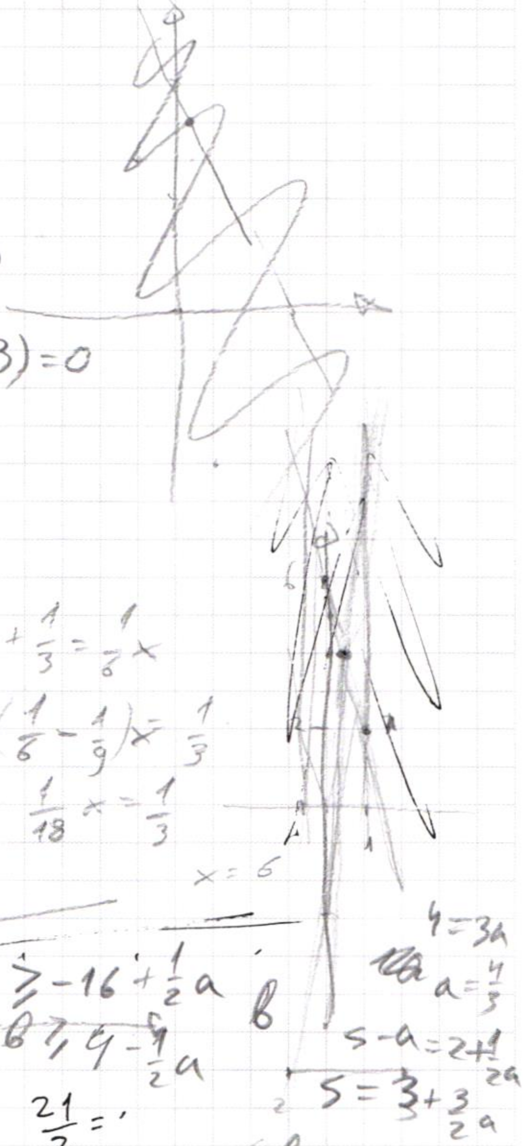
$b\geq -16+\frac{1}{2}a$

$b\geq 4-\frac{1}{2}a$

$b\leq 5$

$b\leq 2$

$\frac{21}{2}=$



$4=3a$

$a=\frac{4}{3}$

$5-a=2+\frac{1}{2}a$

$5=3+\frac{3}{2}a$

$b\leq 5-a$

$(x-6)^2+2\left(\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}-1\right)^2=18$

$(x-6)^2+(x-6)^2=18$ $\quad$ $b\leq 2+\frac{1}{2}a$

$2(x-6)^2=18$ бесконечно

$\frac{3}{2}$

$\frac{1}{2}$ $\quad$ $\frac{2}{3}\cdot 9=6$

$x-6=-3\sqrt{2}$ $\quad$ $b\leq 3$

$x-6=3\sqrt{2}$ $\quad$ $b\leq 3$

$\boxed{x=-3\sqrt{2}+6}$

$x=3\sqrt{2}+6$ ×

$(x-6)^2+2\left(\frac{1}{9}x+\frac{1}{3}-1\right)^2=18$

$(x-6)^2+\left(\frac{4}{9}x+\frac{16}{3}\right)^2=18$

$81(x-6)^2+2(\ldots)^2=18\cdot 81$

$x-6$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$81(x-6)^2+2(x^2-6)^2=18\cdot 81$$

$$(x-6)^2=\frac{18\cdot 81}{83}=(9\cdot 3)^2\cdot\left(\sqrt{\frac{2}{83}}\right)^2$$

$\frac{7}{9}=\frac{7}{3}b^2$

$b^2=\frac{1}{3}$

$b=\frac{1}{\sqrt3}$

$x-6=27\sqrt{\frac{2}{83}}$

$x-6=-27\sqrt{\frac{2}{83}}$

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

$\sin(\alpha+\beta)$

$\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$

$S_{CED}=2S_{DEA}$

$DA=\frac{\sqrt7}{3}$

$\frac{a\cdot b}{2}=\frac{2\sqrt3}{3}\cdot\frac{1}{3}$

$\frac{4\sqrt3}{9}$

$x=27\sqrt{\frac{2}{83}}$

$x=-27\sqrt{\frac{2}{83}}+6$

$\sin(\alpha-\beta)$

$\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha$

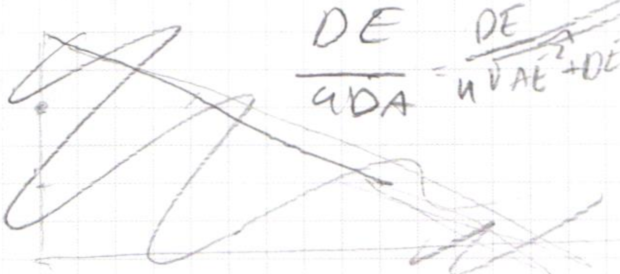
$\begin{cases}\frac{7}{9}=a^2+b^2\\ \frac{a}{b}=\frac{2\sqrt3}{3}\end{cases}$ $a=\frac{2\sqrt3}{3}b$

$\frac{\sqrt3}{3\cdot 8\sqrt3}$

$AD:DC=1:2$

$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{DE^2}{AE^2+DE^2}}$

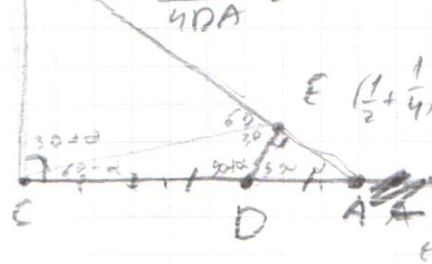
$\frac{DE}{4DA}=\frac{DE}{4\sqrt{AE^2+DE^2}}$



$\frac{1}{4DA}=\frac{\sin(60-\alpha)}{DE}$

$\frac{DE}{4DA}=\sin(60-\alpha)$

$\frac{DE}{4DA}=\sin 60\cdot\cos\alpha-\sin\alpha\cos 60$



$E\ \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\sin\alpha=\frac{\sqrt3}{2}\cos\alpha$

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{\sqrt3}{2}}{\frac{3}{4}}=\frac{2\sqrt3}{3}$

$\frac{BC}{CA}=\frac{DE}{AE}=?$

$\angle CED=30^\circ$

$\frac{\sin\alpha}{DE}=\frac{\sin(90-\alpha)}{EA}$

$AD=\sqrt{AE^2+ED^2}$

$\frac{\sin 30}{CD}=\frac{\sin(60-\alpha)}{DE}$

$CD=\frac{2}{3}\sqrt7$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 $ax^2-2bx+c=0$ $\quad d=\frac{2b\pm\sqrt{4b^2-4ac}}{2a}=\frac{b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}$

$b=ka$
$c=k^2a$
$d=k^3a$

$k^3a=\frac{ka\pm\sqrt{k^2a^2-k^2a^2}}{a}=k$

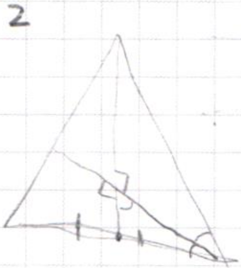
$ak^2=1=c$

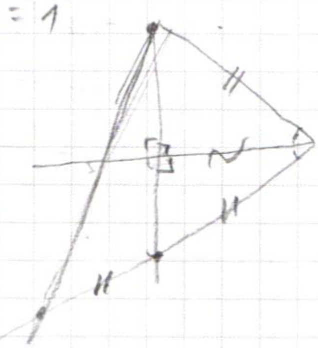
$c=1$

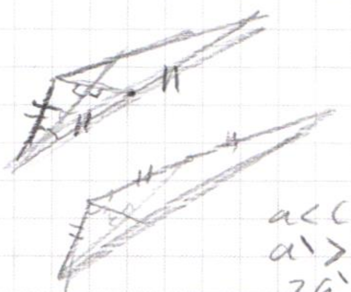
$225-x=225+3x$

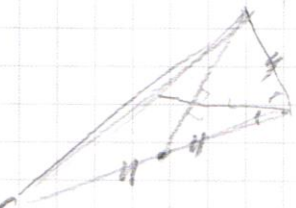
$a;2a;c$

№2









$a<c$
$a'>a$
$2a'>a$

$\begin{cases}a=2a'\\2a=c'\\c=a'\end{cases}$

$\begin{cases}a=c'\\2a=a'\\c=2a'\end{cases}$

$\begin{cases}900=3a+c\\2a<a+c\\c<3a\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}900=3a+c\\a<c\\c<3a\end{cases}$

$a<c \quad a'<c'$
$c<3a$

$a<2a+c$

$\frac{900}{4}=\frac{450}{2}=200+25=225$

$c'<c$
$c'<3a$
$a'<c'$
$a'<3a$
$a'<c$

$a<225$

$a=225-x$
$c=225+3x$

$225+3x<(225-x)\cdot 3$

$3x<225\cdot 2-2x$

$5x<225\cdot 2$

$x<90$

$a=225+x$

89 треугольников $c=225-3x$

$225=45\cdot 5=$
$15\cdot 5\cdot 3=$
$(50+25)\cdot 3=75\cdot 3$

$225+x<225-3x$

$225+4x<225$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№3

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-6y\geq 0 \\ x^2-12yx+36y^2=xy-6y-x+6 \\ x^2-12x+36+2y^2-4y+2-18=0 \end{cases}$$

$x>6y$

$x^2-13xy+6y+x+36y^2-6=0$

$(x-6)^2+2(y-1)^2=18=(3\sqrt{2})^2$

$D=36+8\cdot4\cdot7=4(9+8\cdot7)=4\cdot65\cdot4$

$-8x^2+6x+7=$ $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{65}}{-8}$

$-8\left(x^2+\frac{3}{4}x+\frac{7}{8}\right)=-8\left(x^2+\frac{3}{4}x+\frac{9}{64}\right)$

$\begin{cases} y=\frac{47}{8} \\ x=-\frac{3}{8} \end{cases}$

$3-\sqrt{65} \vee -4$

$7 \vee \sqrt{65}$

$7<\sqrt{65}$

$y=-8+6+7=5$

$b\leq 2+\frac{1}{2}a$

$a+2+\frac{1}{2}a\leq 5$

$\frac{3}{2}a\leq 3$

$a\leq 2$

$\begin{cases} a+b\leq 5 \\ b-\frac{1}{2}a\leq 2 \end{cases}$

$x^2+2y^2=1$

$\dfrac{3-\sqrt{65}}{8} \vee -\frac{1}{2}$

$y<\frac{1}{6}x$

$\dfrac{-3-\sqrt{65}}{-8}=\dfrac{3+\sqrt{65}}{8} \vee 1$

$3+\sqrt{65}\vee 8$

$\sqrt{65}\vee 5$

$x^2-6xy-7xy+42y$

$(x-6)(x-7y)$

$\dfrac{3-\sqrt{65}}{8} \vee 1$

$3+\sqrt{65}\vee 8$

$x^2-13x+6-6+x+36=0$

$x^2-12x+36=0$

$x=6$

$y=1$

$x^2-13xy+36y^2$

$x^2-9xy-4xy+36y^2$

$(x-9)(x-4y)$

$6y+x-6$

$(6y-x)$

$(5y-x+1)$

$(4y-x+2)$

$(7y-x-1)$

$(9y-x-3)$

$x-9\quad +6y+3$

$x-4y+16y-6$

$2+3=5$

$-\frac{1}{2}\cdot2+3=3-1=2$

$x^2-9xy+3x$

$36y^2-4xy-12y$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)