МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$\because : a, b, c, x;\ q$

1) Найдём корни уравнения $ax^2-2bx+c=0$

$$D=(-2b)^2-4ac=4b^2-4ac=4(b^2-ac)$$

$$b=\sqrt{ac} \Rightarrow ac=b^2 \Rightarrow D=0$$

$x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{2b\pm 0}{2a}=\frac{b}{a}=q \Rightarrow$ четвертый член геометрической прогрессии равен её знаменателю.

2) $x=q$

$$c=\frac{x}{q}=\frac{q}{q}=1$$

Ответ: $c=1$.

№4

Дано:

$\triangle ABC$

$\angle C=90^\circ$

т. $D\in AC$

т. $E\in AB$

$AD:AC=1:3$

$DE\perp AB$

$\angle CED=30^\circ$

$S_{AC}=\sqrt{7}$

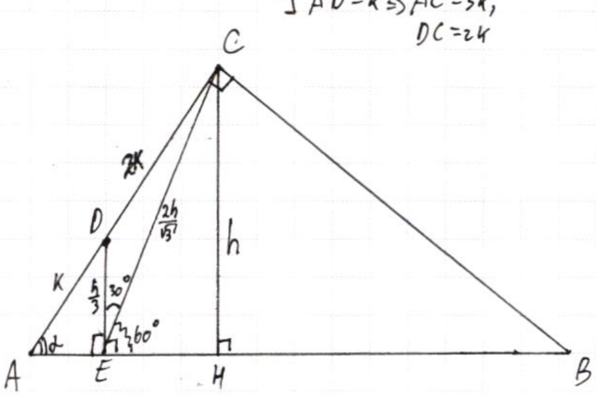
Найти:

а) $tg\angle BAC$

б) $S_{\triangle CED}$

Решение:

$\exists\ AD=k \Rightarrow AC=3k,\ DC=2k$



① Проведём CH - h высоту треугольника из т. C

② $\angle CEH=\angle DEH-\angle DEC=60^\circ$

$$CE=\frac{CH}{\sin\angle CEH}=\frac{h}{\sin 60^\circ}=\frac{2\sqrt{3}h}{3}$$

③ $\triangle ADE$ и $\triangle ACH$

1. $\angle A$ - общий
2. $\angle AED=\angle AHC=90^\circ$

$\Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle ACH$ (по двум соответственным углам) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AD}{AC}=\frac{DE}{CH} \Rightarrow DE=\frac{1}{3}h$

④ $\triangle CED$: $DC^2=DE^2+EC^2-2DE\cdot EC\cdot\cos\angle CED$ (по т. cos)

$$(2k)^2=\frac{h^2}{9}+\frac{4h^2}{3}-2\cdot\frac{h}{3}\cdot\frac{2h}{\sqrt{3}}\cdot\cos 30^\circ$$

$$4k^2=\frac{h^2}{9}+\frac{4h^2}{3}-\frac{2h^2}{3};\quad 4k^2=\frac{7h^2}{9} \Rightarrow k=\frac{\sqrt{7}h}{6}$$

☐ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

⑤ ΔADE: $AD^2 = AE^2 + DE^2$ (по Т Пифагора)

$\frac{7h^2}{36} = AE^2 + \frac{h^2}{9}$

$AE^2 = \frac{3h^2}{36}$

$AE = \frac{\sqrt{3}h}{6}$

$tg\alpha = \frac{DE}{AE} = \frac{\frac{h}{3}}{\frac{\sqrt{3}h}{6}} = \frac{6h}{3\sqrt{3}h} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

⑥ 1. $AC = \sqrt{7} \Rightarrow DC = \frac{2}{3}AC = \frac{2}{3}\sqrt{7}$

$2k = DC \Leftrightarrow 2k = \frac{2}{3}\sqrt{7} \Rightarrow k = \frac{\sqrt{7}}{3}$

$k = \frac{\sqrt{7}h}{6} \Rightarrow \frac{\sqrt{7}h}{6} = \frac{\sqrt{7}}{3} \Rightarrow h = 2 \Rightarrow DE = \frac{2}{3}$; $CE = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

2. ~~$S_\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p}$~~

$S_\Delta = \frac{1}{2}ab\sin\sigma$

$S_{\Delta CED} = \frac{1}{2} \cdot DE \cdot EC \cdot \sin\angle DEC = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$ ед^2

Ответ: а) $tg\angle BAC = \frac{2\sqrt{3}}{3}$; б) $S_{\Delta CED} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$ ед^2

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} & (1) \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 & (2) \end{cases}$$

① (1): $x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6}$

$x-6-6y+6=\sqrt{y(x-6)-(x-6)}$

$(x-6)-6(y-1)=\sqrt{(x-6)(y-1)}$ $\quad D:\ (x-6)(y-1)\geq 0$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geq 6\\ y\geq 1\end{cases}\\ \begin{cases}x\leq 6\\ y\leq 1\end{cases}\end{array}\right.$

З// $n=\sqrt{x-6}$; $m=\sqrt{y-1}$; D: $n\geq 0$, $m\geq 0$

$n^2-6m^2=nm$

$n^2-n\cdot m-6m^2=0$

$n=\dfrac{m\pm\sqrt{m^2+4\cdot 6m^2}}{2}=\dfrac{m\pm 5m}{2}$ $\quad \left[\begin{array}{l} n_1=-2m \text{ — т.к. } n\geq 0 \text{ и } m\geq 0, \text{ то } n_1=-2m \text{ не удовлетворяет области допустимых значений} \\ n_2=3m \end{array}\right.$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow n=3m\ (3)$

~~Возвращаемся к замене~~

② (2): $x^2+2y^2-12x-4y+20=0$

$(x-6)^2+2(y-1)^2=18$

$n^4+2m^4=18\ (4)$

③ (3) в (4): $81m^4+2m^4=18 \Rightarrow m^4=\dfrac{18}{83} \Rightarrow m=\sqrt[4]{\dfrac{18}{83}},\ n=3\sqrt[4]{\dfrac{18}{83}}$

④ Возвращаемся к замене

$$\begin{cases}\sqrt{x-6}=3\sqrt[4]{\frac{18}{83}} \ |^2 \\ \sqrt{y-1}=\sqrt[4]{\frac{18}{83}} \ |^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-6=9\sqrt[2]{\frac{18}{83}} \\ y-1=\sqrt[2]{\frac{18}{83}}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=6+27\sqrt[2]{\frac{2}{83}} \text{ (уд. D)} \\ y=1+3\sqrt[2]{\frac{2}{83}} \text{ (уд. D)}\end{cases}$$

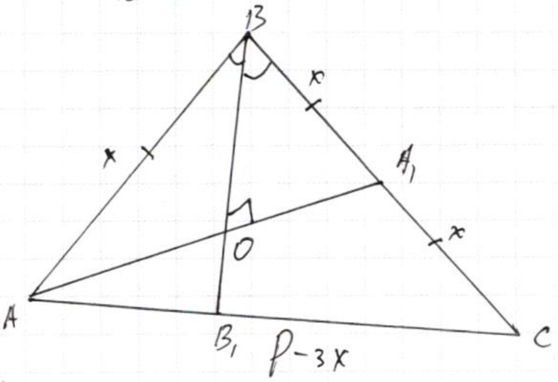
Ответ: $x=6+27\sqrt[2]{\frac{2}{83}}$; $y=1+3\sqrt[2]{\frac{2}{83}}$

№ 2

Дано:
$\triangle ABC$
$P_{\triangle} = 900$
б - BB_1
m - AA_1
$BB_1 \perp AA_1$

Найти:
кол-во треугольников

Решение:



① $\triangle ABA_1$:

$BO - h, б \Rightarrow \triangle ABA_1$ - равнобедренный $\Rightarrow AB = A_1B = x$

② $\triangle ABC$: $AB = x$, $BC = 2x$, $AC = P - AB - BC = P - 3x$

$$\begin{cases} AB < BC + AC \\ BC < AB + AC \\ AC < AB + BC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < P - x \\ 2x < P - 2x \\ P - 3x < 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P > 2x \\ P > 4x \\ P < 6x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x < \frac{P}{2} \\ x < \frac{P}{4} \\ x > \frac{P}{6} \end{cases} \Rightarrow x \in \left(\frac{P}{6}; \frac{P}{4}\right)$$

$$x \in (150; 225) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ длина стороны AB - число от 151 до 224 — всего $(224 - 151 + 1) = 74$ варианта

Ответ: 74.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

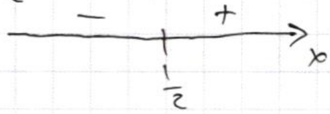
№6

$x\in[-\frac{1}{2};1]$

① $8x-6|2x-1|\le ax+b$

$2x-1=0$

$x=\frac{1}{2}$



1) $x\ge\frac{1}{2}$: $8x-12x+6\le ax+b$

$x\ge\frac{6-b}{4+a}$; $\frac{6-b}{4+a}\le\frac{1}{2}\Rightarrow a+2b\ge8$
$a\ne-4$ $\quad a\ne-4$

2) $x<\frac{1}{2}$: $8x+12x-6\le ax+b$

$x\le\frac{6+b}{20-a}$; $\frac{6+b}{20-a}\ge\frac{1}{2}\Rightarrow a+2b\ge8$
$a\ne20$ $\quad a\ne20$

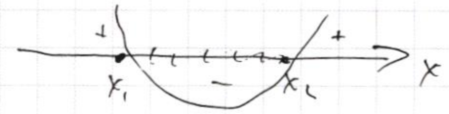
Т.к. неравенство должно выполняться для всех $x\in[-\frac{1}{2};1]$, то в первом неравенстве $\frac{6-b}{4+a}$ – должно быть максимум $\frac{1}{2}$, чтобы все $x\in[\frac{1}{2};1]$ делали неравенство истинным, а $\frac{b+6}{20-a}$ – минимум $\frac{1}{2}$, чтобы все $x\in[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}]$ входили в решение неравенства

② $ax+b\le-8x^2+6x+7$

$8x^2+(a-6)x+(b-7)\le0$

1. $f(x)=8x^2+(a-6)x+(b-7)$
$a=8>0\Rightarrow$ ветви ↑

2. Нули $f(x)$: $x=\frac{6-a\pm\sqrt{(a-6)^2-32(b-7)}}{16}$

3. 

$x\in[x_1;x_2]$

Т.к. $x\in[-\frac{1}{2};1]$ по условию, то:

$$\begin{cases} x_1\le-\frac{1}{2} & (1)\\ x_2\ge1 & (2)\end{cases}$$

(1): $\frac{6-a-\sqrt{(a-6)^2-32(b-7)}}{16}\le-\frac{1}{2}\;\Big|:(-\frac{1}{2})<0$

$a-6+\sqrt{(a-6)^2-32(b-7)}\ge8$

$\sqrt{(a-6)^2-32(b-7)}\ge14-a\;\Big|^2$

$8(2a-20)-32b+32\cdot7\ge0\;\Big|:16>0$

$a-10-2b+14\ge0$

$a-2b\ge-4$

$2b-a\le4$

(2): $\frac{6-a+\sqrt{(a-6)^2-32(b-7)}}{16}\ge1$

$\sqrt{(a-6)^2-32(b-7)}\ge a+10\;\Big|^2$

$(2a+4)\cdot16+32b-32\cdot7\le0\;\Big|:32>0$

$a+2+b-7\le0$

$a+b\le5$

$$\begin{cases} a+2b\geq 8 & (1)\\ a+b\leq 5 & (2)\\ 2b-a\leq 4 & (3)\\ a\neq -4 \\ a\neq 20 \end{cases}$$

1. Рассмотрим (1) и (2): $a+b\leq 5$, но при увеличении данного числа на b оно становится больше либо равно восьми $\Rightarrow$
$\Rightarrow b\geq 3$ ($b=3$ минимальное при $a+b=5$)

2. Рассмотрим (1) и (3) аналогично при увеличении $(2b-a)$ на $2a$ оно становится удовлетворять (1) условию $\Rightarrow 2a\geq 4 \Rightarrow a\geq 2$

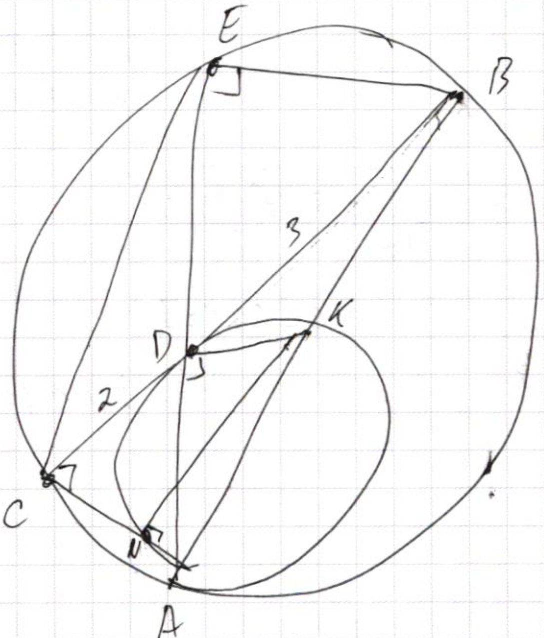
3. Но (2) условие истинно только при минимальных a и b $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ пара одна $(a;b)=(2;3)$

Ответ: $(2;3)$

№5

∃ r – радиус ω

R – радиус Ω



① $\angle ACB = \angle AEB = 90°$ опираются на диаметр $2R$
$\angle ANK = \angle ADK = 90°$ – опираются на диаметр $2r$

② $BD^2 = BK\cdot AB$ (по Т о касательной и секущей)
$BK = 2(R-r)$
$AB = 2R$
$\Rightarrow R(R-r) = \frac{9}{4} \,|: R^2$ (1)

$\frac{R-r}{R} = \frac{9}{4R^2}$ (2)

③ $\triangle ACB \sim \triangle ANK$ (по 2 углам $\angle ACB = \angle ANK = 90°$, $\angle A$ – общ.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AN}{AC} = \frac{AK}{AB} = \frac{r}{R} \Rightarrow AN = \frac{r}{R}AC$

$\frac{R-r}{R} = \frac{9}{4R^2}$ (из (1))

④ $CD^2 = CN\cdot AC$ (по Т о кас. и сек.) $4 = (AC-AN)\cdot AC \Rightarrow AC^2\left(1-\frac{r}{R}\right) = 4 \Rightarrow AC^2 = \frac{16R^2}{9}$

$AC = \frac{4R}{3}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(5) $\triangle ACB$

$AB^2 = AC^2 + BC^2$ (по Т Пифагора)

$4R^2 = \frac{16R^2}{9} + 5^2 \,|\cdot 9$

$20R^2 = 25\cdot 9$

$R = \sqrt{\frac{25\cdot 9}{20}} = \frac{3\sqrt{5}}{2} \Rightarrow r = R - \frac{9}{4R}$ (из (1)) $= \frac{3\sqrt{5}}{2} - \frac{3\sqrt{5}}{10} = \frac{12\sqrt{5}}{10}$

(6) $S_{ACEB} = S_{\triangle CEB} + S_{\triangle CAB}$

$S_{\triangle CAB} = \frac{AC\cdot AB}{2} = \frac{4R^2}{3} = \frac{4\cdot 9\cdot 5}{12} = 15$ ед^2

$S_{\triangle CEB} = S_{\triangle CDE} + S_{\triangle DEB} = \frac{2}{3}S_{\triangle DEB} + S_{\triangle DEB} = 1\frac{2}{3}S_{\triangle DEB}$

($S_{\triangle CDE} = \frac{2}{3}S_{\triangle DEB}$ (т.к. имеют общую высоту))

$S_{\triangle DEB} = \frac{DE\cdot EB}{2}$

$DE = \left(1 - \frac{r}{R}\right)AE$ (из подобия $\triangle ADK$ и $\triangle AEB$)

$AD = \frac{r}{R}AE$, а $DE = AE - AD$

$AD^2 = CD^2 + AC^2$ (по Т Пифагора $\triangle ACD$)

$AD = \sqrt{4 + 4\cdot 5} = 2\sqrt{6} \Rightarrow AE = \frac{R}{r}AD = \frac{5}{4}\cdot 2\sqrt{6} = \frac{5\sqrt{6}}{2} \Rightarrow DE = \frac{1}{5}\cdot\frac{5\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

$EB^2 + AE^2 = AB^2$ (по Т Пифагора $\triangle AEB$)

$EB = \sqrt{4R^2 - \frac{25\cdot 6}{4}} = \sqrt{9\cdot 5 - 37{,}5} = \sqrt{7{,}5}$

$S_{\triangle DEB} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{3\sqrt{5}}{4} \Rightarrow S_{\triangle CEB} = \frac{5}{4}\sqrt{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{ACEB} = 15 + \frac{5\sqrt{5}}{4}$ ед^2

Ответ: $r = \frac{12\sqrt{5}}{10}$; $R = \frac{3\sqrt{5}}{2}$; $S_{ACEB} = 15 + \frac{5\sqrt{5}}{4}$ ед^2

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1, №2

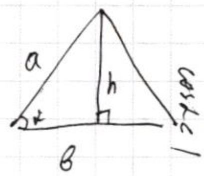
№1

$$x = \frac{2b \pm \sqrt{4b^2-4ac}}{2a} = \frac{b \pm \sqrt{b^2-ac}}{a} \Rightarrow = \frac{b}{a} = 9$$

$ac = b^2$

$c \cdot 9 = 9$

$c = 1$



$\cos\alpha > -1$

$5 - 4\cos\alpha \in (1; 9)$

$$4x^2 = \frac{h^2}{8} + \frac{3h^2}{4} - 2 \cdot \frac{\sqrt3 h^2}{6 \cdot 2} \cdot \frac{\sqrt3}{8}$$

$$\begin{cases} (x-6) - 6(y-1) = \sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18 \end{cases}$$

$13(x-6)(y-1) = 18 + 34(y-1)^2$

$34(y-1)^2 - 13(x-6)(y-1) - 18 = 0$

$D = 169(x-6)^2$

$$y - 1 = \frac{13(x-6) \pm \sqrt{169(x-6)^2 + 4\cdot18\cdot34}}{2\cdot34}$$

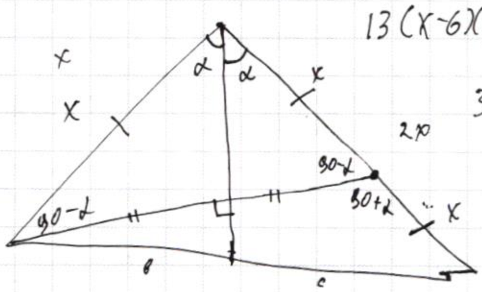
$D: (x-6)(y-1) \geq 0$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x \geq 6 \\ y \geq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x \leq 6 \\ y < 1 \end{cases}\end{array}\right.$$

$\frac{\sqrt{3}}{18}$

№2

$P = 900$



$$4x^2 = \frac{h^2}{8} + \frac{3h^2}{4} - \frac{h^2}{2}$$

$$4x^2 = \frac{h^2}{36}(4 + 27 - 18)$$

$$4x^2 = \frac{h^2}{36} \cdot 13$$

$$x = \frac{\sqrt{13}\, h}{12}$$

$(x-6) - 6(y-1)$

$x - 6y = \sqrt{y(x-6) - (x-6)}$

$x - 6y = \sqrt{(x-6)(y-1)}$

$(x-6y)^2 = (x-6)(y-1)$

$x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0$

$(x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18$

$(x-6)^2 + 2(y-1)^2 - 18 = 0$

$x^2 - 12x + 36 + 2y^2 - 4y + 2$

$(x-6)^2 + 36(y-1)^2 - 12(x-6)(y-1) = (x-6)(y-1)$

$13(x-6)(y-1) = 34(y-1)^2 + 18$

$13(x-6) = 34(y-1)$

$13x = 34y + 44$

$$x = \frac{34y + 44}{13}$$

$\alpha \in (0; \pi)$

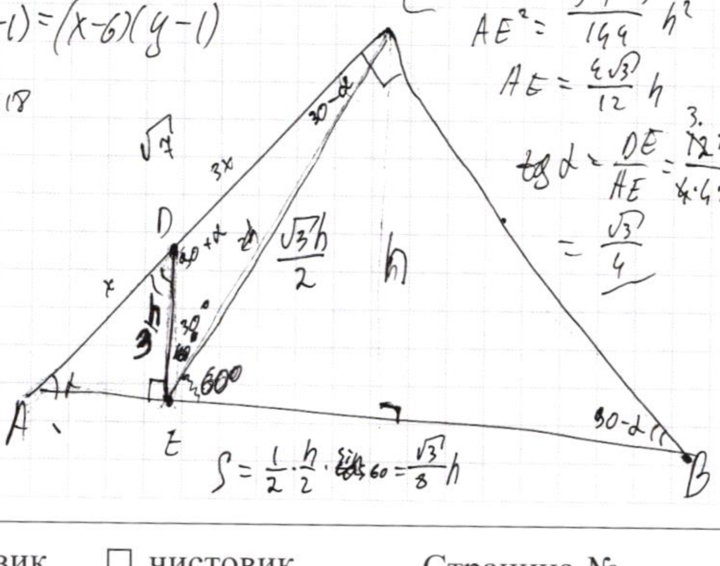
$$tg\alpha = \frac{DE}{AE} = \frac{BC}{AC}$$

$$\frac{h^2}{16} + AE^2 = \frac{57}{144}h^2$$

$$AE^2 = \frac{57-9}{144}h^2$$

$$AE = \frac{4\sqrt3}{12}h$$

$$tg\alpha = \frac{DE}{AE} = \frac{3 \cdot h}{4 \cdot 4\sqrt3} = \frac{\sqrt3}{4}$$



$$9x^2 = \frac{h^2}{16} + 4h^2 - 2 \cdot \frac{h^2}{2} \cdot \cos 60^\circ$$

$$9x^2 = \frac{64 + 1 - 8}{16}h^2 \quad x = \frac{\sqrt{57}}{12}h$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{2} \cdot \sin 60 = \frac{\sqrt3}{8}h$$

$x < 2x + a$

$2x < x + a$

$a > x$

$\sqrt{5 - 4\cos\alpha} > 1$

$a < 3x$

$\sqrt{5 - 4\cos\alpha} < 3$

$a = x\sqrt{5 - 4\cos 2\alpha}$

$a^2 = x^2(5 - 4\cos 2\alpha)$

$a^2 = 4x^2 + x^2 - 4x^2\cos 2\alpha$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

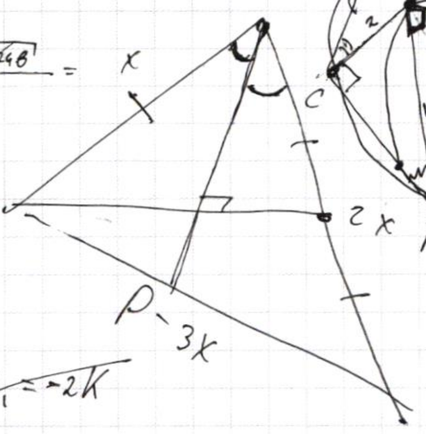
(1):

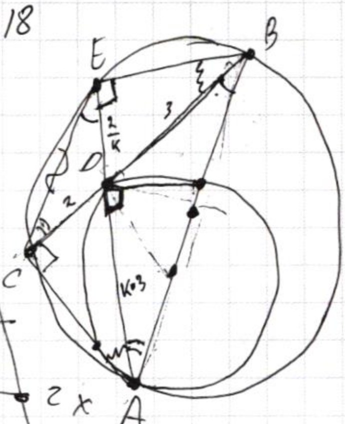
$(x-6)-6(y-1)=\sqrt{(x-6)(y-1)}$

~~$(x-6)^2+36(y-1)^2=13(x-6)(y-1)$~~

(2): $(x-6)^2+2(y-1)^2=18$

~~$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ a^2+2b^2=18 \end{cases}$~~ ~~$t^2-t\sqrt{b}-6b=0$~~ ~~$t=\frac{\sqrt{b}\pm\sqrt{b+24b}}{2}=$~~





3) $t=\sqrt{x-6}$ $\quad$ $k=\sqrt{y-1}$ $\quad$ $f(x)=[p_1/2]+[p_2/2]+\dots$ $\quad \frac{p-1}{2}$

$t^2-6k^2=tk$ $\quad \frac{1}{x}=$

$t^2-tk-6k^2=0$

$t=\frac{k\pm\sqrt{k^2+24k^2}}{2}=\frac{k\pm 5k}{2}$ $\quad \left[\begin{array}{l} \cancel{t_1=-2k} \\ t_2=3k \end{array}\right.$

$AE^2+BE^2=4R^2$

$3^2=2r(2R-2r)$

$\sqrt{x-6}=3\sqrt{y-1}$ $\quad x^2\sqrt{5-4\cos\alpha}$ $\quad 3^2=4r(R-r)$

$x-6=9(y-1)$ $\quad b=\sqrt{5-4\cos\alpha}$ $\quad b^2=5-4\cos\alpha$

$83(y-1)^2=18$ $\quad$ 83 $\quad r(R-r)=1{,}5^2$

$y-1=$ $\quad x(8-a)-6|2x-1|-b\le 0$

$x\ge\frac{1}{2}$: $8x-ax-12x+6-b\le 0$ $\quad x<\frac{1}{2}$: $8x-ax+12x-6-b\le 0$

$n=3m$ $\quad x\ge\frac{6-b}{4+a}$ $\quad x\le\frac{6+b}{20-a}$

$n^4+2m^4=18$

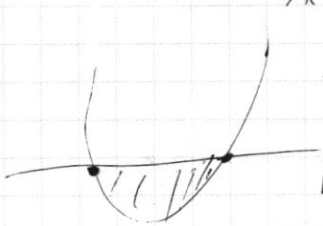
$a\notin\{-4;20\}$ $\quad$ 224 $\quad$ 150

$83m^4=18$ $\quad x=P-3x$ $\quad$ 4

$m=\sqrt[4]{\frac{18}{83}}$ $\quad (x-6)^2=\frac{18}{83}$

~~x~~ $\quad$ 3 $\quad$ 5

$n=3\sqrt[4]{\frac{18}{83}}$ $\quad (y-1)^2=\frac{18}{83}\cdot 3$



1 80 2

$ax+b\le-8x^2+6x+7$

$x_1;\ 2x_1;\ P-3x_1$ $\quad 8x^2+x(a-6)+(b-7)\le 0$ $\quad$ 3 80 5

$x=\frac{6-a\pm\sqrt{(a-6)^2-32(b-7)}}{16}$ $\quad 2x<P-2x$ $\quad P>4x$ $\quad \begin{cases} x<\frac{P}{4} \\ x>\frac{P}{6} \end{cases}$

$x_2;\ 2x_2;\ P-3x_2$ $\quad x_2=2x_1\Rightarrow x_1=\frac{x_2}{2}$ $\quad P-3x<3x$ $\quad P<6x$

$2x_2=4x_1=P-3x_1$ $\quad x_1=\frac{P}{7}$ $\quad x<P-x$ $\quad P>2x$ $\quad$ ~~$x<\frac{P}{2}$~~

$x_2=P-3x_1$

$2x_2=2P-6x_1=$ ~~$P-2x_1$~~ $\quad x\in(150;225)$ $\quad x=2y$

$\frac{P}{4}$ $\quad (P-3x)=x\sqrt{5-4\cos\alpha}$

$P=x(3+\sqrt{5-4\cos\alpha})$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

Дано:

окр. — Ω, R

окр. — ω, r

т. A — т. касания

AB — D_Ω

BC — хорда окр. Ω

т. D — т. касания

$AD \cap \Omega = E$

$CD = 2$

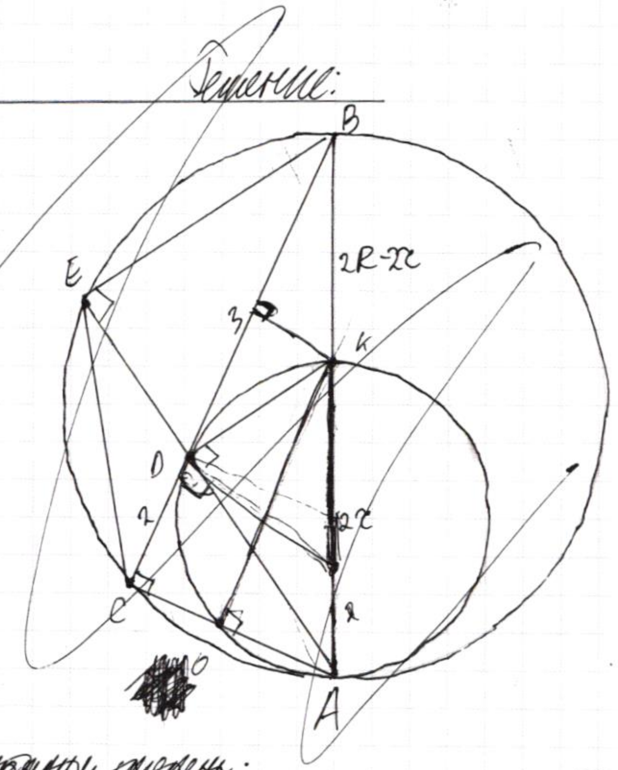
$BD = 3$

Найти:

S_{BACE}

r, R

Решение:



$AO = \frac{r}{R} AC$

$\frac{AO}{AC} = \frac{r}{R}$

$AC \cdot CO = 4$

$AC^2\left(1 - \frac{r}{R}\right) = 4$

$AC = \frac{2}{\sqrt{1-\frac{r}{R}}} = \frac{4R}{3}$

$1 - \frac{r}{R} = \frac{R-r}{R} = \frac{9}{4R^2}$

① ~~Равенство степеней~~

$BD^2 = BK \cdot AB$ (по Т о касательной и секущей)

$BK = 2(R - r)$

$BA = 2R$ $\Big/ \Rightarrow 9 = 2R\cdot\cancel{(2R-2r)}^{\,2(R-r)} \Rightarrow R(R-r) = 1{,}5^2 \; (1)$

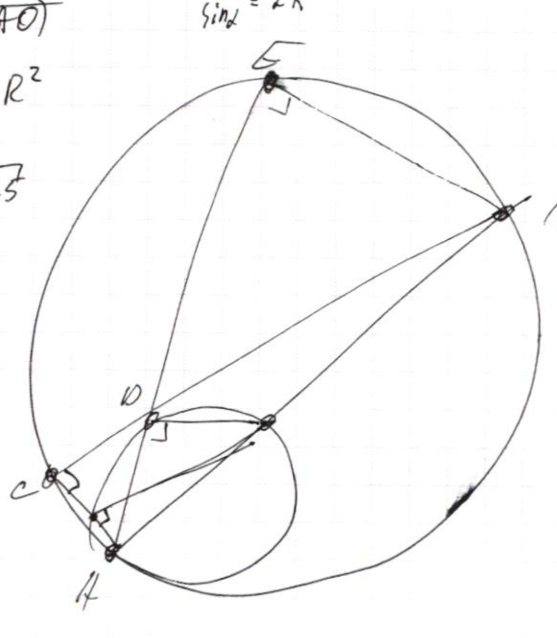
②

$4 = CO \cdot \cancel{(AC + AO)}^{\,AC}$

$\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$

$AC^2 + 25 = 4R^2$

$CO = \frac{4}{\sqrt{4R^2 - 25}}$



☒ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

$x = \frac{6-a \pm \sqrt{(a-6)^2 - 32(b-7)}}{16}$

$x \geq \frac{1}{2}: \; x \geq \frac{6-b}{4+a}$

$x \leq \frac{1}{2}: \; x \leq \frac{6+b}{20-a} \geq -\frac{1}{2}$

$x \in [-\frac{1}{2}; 1]$ $\quad f\left(\frac{1}{n}\right) =$

$\cancel{\frac{6-b}{4+a}}$

$\cancel{\frac{6-b}{4+a}} \cdot \frac{6-b}{4+a} \leq \frac{1}{2}$

$\frac{6+b}{20-a} \geq \frac{1}{2}$

$\begin{cases} 12-2b \leq 4+a \\ 12+2b \geq -a+20 \end{cases}$

$\begin{cases} a+2b \geq 8 \\ \cancel{-2b+a \geq 32} \end{cases}$ $\quad \begin{cases} a \neq 4 \\ a \neq 20 \end{cases}$

$b+a \leq 5$

$a \geq 8-2b$

$a \leq 4-2b$

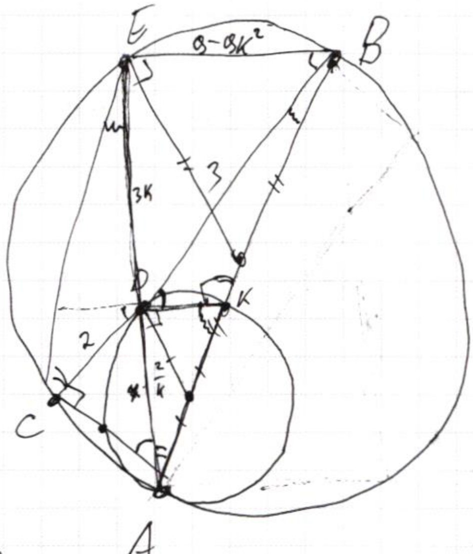
$\frac{6-b}{4+a} \leq \frac{1}{2}$ $\quad \frac{6+b}{20-a} \geq \frac{1}{2}$

$\frac{a+2b \geq 8}{2}$ $\quad \cancel{2b+a \geq 8}$

$\frac{6-b}{4+a} \leq 1 \Rightarrow a+b \geq 2$

$12+2b \geq a-20 \Rightarrow a-2b \leq 32$

$\frac{2}{k} = \frac{r}{R}\left(3k + \frac{2}{k}\right)$



$8 \cdot (2a-20) - 32b + 32 \cdot 7 \geq 0$

$a - 10 - 2b + 14 \geq 0$

$a - 2b \geq -4$

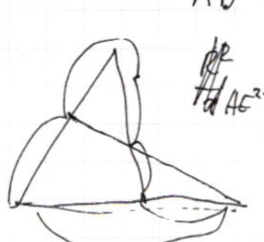
$2b - a \leq 4$

$4R^2 = AC^2 + 25$

$AD^2 = AC^2 + 4$

$AD^2 = 4R^2 - 21$

$\frac{r^2}{R^2} AE^2 = 4R^2 - 21$



$\frac{R}{r} - 1 = \frac{R^2}{r^2} \quad | \cdot r^2$

$rR - r^2 = R^2$

$DE = AE - AD = \frac{R}{r}\sqrt{4R^2-21} - \sqrt{4R^2-21}$

$DE^2 = (4R^2-21)\left(\frac{R}{r} - 1\right)$

$x, 2x, P-3x$

$x_2, 2x_2, P-3x_2$

$4R^2 = 9 - 9k^2 + \left(3k + \frac{2}{k}\right)^2$ $\quad 2P - 6x$

$x_1 \leq -\frac{1}{2}$

$x_2 \geq 1$

$a - 6 + \sqrt{D} \geq 8$

$D \geq (14-a)^2$

$\frac{2R}{kr}$ $\quad 6 - a + \sqrt{(a-6)^2 - 32(b-7)} \geq 16$

$r(R-r) = 1{,}5^2$

$\frac{r}{R} = \frac{AD}{AE} = \frac{DK}{EB} \Rightarrow AE = \frac{R}{r} AD$

$AD = \frac{r}{R} AE$

$\left(\frac{r}{R} AE\right)^2 = 4 + AC^2$

$DE =$

$AC^2 = 4R^2 - 25$

$EB^2 = 4R^2 - AE^2$

$(a-6)^2 - 32(b-7) \geq$
$\geq (10+a)^2$

$AD^2 = 4 + (4R^2 - 25)$

$32 \cdot 7 - 32b \geq 16 \cdot (2a+4)$

$AC^2 = 4R^2 - 25$

$32 \cdot 7 \geq 32b + 32a + 64$

$4R^2 = AC^2 + 25 \Rightarrow AC^2 = 4R^2 - 25$

$4R^2 = AE^2 + EB^2 \quad BE^2 = 4R^2 - AE^2$ $\quad 7 \geq b + a + 2$

$AD^2 = 4 + AC^2 \Rightarrow AD^2 = 4R^2 - 21$

$9 = DE^2 + BE^2$

$AE = \frac{R}{r} AD \Rightarrow AE = \frac{R}{r}\sqrt{4R^2 - 21}$

$4r^2 = AD^2 + DK^2 \Rightarrow DK^2 = 21 + 4r^2 - 4R^2$

$DE^2 = AE^2 + 9 - 4R^2$

$DE^2 = \frac{R^2}{r^2}(4R^2 - 21)$

☒ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

BK.

$$\begin{cases} 4R^2 = AC^2 + 25 \Rightarrow AC^2 = 4R^2 - 25 \\ 4R^2 = AE^2 + EB^2 \\ 9 = ED^2 + EB^2 \\ AD^2 = AC^2 + 4 \Rightarrow AD^2 = 4R^2 - 21 \Rightarrow AE^2 = \frac{R^2}{r^2}(4R^2-21) \\ 4r^2 = AD^2 + DK^2 \Rightarrow DK^2 = 21 + 4r^2 - 4R^2 \end{cases}$$

$\Rightarrow ED^2 = 9 - 4R^2 + AE^2 = 9 - 4R^2 + \frac{R^2}{r^2}(4R^2-21)$

$\frac{AD}{AE} = \frac{2r}{2R} \Rightarrow AD = \frac{r}{R}AE$

$AE = \frac{R}{r}AD$

$ED = AE - AD = \left(\frac{R}{r} - 1\right)AD \Rightarrow ED^2 = \left(\frac{R}{r}-1\right)^2(4R^2-21)$

$r(R-r) = 1{,}5^2 \quad \frac{9}{4} \quad \cancel{rR}$

$R = \frac{9}{4r} + r = \frac{9+4r^2}{4r} \qquad r^2 - rR + \frac{9}{4} = 0$

$r = \frac{R \pm \sqrt{R^2-9}}{2}$

$9 - 4R^2 + \frac{R^2}{r^2}(4R^2-21) = \left(\frac{R^2}{r^2} - \frac{2R}{r} + 1\right)(4R^2-21)$

$9 - 4R^2 = (4R^2-21)\left(1 - \frac{2R}{r}\right)$

$DK = \frac{r}{R}EB$

$AD = \frac{r}{R}AE$

$\cancel{9 - 4\frac{(9+4r^2)^2}{16r^2}}$

$9 - 4R^2 = 4R^2 - 21 - \frac{8R^3}{r} + 21 \cdot \frac{2R}{r}$

$\cancel{8R^3}$

$D^2 = AC^2 + 5^2 \Rightarrow AC^2 = D^2 - 5^2$

$d^2 = AD^2 + DK^2 \Rightarrow DK^2 = d^2 + 5^2 - 2^2 - D^2$

$AD^2 = 2^2 + AC^2 \Rightarrow AD^2 = 2^2 + D^2 - 5^2$

$D^2 = AE^2 + EB^2$

$3^2 = ED^2 + EB^2$

$D^2 = \frac{R^2}{r^2}AD^2 + \frac{R^2}{r^2}DK^2$

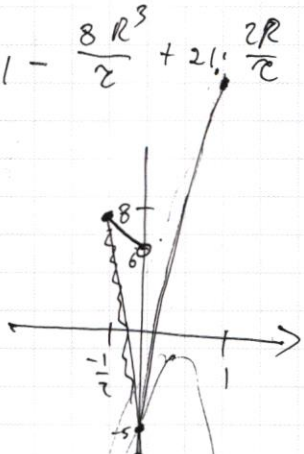
$y = 8x - 12x + 6$

$y = -4x + 6$

$y = 20x - 6$

$-8x^2 + 6x + 7 =$

$= \quad \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$



$\cancel{D^2 = \frac{R^2}{r^2} \cdot 8^2}$

$\frac{BK}{2} \cdot \frac{AK}{2} = \frac{9}{4}$

$r \cdot (R - r)$

$DK^2 = \frac{r^2}{R^2}EB^2$

$AD^2 = \frac{r^2}{R^2}AE^2$

$AE^2 = \frac{R^2}{r^2}(2^2 + D^2 - 5^2)$

$r + R \frac{9}{4R}$

$-ED^2 + AE^2 = -3^2 + D^2 \qquad AE^2\left(1 - \left(1 - \frac{r}{R}\right)^2\right) = D^2 - 3^2$

$ED = \left(1 - \frac{r}{R}\right)AE$

$\frac{R^2}{r^2} \cdot \left(\frac{r}{R} \cdot \left(2 - \frac{r}{R}\right)\right) = D^2 - 3^2$

$\frac{R}{r}(2^2 + 4R^2 - 5^2)\left(2 - \frac{r}{R}\right) = 4R^2 - 9$