МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Дано:
$a; b; c$ - послед. члены геом. прогрес. ($\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = q$)
x - четв. член геом. прог.
Найти: c

Решение:

$ax^2 + 2bx + c = 0$

$D = 4b^2 - 4ac = 4(b^2 - ac)$ (1)

т.к. a, b, c - посл. чл. геом. прогр., то $\frac{b}{a} = \frac{c}{b} => b^2 = ac$

подст. в ур. (1): $D = 4(ac - ac) = 0$, $x = \frac{2b}{2a} = \frac{b}{a}$ - четвертый член геом. прогрессии.

Следов. $\frac{b}{a} : c = \frac{b}{a} => \frac{b}{ac} = \frac{b}{a} => \frac{1}{c} = 1 => c = 1$

Ответ: 1

№3

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} & (1) \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 & (3) \end{cases}$$

Решим (1): $x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} =>$

$$=> \begin{cases} x - 6y \geq 0 \\ xy - 6y - x + 6 \geq 0 \\ (x-6y)^2 = xy - 6y - x + 6 \end{cases} => \begin{cases} x \geq 6y \\ x(y-1) - 6(y-1) \geq 0 => \\ x^2 - 12xy + 36y^2 = xy - 6y - x + 6 \end{cases}$$

$$=> \begin{cases} x \geq 6y \\ (y-1)(x-6) \geq 0 \\ x^2 - (13y - 1)x + 36y^2 + 6y - 6 = 0 & (2) \end{cases}$$ <=>

Решим (2): $x^2 - (13y-1)x + 36y^2 + 6y - 6 = 0$

$D = (13y-1)^2 - (36y^2 + 6y - 6)4 = 169y^2 - 26y + 1 - 144y^2 - 24y + 24 = 25y^2 - 50y + 25 = 25(y^2 - 2y + 1) = 25(y-1)^2$

$x_{1,2} = \frac{13y - 1 \pm 5(y-1)}{2} = \left[\begin{array}{l} 4y + 2 \\ 9y - 3 \end{array}\right.$ вернемся в систему

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq 6y \\ (y-1)(x-6) \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x_1 = 4y+2 \\ x_2 = 9y-3 \end{array}\right. \end{cases} \boxed{\Rightarrow}$$

Подставим x_1 и x_2 в ур.(3):

при $x_1 = 4y+2$: $(4y+2)^2 + 2y^2 - 12(4y+2) - 4y + 20 = 0$

$16y^2 + 16y + 4 + 2y^2 - 48y - 24 - 4y + 20 = 0$

$18y^2 - 36y = 0 \Rightarrow 18y(y-2) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = 2 \end{array}\right.$

при $x_2 = 9y-3$: $(9y-3)^2 + 2y^2 - 12(9y-3) - 4y + 20 = 0$

$81y^2 - 36y + 9 + 2y^2 - 108y + 36 - 4y + 20 = 0$

$83y^2 - 148y + 65 = 0$ $D = 148^2 - 4 \cdot 65 \cdot 83 = 21904 -$

$- 21580 = 324$

$$y_{1,2} = \frac{148 \pm 18}{83 \cdot 2} = \left[\begin{array}{l} \frac{65}{83} \\ 1 \end{array}\right.$$

Вернёмся в систему

$$\boxed{\Rightarrow} \begin{cases} x \geq 6y \\ (y-1)(x-6) \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 1 \\ x = 6 \end{cases} \\ \begin{cases} y = 65/83 \\ x = \frac{9 \cdot 65}{83} - 3 \end{cases} \not\exists\ x < 6y \\ \begin{cases} y = 0 \\ x = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} y = 2 \\ x = 10 \end{cases} \not\exists\ x < 6y \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 6 \\ y = 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

сравним $\overset{x}{\frac{9 \cdot 65}{83} - 3} \lessgtr \overset{6y}{\frac{6 \cdot 65}{83}}$

~~$9 \cdot 65 - 6 \cdot 65 \vee 3$~~ $9 \cdot 65 - 3 \cdot 83 < 6 \cdot 65$

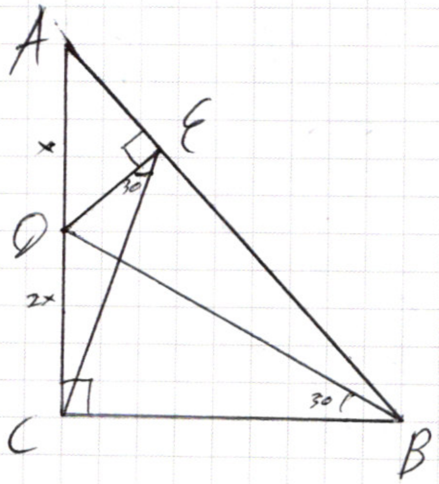
~~$65(9-6) \vee 3$~~

$9 \cdot 65 - 6 \cdot 65 < 3 \cdot 83$

$3 \cdot 65 < 3 \cdot 83$

следов. $x < 6y$

Ответ: $(2;0)$; $(6;1)$



№4 Дано: $\triangle ABC$ — прям.

$\angle C = 90°$; т. $D \in AC$; т. $E \in AB$

$\frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$; $DE \perp AB$

$\angle CED = 30°$

б) $AC = \sqrt{7}$

Найти: а) $tg\, BAC$

б) $S_{\triangle CED}$

Решение:

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4-продолжение

1) Пусть $AD = x$, тогда $AC = 3x$. ($AC = 3AD$ по усл.)
$DC = AC - AD = 3x - x = 2x$

2) Провед. BD и CE

3) Т.к. $\angle ACB = 90^\circ$ и $\angle DEB = 90^\circ$ ($DE \perp AB$), то $CDEB$ - вписан. четыр-ик по признаку ($\angle ACB + \angle DEB = 180^\circ$). Следов. $\angle DEC = \angle DBC^{30^\circ}$ (как вписан. углы)

4) В $\triangle BCD$: т.к. $\angle DCB = 90^\circ$ и $\angle DBC = 30^\circ$, ~~...~~
$\sin\angle DBC = \frac{DC}{BD} \Rightarrow BD = \frac{DC}{\sin\angle DBC} = \frac{2x}{\frac{1}{2}} = 4x$

5) В $\triangle BCD$ по т. Пифагора: $BD^2 = DC^2 + BC^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow BC = \sqrt{BD^2 - DC^2} = \sqrt{16x^2 - 4x^2} = \sqrt{12x^2} = 2\sqrt{3}x$

6) $\operatorname{tg} BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{2\sqrt{3}x}{3x} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

7) Т.к. $BEDC$ - впис. (по п.3), то по св-ву секущ. провед. из одной точки к одной окр.
$AE \cdot AB = AD \cdot AC \Rightarrow AE = \frac{AD \cdot AC}{AB} = \frac{x \cdot 3x}{AB}$

8) По т. Пифагора в $\triangle ABC$: ~~AB~~
$AB^2 = BC^2 + AC^2 \Rightarrow AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = \sqrt{9x^2 + 12x^2} = \sqrt{21}x$

9) По п.8 и 9: $AE = \frac{x \cdot 3x^{\sqrt{21}}}{\sqrt{21}x} = \frac{3x}{\sqrt{21}} = \frac{3\sqrt{21}x}{21_7} = \frac{\sqrt{21}x}{7}$,

т.к. $AC = \sqrt{7} = 3x$ (по усл. и по п.1), то $x = \frac{\sqrt{7}}{3}$, след.
$AE = \frac{\sqrt{21}}{7} \cdot \frac{\sqrt{7}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

10) По т. Пифагора в $\triangle ADE$: $AD^2 = AE^2 + DE^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow DE = \sqrt{AD^2 - AE^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt7}{3}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt3}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{7-3}{9}} = \frac{2}{3}$

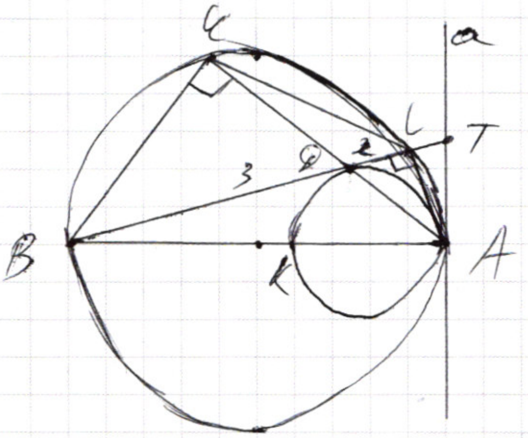
11) В $\triangle ADE$: $\sin\angle ADE = \frac{AE}{AD} = \sin(180 - \angle ADE) =$

$= \sin CDE = \frac{\sqrt3 \cdot 3}{3\sqrt7} = \frac{\sqrt3}{\sqrt7}$

12) $S_{\triangle CDE} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot DE \cdot \sin CDE = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} \cdot \frac{\cancel{\sqrt7}}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt3}{\cancel{\sqrt7}} =$

$= \frac{2\sqrt3}{9}$

Ответ: а) $tg BAC = \frac{2\sqrt3}{3}$ б) $S_{\triangle CED} = \frac{2\sqrt3}{9}$



№5

Дано: Ω и ω – кас. вн. окр. в т. A; AB – диам. Ω; BC – хор. Ω и BC – кас. к ω; $BC \cap \omega = D$ (D – т. касания); $AD \cap \Omega = E$; пусть R – радиус окр. Ω и r – рад. окр. ω; $CD = 2$; $BD = 3$

Найти: r; R; S_{BACE}

Решение:

1) По св-ву касающ. окруж. AB проходит через центр ω и Ω.

2) Пусть $BA \cap \omega = K$

3) Провед. a – кас. к ω и к Ω (общ. кас.) т.к. AB – диам., то по св-ву кас. $AB \perp a$

4) Продол. $BC \cap a = T$

5) По св-ву секущ. провед. из одной т. к одн. окруж.: $BD^2 = BK \cdot BA$, т.к. AB – прох. через цент ω, то $AK = 2r$, следов. $BD^2 = 2R(2R - 2r)$

6) Пусть $TC = x$

черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5 продолжение и конец

7) По св-ву отр. провед. из одн. точ. к одн. окруж: $TA^2 = TC \cdot TB$ (1) (для окр. Ω)
и по св-ву кас. для от. № 8 $TD^2 = TA^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow TA^2 = (TC + CD)^2 = (x+2)^2$ (2) приравняем
ур. (1) и (2): $TA^2 = TC \cdot TB = (x+2)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow x \cdot (x+5) = (x+2)^2 \Rightarrow \cancel{x^2} + 5x = \cancel{x^2} + 4x + 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 4 = TC$

8) В $\triangle BAT$: т.к. $\angle BAT = 90°$ (по п.3), и $\angle BCA = 90°$ по св-ву (т.к. $\angle BCA$ - впис. и опир. на диам. (AB)), то
$AC^2 = CT \cdot BC \Rightarrow AC = \sqrt{5 \cdot 4} = 2\sqrt{5}$

9) По т. Пифагора в $\triangle ABC$: $AB^2 = AC^2 + BC^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{20+25} = 3\sqrt{5} = 2R \Rightarrow R = \frac{3\sqrt{5}}{2}$
10) по п. 9 и 5: $BD^2 = 2R(2R - 2r) \Rightarrow$
$\Rightarrow 9 = 4R(R - r) = 4 \cdot \frac{3\sqrt{5}}{2}\left(\frac{3\sqrt{5}}{2} - r\right) \Rightarrow$
$\Rightarrow 9^3 = \frac{4 \cdot 3\sqrt{5}(3\sqrt{5} - 2r)}{4} \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5} - 2r \Rightarrow$
$\Rightarrow 2r = 3\sqrt{5}^{\backslash\sqrt{5}} - \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3 \cdot 5 - 3}{\sqrt{5}} = \frac{12}{\sqrt{5}} \Rightarrow r = \frac{6\sqrt{5}}{5}$

~~...~~ 11) По т. Пифагора в $\triangle ACD$: $AD^2 =$
$= AC^2 + DC^2 \Rightarrow AD = \sqrt{AC^2 + DC^2} = \sqrt{20+4} = 2\sqrt{6}$
12) По св-ву хорд окр.: $ED \cdot DA = BD \cdot BC \Rightarrow$
$\Rightarrow ED = \frac{BD \cdot BC}{AD} = \frac{3 \cdot 2^{\backslash\sqrt{6}}}{2\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{6_2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$; $AE = AD + DE = \frac{\sqrt{6}}{2} + 2\sqrt{6}^{\backslash 2} = \frac{5\sqrt{6}}{2}$

13) По т. Пифаг. в $\triangle ABE$: $AB^2 = BE^2 + AE^2 \Rightarrow BE = \sqrt{AB^2 - AE^2} =$

$= \sqrt{45 - \left(\frac{5\sqrt6}{2}\right)^2} = \sqrt{45^{\backslash 2} - \frac{25\cdot 3}{2}} = \sqrt{\frac{90-75}{2}} = \frac{5\sqrt2}{2}$

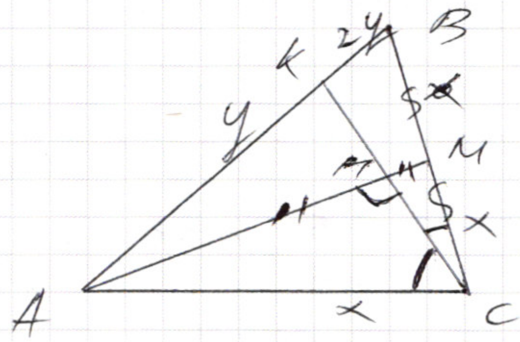
14) В $\triangle BED$: $\sin\angle EBD = \frac{ED}{BD} = \frac{\sqrt6}{2\cdot 3} = \frac{\sqrt6}{6}$

15) $S_{ACEB} = S_{\triangle BAC} + S_{\triangle BEC} = \frac12 \cdot BC \cdot AC + \frac12 \cdot BE \cdot BC \cdot \sin EBD =$

$= \frac{1}{\cancel{2}} \cdot 5 \cdot \cancel{2}\sqrt5 + \frac12 \cdot \frac{5\sqrt2}{2} \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt6}{6} = 5\sqrt5 + \frac{25\sqrt{12}}{24} =$

$= 5\sqrt5^{\backslash 12} + \frac{25\cdot 2\sqrt3}{\cancel{2}\cdot 12} = \frac{60\sqrt5 + 25\sqrt3}{12}$

Ответ: $R = \frac{3\sqrt5}{2}$; $r = \frac{6\sqrt5}{5}$; $S = \frac{60\sqrt5+25\sqrt3}{12}$



№2

Дано: $\triangle ABC$; AM-мед. CK-бис-са; $AM \perp CK$. $P_{ABC} = 900$; $AM \cap CK = H$

Найти: кол-во таких $\triangle$-ов, где $AB, BC, AC \in N$

Решение:

1) В $\triangle AMC$: CH-бис-са и выс. следов. по призн. CH и мед. и $\triangle ACM$ – р/б, следов. $MC = AC$

2) т.к. AM-мед. то $BM = MC = AC$ (по п.1)

3) Пусть $BM = MC = AC = x$, по св-ву бис-сы в $\triangle ABC$: $AK : KB = AC : BC = 1 : 2$, пусть $AK = y$, тогда $BK = 2y$

4) $P_{\triangle ABC} = 3y + 2x + x = 3(x+y) = 900 \Rightarrow (x+y) = 300$

5) Т.к. $x, y \in N$, то существ. 299 таких пар. следов. существ. 299 $\triangle$-ов

Ответ: 299

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$AC^4+36AC^2=AC^2\cdot AB^2$

$AB^2=AC^2+36$

$AC^4+36AC^2=AC^2(AC^2+36)$

$\frac{BC}{\sin(90-(\alpha+\beta))}=2R$

$\gamma=90-(\alpha+\beta)$

$\frac{BC}{\sin(90-\alpha)}=2R=\frac{BC}{\cos\alpha}$

$90-\beta=\alpha+\gamma$

$AT^2=(x+2)^2$

$AT^2=x(x+6)$

$x^2+4x+4=x^2+6x$

$2x=4$

$x=2$

$AC^2=BC\cdot CT=5\cdot 2=10$

$AC=\sqrt{10}$; П. т. П. $AB^2=BC^2+AC^2=$

$=AB=\sqrt{25+10}=\sqrt{35}\Rightarrow R=\frac{\sqrt{35}}{2}$

$BD^2=BK\cdot BA\Rightarrow 9=\sqrt{35}(\sqrt{35}-2r)\Rightarrow$

$\Rightarrow 9=35-2\sqrt{35}r\Rightarrow 2\sqrt{35}r=26\Rightarrow$

$\Rightarrow r=\frac{13}{\sqrt{35}}=\frac{13\sqrt{35}}{35}$

$S_{BACE}=S_{\triangle}ABC+S_{\triangle}BEC=\frac{1}{2}BC\cdot AC+\frac{1}{2}BE\cdot BC\cdot\sin B=$

$=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot\sqrt{10}+\frac{1}{2}\cdot$

$x+y=5$

1	4
2	3
3	2
4	1

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№6

$8x-6|2x-1| \le ax+b \le -8x^2+6x+7$; $x\in\left[-\frac{7}{2};1\right]$

$-\quad \frac{1}{2} \quad +$

при $x<\frac{1}{2}$:

$8x+12x-6 \le ax+b \le -8x^2+6x+7$

$8x+12x-6 \le -8x^2+6x+7$

$8x^2+14x-13\le 0$

при $x\in\left[-\frac{7}{2};\frac{1}{2}\right)$ $8x^2+14x-13\le 0$ при любых

при $x\ge\frac{1}{2}$:

$8x-12x+6\le -8x^2+6x+7$

$8x^2-10x-1\le 0 \quad D=100+32=132$

при $x\in\left[\frac{1}{2};1\right]$ $8x^2-10x-1\le 0$ при люб. x.

$ax+b\le -8x^2+6x+7$

$8x^2+(a-6)x+b-7\le 0$ (1) подроб. в ?

$D=a^2-12a+36-32b+32\cdot 7\ge 0$

при $x\in\left[-\frac{7}{2};\frac{1}{2}\right)$ $8x+12x-6\le ax+b \Rightarrow$

$\Rightarrow (a-20)x+b+6\ge 0$ (2)

при $x\in\left[\frac{1}{2};1\right]$! $8x-12x+6\le ax+b \Rightarrow$

$\Rightarrow (a+4)x+b-6\ge 0$ (3) Сост. сис. ур. (1), (2), (3)

$$\begin{cases} \cancel{a^2-12a+36-32b+32\cdot 7\ge 0} \\ 8x^2+(a-6)x+b-7\le 0 \ (1) \\ (a-20)x+b+6\ge 0 \ (2) \\ (a+4)x+b-6\ge 0 \ (3) \end{cases}$$

~~Выч. (2) из (3): $(a+4)x+b-6\ge 0$, $(a-20)x+b+6\ge 0$, $x(a+4-(a-20))+b-b-6-6\ge 0$~~

$\Rightarrow 24x\ge 12 \Rightarrow x\ge\frac{1}{2}$

Слож. (1) и (2) ($x\in\left[-\frac{7}{2};\frac{1}{2}\right)$):

$8x^2+(a-6)x+b-7-(a-20)x-b-6\le 0$

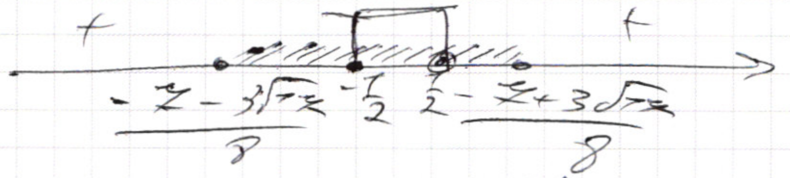
$8x^2+ax-6x-13-ax+20x\le 0$

$8x^2+14x-13\le 0$

$D=14^2+4\cdot 8\cdot 13=4(49+104)=4\cdot 153=36\cdot 17$

№6-продол.

$$x_{1,2} = \frac{-14 \pm 6\sqrt{17}}{16} = \frac{-7 \pm 3\sqrt{17}}{8}$$



Сравним $\frac{-7-8\sqrt{17}}{8} \vee -\frac{1}{2}$

$-7-8\sqrt{17} \vee -4$

$-3 \vee 8\sqrt{17}$

$\frac{-7+8\sqrt{17}}{8} \vee \frac{1}{2}$

$-7+8\sqrt{17} \vee 4$

$8\sqrt{17} \vee 11$

$\sqrt{64 \cdot 17} \vee \sqrt{121}$

~~[illegible]~~

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

a, b, c

$a = b_1$

$b = b_2$

$c = b_3$

$\frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2}$

$b^2 = ac$

$c - ?$

$ax^2 - 2bx + c = 0$

$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{+2b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$ $D = 4b^2 - 4ac = 4(b^2 - ac) = 0$

$x_1 = \frac{2b}{2a} = \frac{b}{a}$ $\quad a, b, c, \frac{b}{a}$

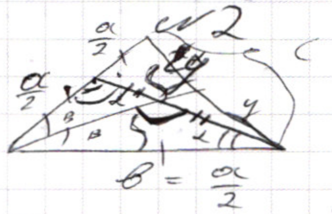
$\frac{b}{a} : c = \frac{b}{a} = q \Rightarrow \frac{b}{ac} = \frac{b}{a} \Rightarrow c = 1$

Ответ: 1

№2

$P = 900$

$a; b; c$ – ст. △-ка t ...



$a + b + c = 900$

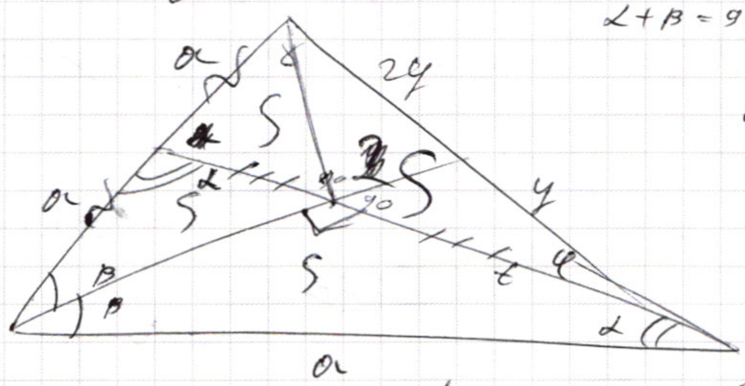
$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} \Rightarrow x = \frac{ay}{b}$

$c = x + y = \frac{ay}{b} + y^{\cdot b} =$

$= \frac{y(a+b)}{b} = 3y$

$180 - \alpha = \alpha + 2\beta$

$\alpha + \beta = 90$



~~$a + y = 450$~~

$3a + 3y = 900 \Rightarrow \boxed{a + y = 300}$

$2S = \frac{1}{2} a^2 \cdot \sin 2\beta$

$2S = \frac{1}{2} a \cdot 3y \cdot \sin \delta$

$\frac{1}{2} a t \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 3y\, t \sin \varphi = \frac{1}{2} a t \sin.$

~~$\sin \alpha = \sin ...$~~

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№ 3

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \ (1) \end{cases}$$

$144 \mid 8$
$64 \mid 18$

~~$xy-6y-x+6\geq0$~~
~~$xy-6y-x+6\geq0$~~

$$\begin{cases} x-6y\geq0 \\ (x-6y)^2=xy-6y-x+6 \\ xy-6y-x+6\geq0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq6y \\ x^2-12xy+36y^2=xy-6y-x+6 \\ x(y-1)-6(y-1)\geq0 \ (2) \end{cases}$$

$(1)\ x^2-12x+2y^2-4y+20=0$

$D=144-8y^2+16y-80=-8y^2+16y+64=-8(y^2-2y-8)$

$2y^2-4y+x^2-12x+20=0 \quad D=16-8x^2+96x-160=$

$=-8x^2+96x-144=-8(x^2-12x+18)$

$(2)\ (y-1)(x-6)\geq0$

$\left(\frac{x}{6}-1\right)(x-6)\geq0 \Rightarrow \frac{(x-6)(x-6)}{6}\geq0$

$(x-6)^2\geq0 \Rightarrow x\in\mathbb{R}$

$\frac{36}{4}$

$x^2-13xy+x+36y^2+6y-6=0$

$x^2-(13y-1)x+36y^2+6y-6=0 \quad D=196y^2-26y+1-$

$-144y^2-24y+24=25y^2-50y+25=25(y^2-2y+1)=$

$=25(y-1)^2$

$$x_{1,2}=\frac{13y-1\pm5(y-1)}{2}= \left[\begin{array}{l} \frac{13y-1-5y+5}{2}=4y+2 \\ \frac{13y-1+5y-5}{2}=9y-3 \end{array}\right.$$

$x=4y+2!$

$(4y+2)^2+2y^2-12(4y+2)-4y+20=0$

~~$(4y+2)(4y+10)+2y^2-2y+10)$~~

$16y^2+16y+4+2y^2-48y-24-4y+20=0$

$18y^2-\cancel{20y}-36y=0 \Rightarrow 18y(y-2)=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=2 \\ y=0 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=2 \\ x=10 \end{cases} \\ \begin{cases} y=0 \\ x=2 \end{cases} \end{array}\right. \\ x\geq6y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

при $x = 9y - 3$ №3

$(9y-3)^2 + 2y^2 - 12(9y-3) - 4y + 20 = 0$

$81y^2 \boxed{-36y} + 9 + 2y^2 - 108y + 36 - 4y + 20 = 0$

$83y^2 - 148y + 65 = 0$

$D = 148^2 - 4 \cdot 65 \cdot 83 = 324$

$y = \frac{148 \pm 18}{83 \cdot 2} = \left[\begin{array}{l} \frac{65}{83} \\ 1 \end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 1 \\ x = 6 \end{cases} \\ \begin{cases} y = \frac{65}{83} \\ x = \end{cases} \quad \varnothing \end{array}\right.$

$x \geq 6y$

$\frac{9 \cdot 65}{83} - 3 \cdot ^{83}$

$\frac{3(65 \cdot 3 - 83)}{\cancel{83}} \vee \frac{65 \cdot 6}{\cancel{83}}$

$65 \cdot 3 - 65 \cdot 2 \vee 83$

$65 \vee 83$

$148 \cdot 148$: 1184, 592, 148, 21904; $21904 - 21580 = 324$

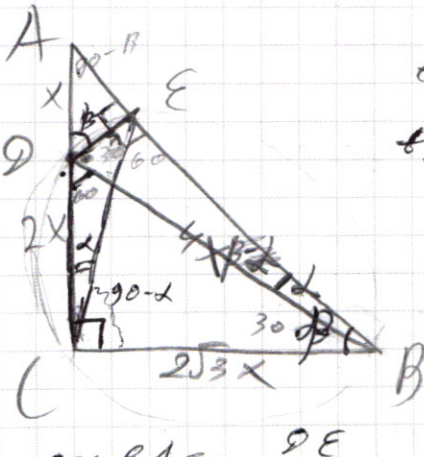
$65 \cdot 4 = 260$, $\cdot 83$; 208; 21580

$148 - 18 = 130$; $148 + 18 = 166$; $83 \cdot 2 = 166$

$18 \cdot 18 = 144$, 324

Ответ: $(6;1); (2;0)$

№4



$tg\,BAC - ?$ $\angle CED = 30°$

$tg\,BAC = \frac{BC}{AC}$ $\triangle ADE \sim \triangle ABC$

$\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow x \cdot 3x = AE \cdot AB$

$90 - \alpha + \beta + 60 = 180$

$\boxed{\beta - \alpha = 30}$

$tg\,BAC = \frac{DE}{AE}$

$90 - \alpha = 90 - (\beta - 30) = 120 - \beta$

$2\sqrt{3}x$

$16x^2 - 4x^2 = 12x^2$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$AB^2 = 12x^2 + 9x^2 = 21x^2$

$AB = \sqrt{21}\,x$

$tg\,BAC = \frac{2\sqrt{3}x}{3x} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$$\begin{array}{r} 32 \\ \times 13 \\ \hline 96 \\ 32 \\ \hline 416 \\ +196 \\ \hline 612 \end{array}$$

$AC = \sqrt{7} = 3x$

$AD \cdot AC = AE \cdot AB$

$\frac{x \cdot 3x}{\sqrt{21}x} = AE \Rightarrow AE = \frac{3}{\sqrt{21}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\sin\beta = \frac{AE}{AD} = \frac{\sqrt{3}\cdot 3}{3\cdot\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{3}{7}} = \sin(180-\beta) =$

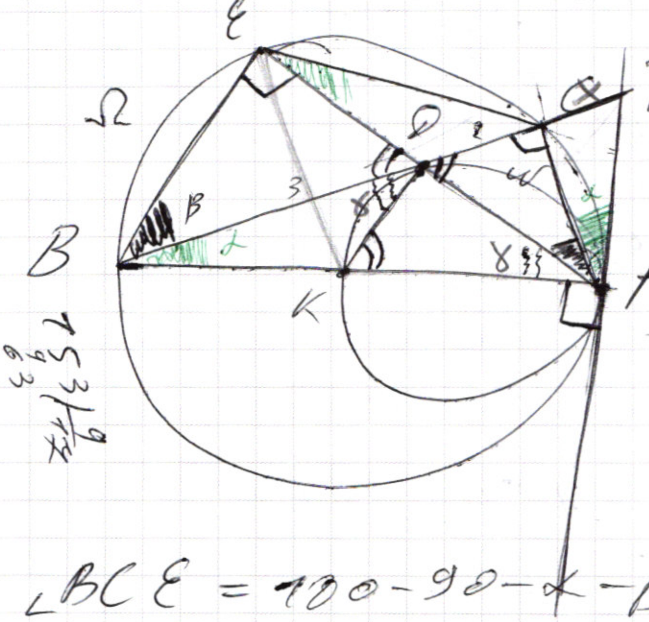
$= \sin CDE$ {по п. Пиф. $DE = \sqrt{x^2 - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{7-3}{9}} = \frac{2}{3}$

$S_\triangle CDE = \frac{1}{2} CD \cdot DE \cdot \sin CDE = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{7}}{3} \cdot \frac{2}{3} =$

$= \frac{2\sqrt{3}}{9}$

Ответ: $tg\,BAC = \frac{2\sqrt{3}}{3}$; $S_\triangle CDE = \frac{2\sqrt{3}}{9}$

№5



$CD = 2$; $BD = 3$; r; $R - ?$

$BD^2 = BK \cdot BA$

$BD^2 = 2R(2R - 2r)$

~~$90 - \alpha - \beta + \beta + 90 + \alpha = 180$~~

$\triangle BCA \sim BAT$

$\frac{BC}{BA} = \frac{AC}{AT} = \cos\alpha$

$\angle BCE = 180 - 90 - \alpha - \beta = 90 - (\alpha + \beta)$

$\angle BED \sim \triangle ACD$ $\frac{BD}{AD} = \frac{ED}{CD} = 6 = AD \cdot DE$

$TC(TC + 6) = TA^2$ $\triangle ATC \sim BAC$

$\frac{AC^2}{6}\left(\frac{AC^2 + 36}{6}\right) = TA^2$ $\frac{AT}{AB} = \frac{TC}{AC} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow TC = \frac{AC^2}{BC}$

$AC^4 + 36AC^2 = 36AT^2 \Rightarrow AC^4 + 36AC^2 = 36\left(\frac{AC \cdot AB}{6}\right)^2$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$8x - 6|2x-1| \le ax + b \le -8x^2 + 6x + 7 \quad x \in [-\frac{1}{2}; 1]$

$- \quad \frac{1}{2} \quad +$

при $x \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$:

$\underbrace{8x + 12x - 6} \le ax + b \le -8x^2 + 6x + 7$

$144 + 24 \cdot 8 =$
$= 12(12 + 16) =$
$= 12 \cdot 28 =$
$= 4 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 3 = 4^2 \cdot 21$

$36 + 28 \cdot 8 = 260$

$x_0 = \frac{-6}{-16} = \frac{3}{8}$

x							
y							

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)