

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.
2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.
3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC , если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.
б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED .
5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω , а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D . Луч AD повторно пересекает Ω в точке E . Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2, BD = 3$.
6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leq ax + b \leq -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех x на промежутке $[-\frac{1}{2}; 1]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leq x \leq 22, 2 \leq y \leq 22$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

a, b, c — ^{первый, второй и третий} члены арифметической прогрессии № 1.
 d — знаменатель прогрессии

$$ax^2 - 2bx + c = 0$$

$$D = 4b^2 - 4ac = 4(b^2 - ac)$$

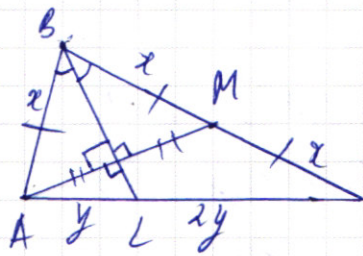
$$x_{1,2} = \frac{2b \pm \sqrt{4(b^2 - ac)}}{2a} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} = \frac{aq \pm \sqrt{(aq)^2 - a \cdot aq^2}}{a} =$$

$$= \frac{aq \pm 0}{a} = q \text{ — корень, т.к. } q \text{ — корень и } q \text{ — член прогрессии}$$

~~$ax^2 - 2bx + c = 0$~~ $\Rightarrow aq^3 = a \quad q(q^2 - 1) = 0$
 $q \neq 0$ иначе не прогрессия

$\Rightarrow aq^2 = 1 = c$ — третий член прогрессии

Ответ: 1



№ 2.

Рассмотрим $\triangle ABC$ как пример
такого \triangle (AM — медиана, BL — биссектриса, $BL \perp AM$)

$\Rightarrow AB = BM = \frac{BC}{2}$ (т.к. AM — медиана)
 1) Пусть $BL \perp AM, BL$ — биссектриса $\Rightarrow \triangle ABM \sim \triangle LBC \Rightarrow$

2) Пусть $BM = x = AB = MC$

3) BL — биссектриса $\Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AL}{LC} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$, Пусть $AL = y \Rightarrow LC = 2y$

по неравенству 0 $\Rightarrow \begin{cases} 2x < x + 3y \\ x < 2x + 3y \\ 3y < 3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 3y \\ -x < 3y \\ y < x \end{cases}$ — вычитается всегда, т.к. $x > 0, y > 0$

$y < x < 3y$ $\triangle ABC = 3x + 3y = 900 \Rightarrow x + y = 300$

$2y < x + y < 3y$

$2y < 300 < 3y \quad x + y = 300 \Rightarrow$ таких \triangle -ков 74

$y < 150 \Rightarrow 75 < y < 150$ Ответ: 74
 $y > 75$

№3.

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{2y - 6y - x + 6} \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{x(y-1) - 6(y-1)} \quad (1) \\ x^2 - 12x + 36 + 2y^2 - 4y + 2 - 36 - 2 + 20 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2 + 2(y-1)^2 - 18 = 0 \end{cases}$$

$$(x-6)(y-1) \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Если } x \in (-\infty; 6] \Rightarrow y \in (-\infty; 1]$$

$$\Rightarrow \text{Если } x \in [6; +\infty) \Rightarrow y \in [1; +\infty)$$

Рассмотрим как квадратное уравнение относительно x

по x

$$x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 \stackrel{+2x^2}{=} 0 \quad D \geq 0$$

$$D = 144 - 4 \cdot (2y^2 - 4y + 20) = 144 - 8y^2 + 16y - 80 = -8y^2 + 16y + 64$$

$$-8y^2 + 16y + 64 \geq 0$$

$$-8(y^2 - 2y - 8) \geq 0$$

$$D = 4 + 4 \cdot 8 = 36$$

$$y_{1,2} = \frac{2 \pm 6}{2} = \begin{matrix} 4 \\ -2 \end{matrix}$$

$$\} \Rightarrow y \in [-2; 4]$$

Пусть $(x-6) = -t$ $(y-1) = k$

$$\begin{cases} -t - 6k = \sqrt{tk} \\ t^2 + 2k^2 - 18 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-t - 6k)^2 = tk \\ t^2 + 2k^2 - 18 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t^2 - 12tk + 36k^2 = tk \\ t^2 + 2k^2 - 18 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t^2 + 2k^2 - 18 = 0 \\ 3tk^2 - 13tk - 18 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t^2 + 2k^2 - 18 = 0 \\ t^2 + 2k^2 - 18 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t^2 + 2k^2 - 18 = 0 \\ t^2 + 2k^2 - 18 = 0 \end{cases}$$

$$3tk^2 - 13tk - 18 = 0 \Rightarrow t = \frac{34k^2 - 18}{13k} \text{ если } k \neq 0$$

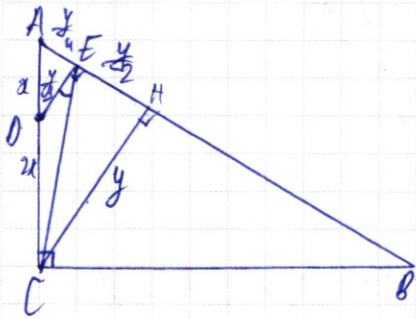
$$\frac{34k^2 - 18}{13k} + 2k^2 - 18 = 0$$

$$(1) \cdot 2 \Rightarrow 2(x-6) - 6(y-1) = \sqrt{(x-6)(y-1)}$$

$$2(x-6) - 6(y-1) - 2\sqrt{(x-6)(y-1)} = 0$$

$$\sqrt{(x-6)} (2\sqrt{2-6} - \sqrt{(y-1)}) - \sqrt{(y-1)} (1-2\sqrt{(x-6)}) = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



№ 4.

Дано: $\triangle ABC - 90^\circ - \triangle$, $DE \perp AC$, $E \in AB$, $\frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$

$DE \perp AB$, $\angle CED = 30^\circ$

н.к. $\alpha) \operatorname{tg} \angle BAC = ?$

$\beta) AC = \sqrt{7}$, $S_{\triangle CED} = ?$

Решение:

1) Д.н. CH - выс. в $\triangle ABC$

2) Пусть $AD = x \Rightarrow AC = 3x \Rightarrow CD = AC - AD = 2x$

3) $\triangle AED \sim \triangle AHC$ н.к. $\angle BAC$ - общ., $DE \perp AB$, $CH \perp AB \Rightarrow DE \parallel CH$

$\Rightarrow \frac{DE}{CH} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{DE}{y} \Rightarrow DE = \frac{y}{3}$; $\frac{AE}{AH} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{AE}{EH + AE} = \frac{1}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow AE = \frac{EH}{2}$

4) н.к. $DE \parallel CH$, $\angle CED = 30^\circ \Rightarrow \angle ECH = 30^\circ$ } $\Rightarrow EH = \frac{CH}{2} = \frac{y}{2}$
 $\triangle CEH - 90^\circ - \triangle$

5) из (3), (4) $\Rightarrow AE = \frac{y}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{y}{4}$

6) $\operatorname{tg} \angle BAC = \frac{DE}{AE} = \frac{\frac{y}{3}}{\frac{y}{4}} = \frac{4}{3}$

7) по т. Пиф в $\triangle AED$ $AE^2 + DE^2 = AD^2$

$\left(\frac{y}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = x^2 \Rightarrow \frac{25y^2}{16 \cdot 9} = x^2 \Rightarrow y^2 = \frac{x^2 \cdot 16 \cdot 9}{25}$

8) по т. Пиф в $\triangle CEH$

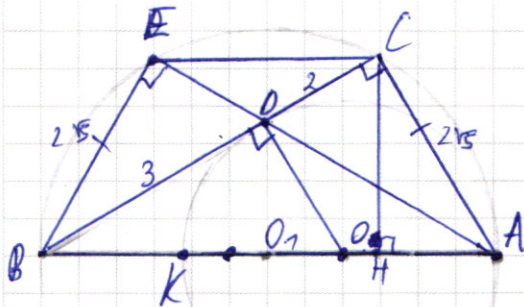
$CE^2 = EH^2 + CH^2 \Rightarrow CE^2 = \left(\frac{y}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{5y^2}{4} \Rightarrow CE = \frac{\sqrt{5}}{2} y$

9) $S_{\triangle CED} = \frac{1}{2} \cdot DE \cdot CE \cdot \sin \angle CED = \frac{1}{2} \cdot \frac{y}{3} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} y = \frac{\sqrt{5} y^2}{24}$

10) из (7), (9) $\Rightarrow S_{\triangle CED} = \frac{x^2 \cdot 16 \cdot 9 \cdot \sqrt{5}}{25 \cdot 24} = \frac{6\sqrt{5} x^2}{25}$

11) $AC = 3x = \sqrt{7} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{7}}{3}$ 12) из (10), (11) $\Rightarrow S_{\triangle CED} = \frac{6\sqrt{5}}{25} \cdot \frac{7}{9} = \frac{2\sqrt{5}}{75}$ Ответ: $S_{\triangle CED} = \frac{2\sqrt{5}}{75}$

№ 5.



Дано: Ω - окружность U - окружность
($O_1; R$) ($O_2; r$)

Ω кас. U - внеш. обр. в т. A
AB - гора Ω , BC - хор Ω B(кас Ω = т. D)
AD \cap Ω = E CD=2 BD=3
т.ч. r, R = ? Space = ?

Решение:

- 1) по т. о сек и кас } $\Rightarrow BD^2 = BK \cdot AB \Rightarrow 3^2 = (2R - 2r) \cdot 2R$
лучша AB \cap U = K } $g = 4R(R - r)$
- 2) Д.ч. OD - радиус в т. кас $\Rightarrow OD \perp BC \Rightarrow \angle BDO = 90^\circ$
~~знаем $\angle BDO = 90^\circ$ в этом треугольнике $BD^2 + DO^2 = BO^2$~~
- 3) т.ч. AB - гора $\Rightarrow \angle BCA = 90^\circ$ и $\angle BEA = 90^\circ$
- 4) из (2), (3), $\angle CHA$ - обм $\Rightarrow \triangle BDO \sim \triangle BCA \Rightarrow$
 $\Rightarrow \frac{BO}{AB} = \frac{BD}{BC} \Rightarrow \frac{2R - r}{2R} = \frac{3}{5} \Rightarrow 10R - 5r = 6R \Rightarrow r = \frac{4R}{5}$
- 5) из (1), (4) $\Rightarrow g = 4R(R - \frac{4R}{5}) \Rightarrow g = \frac{4R^2}{5} \Rightarrow R = \frac{3\sqrt{5}}{2} \Rightarrow$
 $\Rightarrow r = \frac{3\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$
- 6) из (3) $\Rightarrow \triangle ACE$ - пр.
- 7) $BACE \in \Omega \Rightarrow BACE$ - лис пр.
- 8) по т. Лип $\triangle BCA$ $AC^2 + BC^2 = AB^2 \Rightarrow AC = 2\sqrt{5}$
- 9) $\triangle EDC \sim \triangle BDA$ (т.ч. BACE - пр.) $\Rightarrow \frac{EC}{AB} = \frac{CD}{BD} \Rightarrow EC = 2\sqrt{5}$
- 10) $S_{BACE} = \frac{EC + AB}{2} \cdot CH = \frac{2\sqrt{5} + 3\sqrt{5}}{2} \cdot CH = \frac{5}{2}\sqrt{5} \cdot CH$
- 11) по т. Лип $\triangle ACH$ $CH^2 = AC^2 - AH^2 = AC^2 - (\frac{AB - EC}{2})^2 =$
 $= \frac{15 \cdot 5}{4} \Rightarrow CH = \frac{5}{2}\sqrt{3}$
- 12) из (10), (11) $\Rightarrow S_{BACE} = \frac{5}{2}\sqrt{5} \cdot \frac{5}{2}\sqrt{3} = \frac{25\sqrt{15}}{4}$
ответ: $\frac{3\sqrt{5}}{2}, \frac{6\sqrt{5}}{5}, \frac{25\sqrt{15}}{4}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}$$

$$x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \quad x^2 - 12xy + 36y^2 = xy - 6y - x + 6$$

$$34y^2 + 10y - 13xy + 13x - 26 = 0$$

$$2(17y^2 + 5y - 14) - 13xy(x-1) = 0 \quad (x-6)^2 + (x-6) + 2(y-1)^2 + 6(y-1)$$

$$D = 25 + 4 \cdot 14 \cdot 17$$

$$(x-6)(2x-12) + 2(y-1)(2y-2)$$

$$(x-6) - 6(y-1)$$

$$x - 6y = \sqrt{(y-1)(x-6)}$$

$$(x-6)^2 + 2(y-1)^2 - 18 = 0 \quad x^2 - 12xy + 36y^2 + 12xy - 36y^2$$

$$(x-6y)^2 - 36y^2 + 12xy - 12x - 4y + 20 = 0$$

$$(x-6y)^2 - 12x(y-1) - 4(3x+y-5) = 0 \quad (x-6) - 6(y-1)$$

$$x^2 - 12x + 2y^2 - 4y + 20 = 0 \quad 12 \pm \sqrt{-2(y+2)(y-4)}$$

$$D = 144 - 4 \cdot (2y^2 - 4y + 20) = 24y^2 + 16y - 80 = -8y^2 - 16y + 64 = 0$$

$$D = 4 + 32 = 36 \quad \frac{-2 \pm 6}{2} = -1 \pm 3 = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{-8(y+4)(y-2)}}{2} = 6 \pm \sqrt{-2(y+4)(y-2)}$$

$$(\pm \sqrt{-2(y+4)(y-2)})^2 + 2y^2 - 4y - 16 = 0 \quad \frac{12 \pm 10}{2} = 6 \pm 4 = 2$$

$$-2(y^2 - 2y + 4y - 8) + 2y^2 - 4y - 16 = 0 \quad 2 - 6 \cdot 0 = \sqrt{2 \cdot 0 - 6 \cdot 0 - 2 + 6}$$

$$-2y^2 + 4y - 4y + 16 + 2y^2 - 4y - 16 = 0 \quad 2 = 2$$

$$-8y = 0 \Rightarrow y = 0 \quad x = 2 \quad 2^2 + 2 \cdot 0^2 - 12 \cdot 2 - 4 \cdot 0 + 20 = 0$$

$x - 6 = \frac{34y^2 - 62x + 10y - 13}{y-1}$
 $x - 6 = \frac{34(y-1)^2 - 13}{y-1}$
 $x - 6 = \frac{34y^2 - 68y + 34 - 13}{y-1}$
 $x - 6 = \frac{34y^2 - 68y + 21}{y-1}$

$(t-6k)^2 = tk$
 $t^2 - 12tk + 36k^2 = tk$
 $t - 6k = \sqrt{tk}$

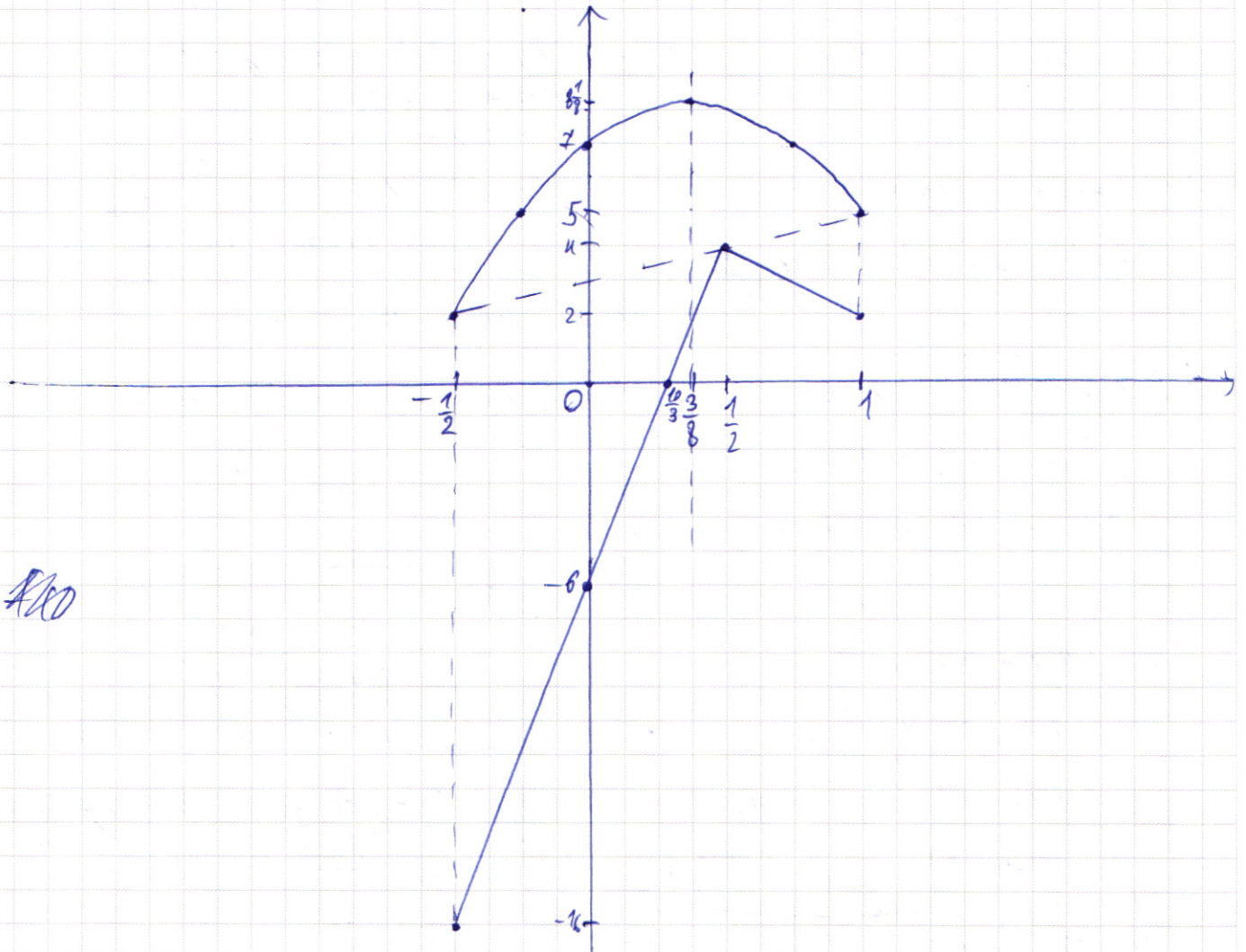
$t^2 + 2k^2 - 18 = 0$
 $t^2 - 13tk + 36k^2 = 0$
 $34k^2 - 13tk - 18 = 0$
 $t = \frac{34k^2 - 18}{13k}$

$x - 6 = \frac{1}{t} + y - 18 = k$

№6.

$$8x - 6(2x-1) \leq ax + b \leq -8x^2 + 6x + 7 \quad x \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$$

Зададим функции $g(x) = 8x - 6(2x-1)$ $h(x) = -8x^2 + 6x + 7$
 $f(x) = -8x^2 + 6x + 7$



Апо

$f(x)$ - парабола $x_0 = \frac{-6}{-8 \cdot 2} = \frac{3}{8}$ $f(x_0) = -8 \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^2 + 6 \cdot \frac{3}{8} + 7 = 8\frac{1}{8}$
 $f(1) = -8 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 + 7 = 5$ $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 6 \cdot \frac{1}{2} + 7 = -2 - 3 + 7 = 2$
 $f(0) = 7$

$g(x) = 8x - 6(2x-1) \Rightarrow x < \frac{1}{2} \Rightarrow g\left(\frac{1}{2}\right) = 4$

$x > \frac{1}{2} \Rightarrow g(x) = -4x + 6$ $g(1) = 2$

$x < \frac{1}{2} \Rightarrow g(x) = 20x + 6$ $g\left(-\frac{1}{2}\right) = -16$

$g(0) = -6$ $g(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{10}{3}$

~~... [25/2]~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(x)$ и $g(x)$ — функции, заданные на отрезке $[a, b]$.
 $f(x)$ и $g(x)$ — функции, заданные на отрезке $[a, b]$.
 $f(x)$ и $g(x)$ — функции, заданные на отрезке $[a, b]$.
 $f(x)$ и $g(x)$ — функции, заданные на отрезке $[a, b]$.

$f(x)$ и $g(x)$ — функции, заданные на отрезке $[a, b]$.
 $f(x)$ и $g(x)$ — функции, заданные на отрезке $[a, b]$.
 $f(x)$ и $g(x)$ — функции, заданные на отрезке $[a, b]$.
 $f(x)$ и $g(x)$ — функции, заданные на отрезке $[a, b]$.

$$(2) + (3) \quad \frac{1}{2}a + b \leq 7, (1) \Rightarrow y \leq \frac{1}{2}a + b \leq 7$$

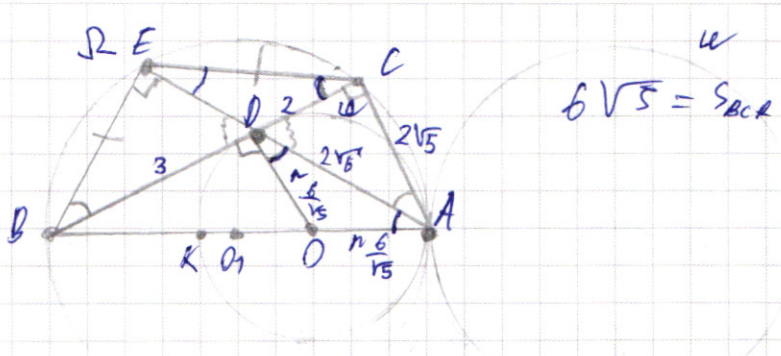
Это возможно, только когда прямая $f(x)$ содержит
 все эти точки $\Rightarrow \frac{1}{2}a + b = 4 \quad -\frac{1}{2}a + b = 2 \quad a + b = 5 \Rightarrow$
 $\Rightarrow b = 3 \quad a = 2$

Ответ: (2, 3)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



$$6\sqrt{5} = S_{BCA}$$

$$3^2 + n^2 = (2R - n)^2$$

$$(2R - 2n) \cdot 2R = 3^2 \quad 4R^2 - 4Rn = 3^2$$

$$(2R - n)^2 - n^2 = 3^2 \quad 4R^2 - 4Rn + n^2 - n^2 = 3^2$$

$$\frac{n}{AC} = \frac{3}{5} = \frac{2R - n}{2R} \Rightarrow 10R - 5n = 6R \quad R = \frac{5n}{4}$$

$$2 \cdot 2R(R - n) = \frac{5n \cdot 3}{4} \quad \left(\frac{5n}{4} - n\right) = 5n \cdot \frac{n}{4} = 3^2$$

$$n^2 = \frac{3^2 \cdot 4}{5} \quad n = \frac{6}{\sqrt{5}} \quad R = \frac{5 \cdot 6}{4 \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} \cdot 3}{2} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

$$(3\sqrt{5})^2 = 9 \cdot 5 = 5 \cdot 5 + AC^2 \quad 8x - 6(2x - 1) = 8x - 12x + 6 = -4x + 6$$

$$4 \cdot 5 = AC \Rightarrow AC = 2\sqrt{5}$$

$$4 + 4 \cdot 5 = 4 \cdot 6 = ED \cdot ? \quad 8x + 12x - 6 = 20x - 6$$

$$ED \cdot DA = AE \quad 20 \cdot 0 - 6 = -6$$

16. $8x - 6(2x - 1) \leq ax + b \leq -bx^2 + 6x + 7 \quad \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$

$$-8x^2 + 6x + 7$$

$$D = 36 + 4 \cdot 8 \cdot 7 = 4 \cdot 9 + 4 \cdot 8 \cdot 7 = 4(9 + 8 \cdot 7)$$

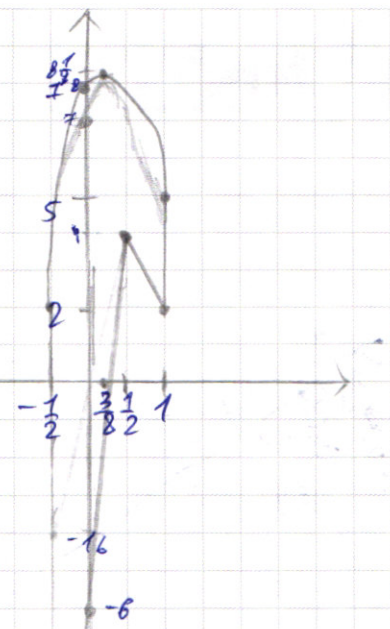
$$\frac{x}{y} = x \cdot y^{-1} = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$$

$$-8 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 6 \cdot \frac{3}{2} + 7 = -8 \cdot \frac{9}{4} + 9 + 7 = -18 + 16 + 7 = 5$$

$$-8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 7 = -8 \cdot \frac{1}{4} - 3 + 7 = -2 - 3 + 7 = 2$$

$$\frac{3\sqrt{5} - 2\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot 8 \cdot \frac{1}{4} + 6 \cdot 1^2 + 7 = -8 + 6 + 7 = -8 + 13 = 5$$

$$(2\sqrt{5})^2 = 4 \cdot 5 = 20 \quad \frac{5 \cdot 15}{4} = \frac{75}{4}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1. $a, b, c \quad ax^2 - 2bx + c = 0$

$$D = 4b^2 - 4ac = 2\sqrt{b^2 - ac}$$

$$x_{1,2} = \frac{2b \pm 2\sqrt{b^2 - ac}}{2a} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} = \frac{aq \pm \sqrt{a^2 q^2 - a \cdot q q^2}}{a} = \frac{aq}{a} = q$$

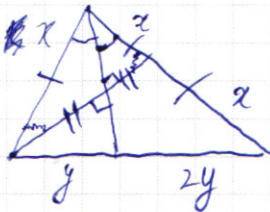
$$a q^3 = q$$

$$q(q^2 - 1) = 0$$

$$q(q^2 - 1) = 0$$

$$q^2 = 1 \quad (+)$$

№2.



$$3x + 3y = 900$$

$$x + y = 300$$

$$3y < 3x \quad y < x$$

$$x < 2x + 3y$$

$$2x < x + 3y$$

$$y < x < 3y$$

$$2y < 300 < 4y$$

$$75 < y < 150 \quad (+)$$

$$\frac{300}{4} = \frac{150}{2} = 75$$

№3.

$$x - 6y = \sqrt{2y^2 - 4y - x + 6} \quad x$$

$$x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0$$

$$x^2 - 12x + 36 + 2y^2 - 4y + 2 + 20 - 36 - 2 = 0$$

$$(x - 6)^2 + 2y^2 - 4y - 16 + 20 = 0$$

$$(x - 6)^2$$

$$(x - 6)^2 = x^2 - 12x + 36$$

$$y \in [-2; 4]$$

$$x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{8(y^2 - 2y - 8)}}{2}$$

или

$$D = 144 - 4(2y^2 - 4y + 20) =$$

$$144 - 8y^2 + 16y - 80 =$$

$$= -8y^2 + 16y + 64 =$$

$$= -8(y^2 - 2y - 8)$$

$$D = 4 + 4 \cdot 8 = 36$$

$$y_{1,2} = \frac{2 \pm 6}{2} = 1 \pm 3 = [-2; 4]$$

$$\frac{+}{-2} \quad \frac{+}{4}$$

$$x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}$$

$$x - 6y = \sqrt{y(x-6) - (x-6)}$$

$$x - 6y = \sqrt{(y-1)(x-6)}$$

$$x \in [6; +\infty) \Rightarrow y \in [1; +\infty)$$

$$x \in (-\infty; 6) \Rightarrow y \in (-\infty; 1)$$

$$x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0$$

$$x^2 - 12x + 2y^2 - 4y + 20 = 0$$

$$6 - 6 \cdot 4 = 6(y-1)/(6-6)$$

$$(x-6)^2 = (y-1)(x-6)$$

$$(x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18$$

$$x^2 - 12x + 36 + 2y^2 - 4y + 2 = 18$$

$$x^2 - 12x + 36 + 2y^2 - 4y + 2 + 20 = 0$$

$$x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0$$

$$38y^2 + 10y - 14x - 132$$

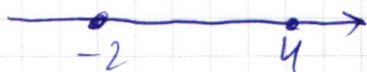
$$x^2 - 12x + 2(y^2 - 2y + 10) = 0$$

$$D = 144 - 4 \cdot 2(y^2 - 2y + 10) =$$

$$= -8y^2 + 16y + 144 - 80 = -8y^2 + 16y + 64$$

$$= -8(y^2 - 2y - 8) = -8(y+2)(y-4)$$

$$y \in [-2; 4]$$



$$x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{-8(y+2)(y-4)}}{2} = 6 \pm \sqrt{-2(y+2)(y-4)}$$

6; 4

6; -2

$$x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0$$

$$(x-6)^2 - 36 + 2y^2 - 4y + 2 + 20 = 0$$

$$(x-6)^2 + 2(y-1)^2 - 18 = 0$$

$$(x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18$$

$$y-1 = 3 \quad y = 4$$

$$y-1 = -3 \quad y = -2$$

$$(x-6)^2 + 2 = 18$$

$$(x-6)^2 = 16$$

$$x-6 = 4 \quad x = 10$$

$$x-6 = -4 \quad x = 2$$

$$2(2-1)^2$$

$$2 + (x-6)^2 = 18$$

$$(x-6)^2 = 16$$

$$x-6 = 4 \quad x = 10$$

$$x-6 = -4 \quad x = 2$$

$$6 - 6 \cdot 4 = -18$$

$$6 + 6 \cdot 2 = 18$$

$$y^2 - 4y + 2y - 8 = -2(y^2 - 2y - 4)$$

$$x(2-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18$$

$$-16 + 2(y-1)^2 = 18$$

$$2(y-1)^2 = 2$$

$$(y-1)^2 = 1$$

$$y-1 = 1 \quad y = 2$$

$$y-1 = -1 \quad y = 0$$

$$\frac{12 \pm 6}{2} = 6$$

$$6 \cdot 4 - 6 \cdot 4 - 6 + 6$$

$$6 \cdot -2 + 6 \cdot 2$$

$$-8y^2 + 16y + 64 + 2y^2 - 4y + 2 - 18 = 0$$

$$-6y^2 + 12y + 48 = 0$$

$$-6y^2$$

$$+12y$$

$$+48$$

$$-48$$

$$y^2 - 2y - 8 = 0$$

$$D = 4 + 32 = 36$$

$$y_{1,2} = \frac{2 \pm 6}{2} =$$

$$= 1 \pm 3 = [4$$

$$-2]$$

$$-2y^2 + 4y + 16 + 2y^2 - 4y + 2 - 18 = 0$$

$$0 \cdot y = 0$$