МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10 ШИФР ________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2-2bx+c=0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6}, \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD:AC=1:3$ и $DE\perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED=30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC=\sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD=2$, $BD=3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$8x-6|2x-1|\leqslant ax+b\leqslant -8x^2+6x+7$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2};1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 22$, $2\leqslant y\leqslant 22$ и $f(x/y)<0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1. $a\ \overset{aq}{b}\ \overset{aq^2}{c}\ q$ $\qquad ax^2-2bx+c=0$ $\qquad x=\frac{2b\pm2\sqrt{b^2-ac}}{2a}=\frac{b}{a}\pm\frac{\sqrt{b^2-ac}}{a}$

$c=\frac{b^2}{a}$ $\qquad D=\sqrt{4b^2-4ac}$

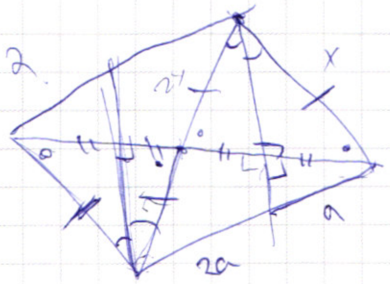
$q\pm\sqrt{q^2-aq^2}$

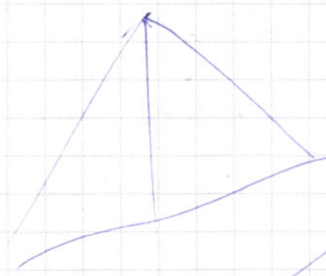
$q\pm q\sqrt{1-a^2}$

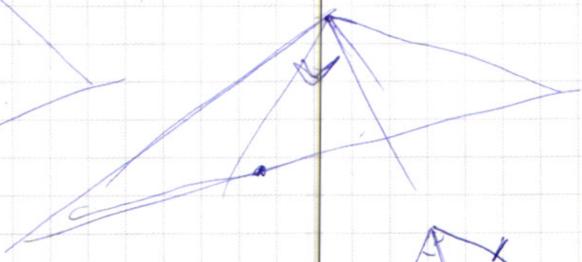
$a\quad aq\quad aq^2\quad aq^3 \qquad aq^3=q$

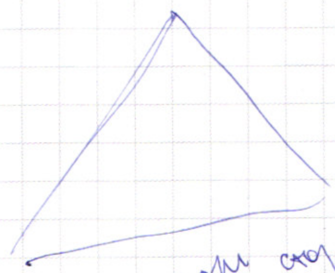
$aq^2=1=c.$

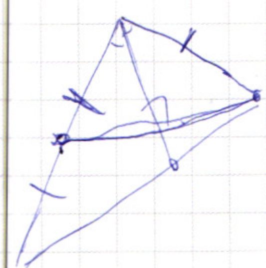
№2











$f(x)+f(y)=f(x)$

$f(x)>f(y)$ число: $3x+3a=3(x+a)$ 300

$f(x/y)+f(0)$ $3x>3a$

$x>a.$

$3a+x>2x$ $\qquad f(1)=0$ $\qquad 3a>x$, $x+a=300$

$3a>x$

$a>x/3$

сам сторон 2:1,10

$$\begin{cases} a>\frac{x}{3} \\ x>a \\ x+a=300 \end{cases}$$

$3a>x$

$4a>300$

$a>75$

x	a
299	1
225	75
224	76

300 0

$a=300-x$

$x=300-a$

151 149

$224-150=124-50=$
$=74.$

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(p)=[p/2]$ $\forall p$ - простое

$2\le x\le 22$

$2\le y\le 22$

$f(x/y)<0$

$f(1)=0$, $f(2)=1$, $f(3)=1$, $f(5)=2$

-149
75
74

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases} \quad =\sqrt{y(x-6)-x-6} \quad =\sqrt{(y-1)(x-6)}$$

$$\begin{cases} x^2-12xy+36y^2=xy-6y-x+6 \rightarrow x^2-13xy+36y^2+6y+x-6=0 \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \;|18 \end{cases}$$

$$-13xy-\cancel{2y^2}+12x+\cancel{4y}-20+\cancel{36y^2}+\cancel{6y}+x-6=0$$

$$34y^2-13xy+10y+13x-26=0$$

17

$x^2=6-x.$

$x^2+x-6=0$

$x=\left[\begin{matrix}-3\\2\end{matrix}\right.\; y=0$

$y(\quad) \quad (x+3)\;(\quad)+(x-2)\;13$

2.

$$x(13-13y)=26-10y-34y^2$$

$$x=\frac{26-10y-34y^2}{13(1-y)}$$

$|18$

$$\frac{y^2}{13^2}\cdot\frac{(13-5y-17y^2)^2}{(1-y)^2}+2y^2-\frac{12}{13}\quad\_\_\_\quad-4y+20=0.$$

$$=\frac{13-5y-17y^2}{13(1-y)}$$

$-17a^2-13ab=18$

$(1)-(2)=$

$(1)-18(2)=$

$-13ab-17a^2+18(18)$

$$x-6y=\sqrt{(y-1)(x-6)} \quad x>6y.$$

$b \quad a$

$x^2-12x+36+2y^2-4y+2.$

$a(b+1)$

$(x-6)^2+2\cdot(y-1)^2=18.$

$a+6-6(b+1)=a-6b.$

$(x-6)^2+2(y-1)^2=18.$

$$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ a^2+2b^2=18 \end{cases}$$

$a>6b$

$a=\sqrt{18-2b^2}$

$\sqrt{18-2b^2}-6b=\sqrt{ab}$

$a^2-12ab+b^2=ab, \quad a^2-13ab+b^2=0$

$-12ab-b^2=ab-18.$

$-13ab-b^2=-18$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} 18 = 13ab - b^2 \\ a^2 + 2b^2 = 18 \end{cases} \to a = \frac{18+b^2}{13b}.$$

$$\to \frac{(18+b^2)^2}{169 b^2} + 2b^2 = 18. \qquad b^2 = t.$$

$$18^2 + \cancel{t^2} + 36t + t^2 \cdot 358 - 18 \cdot 169 t = 0.$$

$$t^2(359) +$$

$t = 18.$

$$34^2 \cdot 18^2 + 18^2 - 2 \cdot 169 - 18^2 \cdot 169 \to 18^2 \cdot 169 + 34 \cdot 18^2 \cdot 32 + 18^2 = 0.$$

$$-34 \cdot 2 \cdot 18^2 + 18^2.$$

68 169

$169 - 34 = 155. - 34 = 121.$

78

$$t = 18 \cdot 121 \pm \sqrt{}$$

$$2\left(2 \cdot 17^2 + 169\right)$$

$289 + 169$

$17 \times 17 = 289$

$478 - 36 = 118$; $478 : 18 = 2$

$$\frac{2x+1}{-3} = \frac{y-1}{1} \qquad -8x - 4 = -3y + 3$$

$$\frac{x - x_1}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_1}{y_1 - y_2} \qquad \frac{x + 1/2}{-3/2} = \frac{y-1}{1-5}$$

$$y = \frac{7 + 8x}{3} \qquad \frac{7}{3} + \frac{8}{3}x$$

$$3y - 8x = 7$$

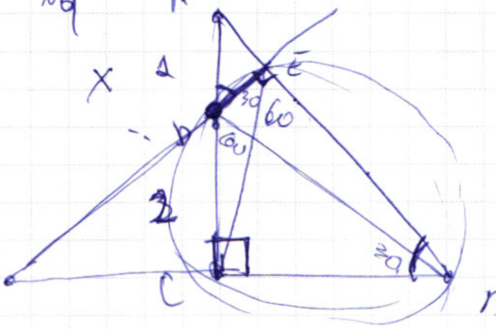
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

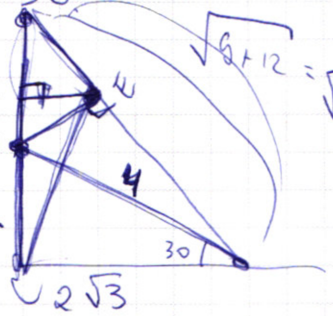
Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№9



$\angle CED = 30^\circ$



$\sqrt{9+12} = \sqrt{21}$

$-6x+7$

$3+7=$

$b = 1-a$

$a+b=5$

$\frac{1}{2}a+b=4$ $1-a=4$

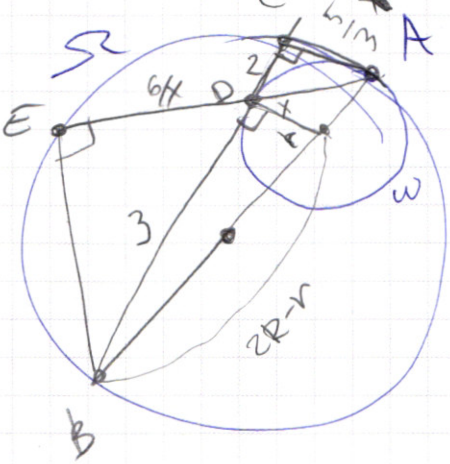
$$tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha\, tg\beta}$$

$3+2x$, $2x+3$.

$-\frac{1}{2}a = 3$

$a = -6$

$b = 7$



BACE

$CD = 2$

$BD = 3$

$x \to x + \frac{6}{x} = \frac{x^2+6}{x}$

$r = x$ $\quad \frac{r}{R} = \frac{x^2}{x^2+6}$

$$\frac{2R-r}{r} = \frac{3}{2} = 4$$

$$R = \frac{x^2+6}{x^2}r = 1 + \frac{6}{x^2}r$$

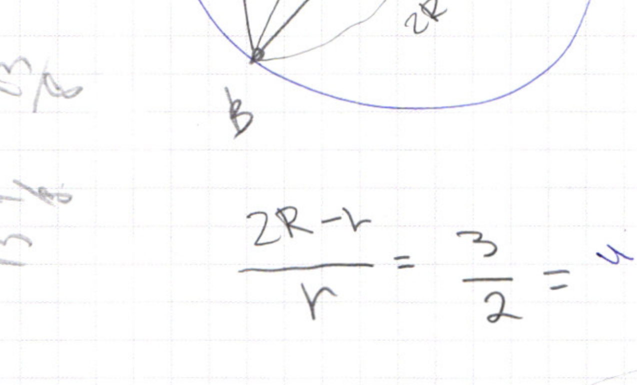
$$\frac{R}{r} = \frac{x+\frac{6}{x}}{x} = \frac{x^2+6}{x^2}$$

$3r = 4R - 2r$ $\quad 5r = 4R$

$$R = \frac{r(x^2+6)}{x^2}$$

$$3r = 4r + \frac{6r}{x^2} - 2r$$

$8x-6\,|2x-1| \le ax+b \le -8x^2+6x+7$



$8x$ $2x-1>0$ $x>1/2$

$+12x+6$ $8x+12x+6$ $20x+6$ $10+6=16$

$20+6=26$

$x = \sqrt{21}$

$x \in [-\frac{1}{2}; 1]$

$1\frac{7}{8}$ $\frac{1}{8}7$

$\frac{7}{8}$ $\frac{6}{8}$

$\frac{6}{8}$ $\frac{1}{8}$

$\frac{1}{2}$ 6

$-8x^2+6x+7$.

верш $\frac{3}{8}$

$$-\frac{9}{8} + \frac{9}{4} + 7 = \frac{9}{8} + 7$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1. $a \quad b \quad c$ $\quad q$ – ~~частное~~ знаменат. геом прогр.

$b = aq, \quad c = aq^2$

$ax^2 - 2bx + c = 0$

$$x = \frac{2b \pm \sqrt{4b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} = \frac{aq \pm \sqrt{a^2q^2 - a^2q^2}}{a} = q$$

=> 4-й член прогрессии $= q$

прогрессия:

$a \quad b \quad c \quad q$

$b = aq, \quad c = aq^2, \quad q = aq^3$

$q = aq^3$

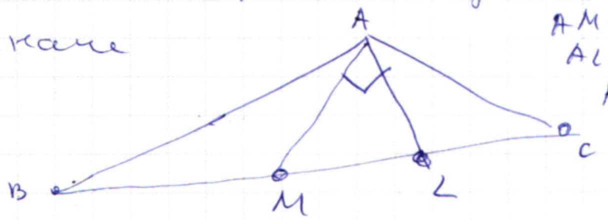
$1 = aq^2$ – 3-й член прогрессии

$c = aq^2 = 1.$

Ответ: $c = 1.$

№2. I бисс ⊥ медиане:

• бисс не может быть ⊥ медиане из того же угла 4каке



AM – медиан

AL – бис

$AM \perp AL$

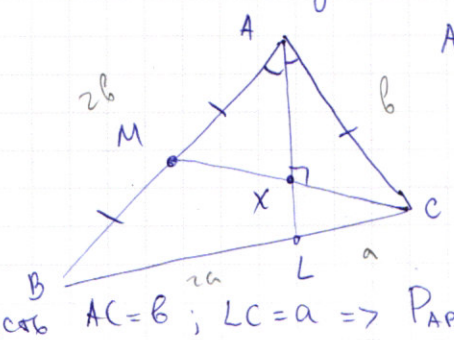
$\angle BAC = 2\angle BAL$

$\angle BAL > 90°$

$\angle BAL = \angle BAM + \angle MAL$

$=> \angle BAC > 180$?!

• Если бис ⊥ медиане => она делит сторону (биссектр). 2 : 1.



AL – бис. MC – медиан $AL \perp MC$ $AL \cap CM = X$

$=> \triangle MAC$ – равнобедр

т.к. AX – бис. и высота

$=> AM = AC = MB$

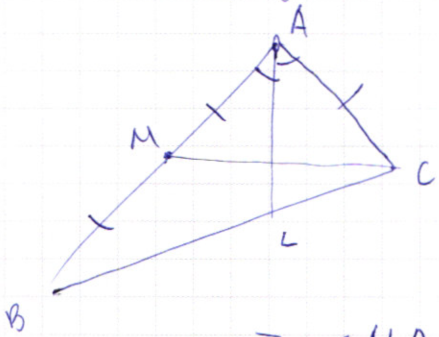
т.к AL – бис => $\frac{BA}{AC} = \frac{BL}{LC} = 2 : 1$

пусть $AC = b$; $LC = a$ => $P_{ABC} = b + 2b + a + 2a = 3(a+b)$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

II Если биссектр. делит сторону 2:1, то она $\perp$ медиане к большей стороне:



AL – бис
CM – медиана

Т.к $\frac{BL}{LC} = \frac{2}{1} \Rightarrow \frac{BA}{AC} = 2:1$.

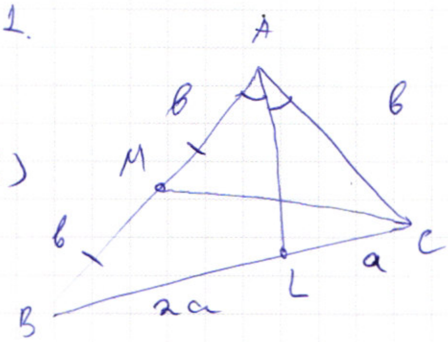
$\Rightarrow AC = \frac{1}{2} BA = MA$

$\Rightarrow \triangle MAC$ – р/б ~~тк~~ $\Rightarrow$ AL – биссектр, высота в $\triangle MAC$.

$\Rightarrow AL \perp MC$ чтд.

Итог: бис $\perp$ одной из медиан $\Leftrightarrow$ бис. делит сторону в отношении 2:1.

Периметр таких $\triangle$:



пусть:
$LC = a$
$AC = b$.

$P = 3a + 3b = 3(a+b)$

$P = 900$

$\Rightarrow a + b = 300$

Так же должно выполняться нер-во треугольника:

1) $AC + CB > AB$
$b + 3a > 2b \Rightarrow 3a > b$

2) $BA + AC > BC \Rightarrow 3b > 3a \Rightarrow b > a$

3) $AB + BC > AC \Rightarrow 2b + 3a > b \Rightarrow 3a > -b$ V.

• Итог: сколько есть $a, b \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} a + b = 300 & \rightarrow b = 300 - a \\ 3a > b & \rightarrow 3a > 300 - a \rightarrow 4a > 300 \\ b > a & \rightarrow 300 - a > a \rightarrow 300 > 2a \end{cases} \quad \begin{cases} a > 75 \\ a < 150 \end{cases}$$

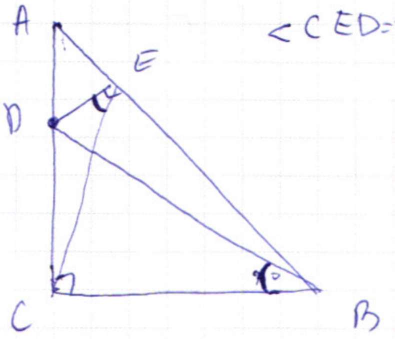
Зная a b определяется однозначно, и $b \in \mathbb{N}$.

a подходит равное $\underbrace{76, 77, \ldots 149}_{74 \text{ варианта}}$ $\Rightarrow$ пар (a, b) 74 шт.

• Зная a и b, мы знаем стороны $\triangle$, а по ним $\triangle$ определяется однозначно $\Rightarrow$ Ответ: таких $\triangle$ 74 штуки

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4 а)



$\angle CED = 30^\circ$

1) $DEBC$ – вписанный т.к $\angle DEB = 90^\circ = \angle DCB$ их $\Sigma = 180^\circ$

$\Rightarrow \angle DEC = 30^\circ = \angle DBC$

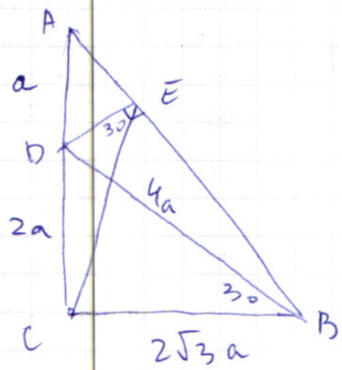
$\Rightarrow$ ~~всп~~

2) Пусть $DB = 4a \Rightarrow DC = DB \cdot \sin 30 = 2a$ ~~$\Rightarrow AD = a$~~

$BC = DB \cdot \cos 30 = 2a\sqrt{3}$

Т.к $\frac{AD}{AC} = \frac{1}{3} \Rightarrow AD : DC = 1:2$

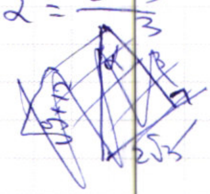
$\Rightarrow AD = a \rightarrow AC = 3a$



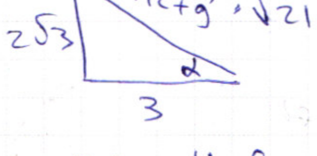
$$tg\angle BAC = \frac{2\sqrt{3}a}{3a} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Ответ: $tg\angle BAC = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

б) ~~cos∠~~ $\angle BAC = \alpha$. Т.к $tg\,\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3}$



$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{21}}$ $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{7}}$



Т.к известно, что $AC = \sqrt{7} \Rightarrow AD = \frac{\sqrt{7}}{3}$; $DC = \frac{2}{3}\sqrt{7}$

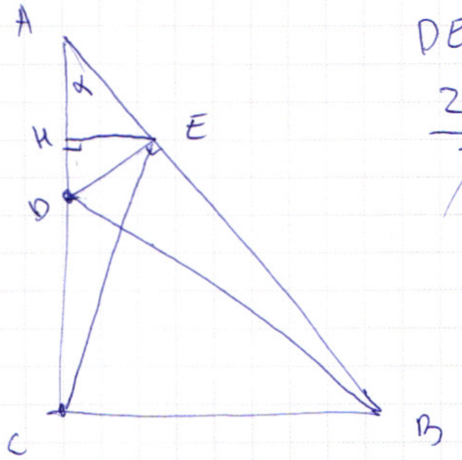
~~но подставив это позже, пока будем решать~~

Р $\triangle DAE$: $\angle DAE = \alpha$ $AD = \frac{\sqrt{7}}{3}$

$\Rightarrow DE = AD \cdot \sin\alpha = \frac{2}{3}$ $EA = AD \cdot \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$S_{\triangle DAE} = \frac{DE \cdot AE}{2} = \frac{AD \cdot HE}{2}$ (где HE – высота из (·) E на AD)

№4б (продолжение)



$DE \cdot AE = EH \cdot DA$

$\frac{2}{\cancel{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = EH \cdot \frac{\sqrt{7}}{\cancel{3}}$

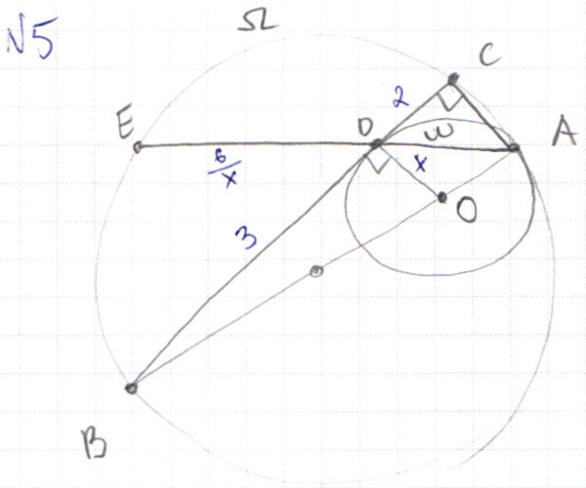
$EH = \frac{2}{\sqrt{21}}$

$S_{\triangle DEC} = \frac{DC \cdot EH}{2} = \frac{\frac{2}{3}\sqrt{7} \cdot \frac{2}{\sqrt{21}}}{2}$

$S_{\triangle DEC} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

Ответ: $S_{\triangle DEC} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

№5



R - радиус Ω
r - радиус ω

| R - ?
| r - ?
| S_{BACE} - ?

- т.к окр. ω и Ω касаются, то их центры лежат на прям BA и гомотетией в (.) A можно перевести ω → Ω с коэффициентом $\frac{EA}{DA} = \frac{R}{r}$ (т.к (.) D перейдет в (.) E при ω → Ω)

отн Ω:

- Степень (.) D = BD · DC = 3 · 2 = AD · ED
  пусть AD = x ⇒ ED = $\frac{6}{x}$
  ⇒ AE = $x + \frac{6}{x}$

$\frac{R}{r} = \frac{EA}{DA} = \frac{x + \frac{6}{x}}{x} = \frac{x^2+6}{x^2}$

- O - центр ω (O ∈ BA)
  OD ⊥ BC т.к касательная - BC
  AC ⊥ BC т.к AB - диаметр

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5 (продолж)

$\Rightarrow$ в угле CBA : $OD \parallel AC$ $\Rightarrow$ по т. Фалеса:

$BO = 2R - r$
$OA = r$

$$\frac{BD}{DC} = \frac{BO}{OA} = \frac{3}{2} = \frac{2R-r}{r}$$

Итого: $\begin{cases} \frac{R}{r} = \frac{x^2+6}{x^2} \\ \frac{2R-r}{r} = \frac{3}{2} \rightarrow 4R - 2r = 3r \rightarrow 4R = 5r \end{cases}$

подставим: $\frac{R}{r} = \frac{5}{4} = \frac{x^2+6}{x^2}$

$$\Rightarrow 5x^2 = 4x^2 + 24$$
$$x^2 = 24$$

$\triangle DCA$: $\angle DCA = 90°$ он прямоуг

$x = \sqrt{24}$ $\quad ED = \frac{6}{x} = \frac{6}{\sqrt{24}}$

$$\Rightarrow CA = \sqrt{DA^2 - DC^2} = \sqrt{24-4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$\triangle BED$: ($\angle BEA = 90°$ т.к BA - диаметр)

$$BE = \sqrt{BD^2 - ED^2} = \sqrt{9 - \frac{36}{x^2}} = \sqrt{9 - \frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{15}{2}}$$

$$S_\triangle BED = \frac{ED \cdot BE}{2} = \frac{6 \cdot \sqrt{15}}{\sqrt{24} \cdot \sqrt{2} \cdot 2} = \frac{3 \cdot \sqrt{5}}{2 \cdot 2} = \frac{3}{4}\sqrt{5}$$

$2\sqrt{2}\sqrt{3}$

$$S_\triangle CBA = \frac{CA \cdot BC}{2} = \frac{\sqrt{20} \cdot 6}{2} = 6\sqrt{5}$$

$$S_\triangle DCA = \frac{DC \cdot CA}{2} = \frac{2 \cdot \sqrt{20}}{2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$\measuredangle \triangle ECA$:

~~cos~~ $\sin\angle EAC$ найдем из $\angle DCA$:

$$\sin\angle EAC = \frac{DC}{DA} = \frac{2}{x} = \frac{2}{\sqrt{24}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\Rightarrow S_{ECA} = \frac{EA\cdot CA\cdot \sin\angle EAC}{2} = \frac{\left(\frac{6}{\sqrt{24}}+\sqrt{24}\right)\cdot\sqrt{20}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}}{2} =$$

$$= \frac{30\cdot \cancel{2}\sqrt{5}}{\sqrt{24}\cdot\sqrt{6}\cdot\cancel{2}} = \frac{15\sqrt{5}}{6} = \frac{5\sqrt{5}}{2}$$

$$S_{BECA} = S_{ECA} + S_{EBD} + (S_{BCA} - S_{DCA}) = \frac{5\sqrt{5}}{2} + \frac{3}{4}\sqrt{5} +$$

$$+ (6\sqrt{5} - 2\sqrt{5}) = \frac{13}{4}\sqrt{5} + 4\sqrt{5} =$$

$$= \left(7\frac{1}{4}\right)\cdot\sqrt{5} = \frac{29}{4}\sqrt{5}$$

~~Ответ.~~

• $\measuredangle \triangle BCA$: $AB = 2R = \sqrt{BC^2 + CA^2} = \sqrt{36+20} =$

$$= 2\sqrt{9+5} = 2\sqrt{14}$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{14} \Rightarrow r = \frac{4}{5}R = \frac{4\sqrt{14}}{5}$$

Ответ: $R = \sqrt{14}$; $r = \frac{4\sqrt{14}}{5}$; $S_{BECA} = \frac{29}{4}\sqrt{5}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

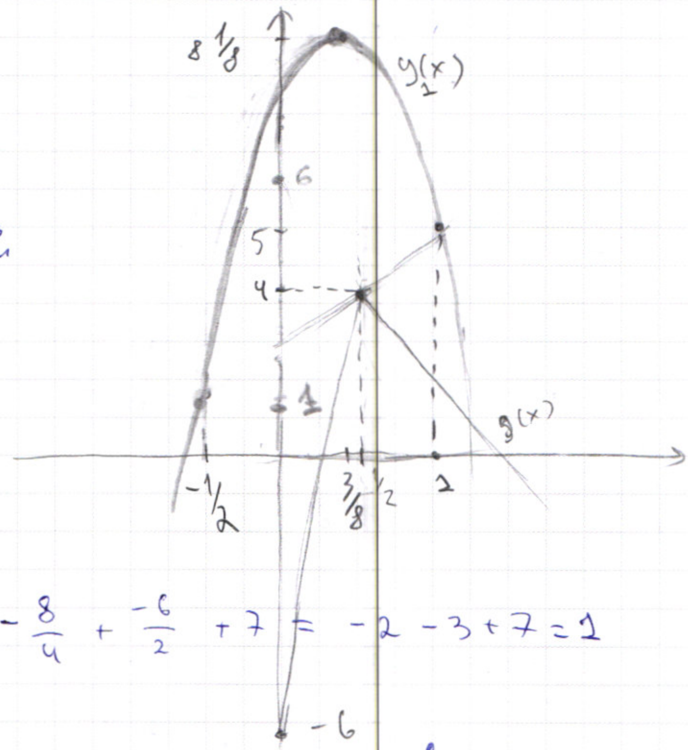
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6 $(a;b)$ - ?

$$\begin{cases} 8x-6|2x-1| \leq ax+b \\ ax+b \leq \overbrace{-8x^2+6x+7}^{y_1(x)} \end{cases}$$



• исслед: $-8x^2+6x+7$ ← парабола ветвями вниз.

вершина в (·) $\frac{3}{8}$

$-8\left(\frac{3}{8}\right)^2+6\cdot\frac{3}{8}+7=-\frac{9}{8}+\frac{9}{4}+7=$

$=\frac{9}{8}+7=8\frac{1}{8}$

в (·) $-1/2$ $\quad y_1(-1/2)=-\frac{8}{4}+\frac{-6}{2}+7=-2-3+7=1$

$y_1(1)=5$

• $ax+b \leq y(x) \Rightarrow$ на промеж $[-1/2;1]$ $ax+b$ лежит ниже параболы.

• Исслед $8x-6|2x-1| \cancel{\leq} g(x)$

• при $x \geq 1/2$ $\quad g(x)=8x-12x+6=6-4x.$

$g(1/2)=8\cdot 1/2=4$ построим на графике

• при $x<1/2$ $\quad g(x)=8x+6(2x-1)=20x-6$

$g(0)=-6.$ $\quad g(-1/2) \leq y_1(-1/2)$ - видно из графика

~~* пересеч. прямых $g(x)$ с параболой $y(x)$~~

~~• $20x-6=-8x^2+6x+7$~~

~~$8x^2+14x-13=0$~~

~~$x=$~~

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

№6 (продолжение)

• подумаем про $\underbrace{ax+b}_{f}$:

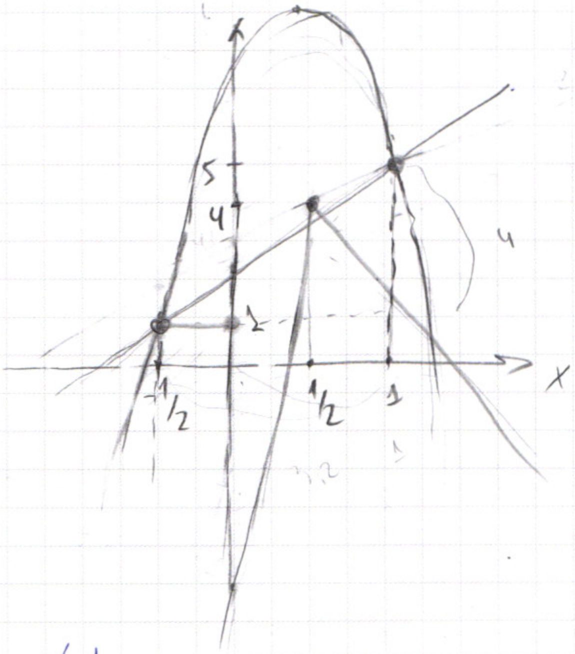
смотрим на график:

в (·) 1

$f(1) \le 5$ (т.к ограничено $y_1(x)$)

$f(1/2) \geq 4$ (т.к ограничено $g(x)$ снизу).

$f(-1/2) \le 1$ (т.к ограничено $y_1(x)$)



=> $f(x)$ должна пересекать прямую $y = 1/2$ не выше точки $\left(\frac{1}{2}; 4\right)$

• $f(x)$ ограничена, как видно по графику прямой через (·) $(-1/2; 1)$ и $(1; 5)$ (прямая $Z(x)$).

$Z(x) = \cancel{\frac{x+1/2}{-1/2-1}}$

т.е $f(x)$ лежит ниже $Z(x)$, может пересекаться с ней только в точках $-1/2$ и 1.

$\cancel{Z(1/2)}$ иначе прямая $f(x)$ вышла бы за границы параболы $y_1(x)$ на промежутке $x \in [-1/2; 1]$.

$Z(x) = \frac{7}{3} + \frac{8}{3}x$ т.к по 2м (·) прямые - однозначн

$Z(-1/2) = \frac{7}{3} + \frac{-4}{3} = 1$ $\quad Z(1) = \frac{7}{3} + \frac{8}{3} = 5$ ✓

=> опр-е $z(x)$ - правильное. $\quad Z(1/2) = \frac{7}{3} + \frac{4}{3} = \frac{11}{3} < 4$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6 (продолж)

но в (.) $1/2$ $f(x)$ должна быть > 4 (иначе пересечет $g(x)$)

– противоречие $\Rightarrow$ таких a, b не $\exists$.

Ответ: таких пар $(a; b)$ не существует

$(a, b) \in \varnothing$.

№7 $f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(p)=[p/2]$

· Если $f(x/y)<0 \Rightarrow f(\frac{x}{y})+f(y)=f(\frac{x}{y}\cdot y)=f(x)$

что бы $f(\frac{x}{y})<0$ $f(y)>f(x)$

т.к $x\in[2;22]$ и $y\in[2;22]$ найдем все значен.

x	$f(x)$
1 - простое	$[\frac{1}{2}]=0$
2 - пр	1
3 - пр	1
$4=2\cdot2$	$1+1=2$
5 - пр	2
$6=2\cdot3$	$1+1=2$
7 - пр	3
$8=4\cdot2$	$2+1=3$
$9=3\cdot3$	~~4~~ $1+1=2$
$10=2\cdot5$	$1+2=3$
11 - пр	5
$12=3\cdot4$	$1+2=3$
13 - пр	6
$14=7\cdot2$	$3+1=4$
$15=3\cdot5$	$1+2=3$
$16=4\cdot4$	$2+2=4$
17 - пр	8
$18=9\cdot2$	$2+1=3$
19 - пр	9
$20=4\cdot5$	$2+2=4$
$21=7\cdot3$	$3+1=4$
$22=2\cdot11$	$5+1=6$

будем искать $f(x)$ по формулам
если x-простое, то $f(x)=[\frac{x}{2}]$
если x-составн, то разобьем на 2 множителя. так как мы идем с меньших чисел к большим, то все значение уже известны. и воспользуемся формулой $f(ab)=f(a)+f(b)$

ф-ие ~~$f(x)$~~ определена на полож, так что

$f(\frac{x}{y})<0 \Rightarrow \frac{x}{y}\neq1$ т.к $f(1)=0$

$\Rightarrow x\neq y$

Ищем # пар ~~где $x\neq y$ и $f(x)\neq f(y)$~~ $a\neq b: f(a)\neq f(b)$

Тогда если $f(a)>f(b)$ то $y=a$, $x=b$ подходит

Если $f(b)>f(a)$ то $y=b$, $x=a$ подходит.

Всего различных значений

$f(x)=$ ~~86~~ $\{0, 1, 2, 3, 5, 4, 8, 9, 6\}$

0 — 1шт, 1 — 2шт., 2 — 4шт, 3 — 6шт, 5 — 1шт, 4 — 4шт, 8 — 1шт, 9 — 1шт, 6 — 2шт

посчитаем сколько раз встречаются.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N7 (продолж)

#пар: ~~0 1~~ 2 → 2 $\# \{0\} \subset \{1, 2 \ldots 9, 6\} = 2+4+6+1+4+1+1+2 = 21$

~~значений~~ $\# \{1\} \subset \{2, 3 \ldots 9, 6\} = 2 \cdot (22-3) = 2 \cdot 19 = 38$

(a, b) где $f(a) = \{..\}$ $\# \{2\} \subset \{3 \ldots 6\} = 4 \cdot 15 = 60$

$\# \{3\} \subset \{5, \ldots 6\} = 6 \cdot 9 = 54$

$\# \{5\} \subset \{4, \ldots 6\} = 1 \cdot 8 = 8$) 120

$\# \{4\} \subset \{8, \ldots 6\} = 4 \cdot 3 = 12$

$\# \{8\} \subset \{9, 6\} = 3$

$\# \{9\} \subset \{6\} = 2$) 5

$25 + 59 + 114 = 84 + 114 =$
$= 198$

Ответ: Таких $(x; y)$ 198 пар.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 $\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$

$\begin{cases} x-6y=\sqrt{(x-6)(y-1)} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$

ОДЗ: $\begin{cases} x \geq 6y \\ x \geq 6 \\ y \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 6y \\ y \geq 1. \end{cases}$

$(x^2-6\cdot 2x+36)+(2y^2-4y+2)-18=0$

$(x-6)^2+2(y-1)^2-18=0$

Один из ответов:
$y=1$
$x=6$

$\begin{cases} x-6y=\sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2+2(y-1)^2-18=0 \end{cases}$

$x-6=a$
$y-1=b$.

$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ a^2+2b^2=18 \end{cases}$ $\begin{cases} a\geq 6b \\ b\geq 0 \end{cases}$ $- \begin{cases} a^2+36b^2-12ab-ab=0 \\ a^2+2b^2=18 \end{cases}$

$\begin{cases} 34b^2-13ab+18=0 \\ a^2+2b^2=18 \end{cases}$ $a=\dfrac{34b^2+18}{13b}$

$\leftarrow$ подстав.

$t=b^2$

$$\frac{(34t+18)^2}{169t}+2t=18$$

$34^2t^2+18^2+34\cdot 2\cdot 18t+2\cdot 169t^2-18\cdot 169t=0$

$t^2(34^2+2\cdot 13^2)$ ~~$+34\cdot 2\cdot 18t$~~ $-t(18\cdot 101)+18^2=0$

$t^2(2\cdot 478)-t(1818)+18^2=0$

$$t=\frac{1818\pm\sqrt{18^2\cdot 101^2-4\cdot 2\cdot 478\cdot 18^2}}{4\cdot 478}=$$

т.к $t=b^2$, то подойдет корень с $+$