

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 14

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x - 1|}{4x^2 - 12x + |x| \cdot |x - 3|} \leq 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 300 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy}, \\ 2y + x^2 = 9. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D . Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 15, а радиус окружности равен 6.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED , если известно, что $AC = \sqrt{29}$, $BC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$, а $\angle CED = 45^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x; y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| > 6, \\ x^2 - 2x - 3y + y^2 \leq 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = p$ для любого простого числа p . Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $3 \leq x \leq 19$, $3 \leq y \leq 19$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 1

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x-1|}{4x^2 - 12x + |x||x-3|} \leq 0$$

рассмотрим 4 случая:

1) $x < 0$ 2) $0 \leq x < 1$ 3) $1 \leq x < 3$ 4) $3 \leq x$

раскроем модули в соответствии с этими случаями

1) $x < 0$

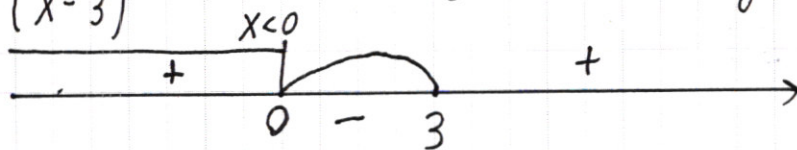
$$\frac{x^2 - 2x + 5 + 4x - 4}{4x^2 - 12x + x^2 - 3x} \leq 0$$

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{5x^2 - 15x} \leq 0$$

$$\frac{(x+1)^2}{x(x-3)} \leq 0$$

$(x+1)^2$ всегда ≥ 0

$$\frac{1}{x(x-3)} \leq 0$$



совместим два условия:

как мы видим,
 ~~$x \in \emptyset$~~

N1 графический

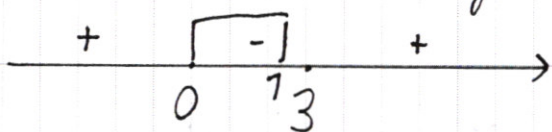
2) $0 \leq x < 1$

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{4x^2 - 12x - x^2 + 3x} \leq 0$$

$$\frac{(x+1)^2}{3x^2 - 9x} \leq 0$$

$$\frac{(x+1)^2}{(x-3)x} \leq 0$$

такой-же интервал, как и в случае 1



$$x \in (0; 1)$$

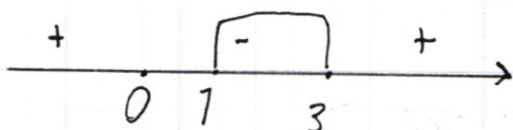
$x \neq 0$, тк иначе будет нулевой знаменатель
отсюда только $x \neq 3$

3) $1 \leq x < 3$

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 9x + 4}{x(x-3)} \leq 0$$

$$\frac{(x-3)^2}{x(x-3)} \leq 0$$

$$\frac{x-3}{x} \leq 0$$



$$x \in [1; 3)$$

4) $x \geq 3$

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 9x + 4}{4x^2 - 12x + x^2 - 3x} \leq 0$$

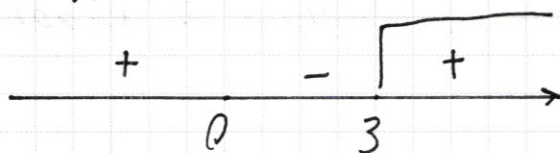
$$\frac{(x-3)^2}{5x^2 - 15x} \leq 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7 продолжение 2

$$\frac{(x-3)^2}{x(x-3)} \leq 0$$

$$\frac{(x-3)}{x} \leq 0$$



$$x \in \emptyset$$

объединяем все ~~интервалы~~ интервалы

$$x \in (0; 3)$$

$$\text{Ответ: } x \in (0; 3)$$

№ 3

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy} \\ 2y + x^2 = 9 \end{cases}$$

Тк в первом уравнении присутствует корень, то:

$$y - 2x \geq 0 \quad y \geq 2x$$

$$xy \geq 0$$

возведем обе части 1го уравнения в квадрат

$$(y - 2x)^2 = xy$$

$$y^2 - 4xy - xy + 4x^2 = 0$$

$$(y - 4x)(y - x) = 0$$

$$\text{1) } y = x \quad \text{2) } y = 4x$$

$$\text{1) } y = x \quad x \geq 2x$$

$$x^2 + 2x - 9 = 0$$

$$D = 2^2 + 9 \cdot 4 \cdot 1 = 40$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{40}}{2} = -1 \pm \sqrt{10}$$

$$\text{Тк } x \geq 2x, \quad x \leq 0$$

$$x = -1 - \sqrt{10} \quad y = -1 - \sqrt{10}, \text{ все условия выполнены}$$

$$\text{2) } y = 4x$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 продолжение

2) $y = 4x$

$x^2 + 8x - 9 = 0$

$(x-1)(x+9) = 0$

$x = 1 \quad y = 4$

или $x = -9 \quad y = -36$

все условия выполняются

Ответ: $x = -1 - \sqrt{10}; y = -1 - \sqrt{10}$

$x = 1; y = 4$

$x = -9; y = -36$

N7

$$f(p) = p \quad f(ab) = f(a) + f(b)$$

$$f(6) = f(2 \cdot 3) = f(2) + f(3) = 5$$

$$3 = 6 \cdot \frac{1}{2}$$

$$f(3) = f(6 \cdot \frac{1}{2}) = f(6) + f(\frac{1}{2}) = 3$$

$$f(\frac{1}{2}) = f(3) - f(6) = -2$$

если x можно представить в виде произведения его простых множителей $a \cdot b \cdot c \dots$

$$\text{то } f(x) = f(a) + f(b) + f(c) + \dots = a + b + c \dots$$

$\Rightarrow f(x)$ - сумма его простых множителей
пусть $x = a \cdot y$ $a = x \cdot \frac{1}{y}$

$$f(a) = f(x) + f(\frac{1}{y}) = f(a) + f(y) + f(\frac{1}{y})$$

$$f(\frac{1}{y}) = -f(y)$$

$$f(x/y) = f(x) + f(\frac{1}{y}) = f(x) - f(y)$$

тогда, чтобы $f(x/y) < 0$; нужно, чтобы

$f(x) < f(y)$ надем функции $f(x)$ для x от 3 до 19

X	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
f(x)	3	4	5	5	7	6	6	7	7	7	13	9	8	8	7	7	7

расставим эти числа в порядке возрастания
3, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 8, 9, 7, 7, 11, 13, 7, 7, 19

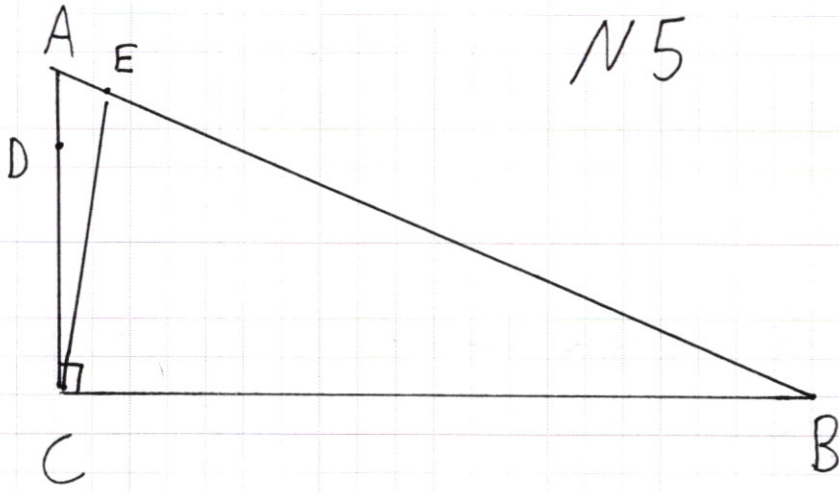
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7 - продолжение
тогда пара - больше 2 числа, кроме
одинаковых

$$N_{\text{пара}} = \frac{17 \cdot 16}{2} - N_{\text{одинак}} = 136 - 17 = 119$$

Ответ: 119 пар

N5



$$BC = \sqrt{29}$$

$$AC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2 задание

$$4x < 300 < 6x$$

$$4x < 300$$

$$x < 75$$

$$6x > 300$$

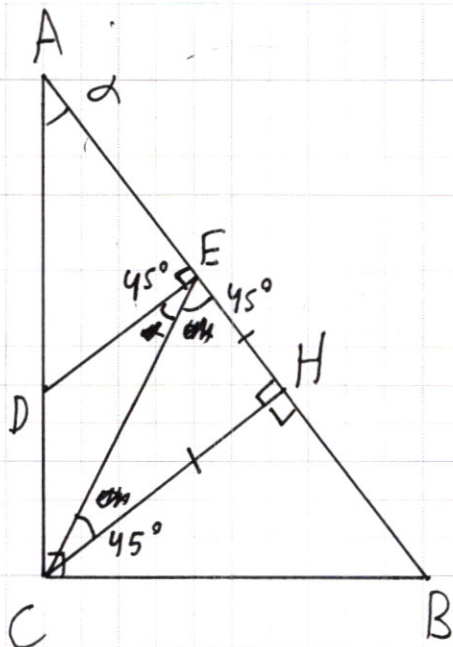
$$x > 50$$

x может быть от 51 до 74
вариантов Δ будет 24, тк x целый

Ответ: 24

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 5



~~AC = 5\sqrt{29}~~

$$AC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$$

$$BC = \sqrt{29}$$

$$\frac{AD}{AC}; S_{AED} - ?$$

проведем высоту CH

$$\angle ECH = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$$

$$\angle CAB = \alpha \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{BC}{AC} = 0,4$$

$$\angle ECH = \angle CEH \quad EH = CH$$

$$\text{по теореме Пифагора} \quad AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \frac{29}{2}$$

$$S_{ACB} = \frac{AC \cdot CB}{2} = \frac{29 \cdot 5}{4} = \frac{AB \cdot CH}{2}$$

$$CH = \frac{29 \cdot 5}{2 \cdot AB} = 5 = EH$$

$$HB = 0,4 CH = 2$$

$\triangle ADE$ подобен $\triangle ACH$, подобен $\triangle ABC$

$$AE = AB - HB - EH = \frac{29}{2} - 7 = 7,5$$

$$DE = 0,4 AE = 3$$

$$S_{AED} = 7,5 \cdot 3 : 2 = 11,25$$

N 5, прогаметне

~~ВСТАВКА~~

$$AD = \sqrt{3^2 + 7,5^2} = \sqrt{65,25}$$

$$\frac{AD}{AC} = \frac{\sqrt{65,25} \cdot 2}{5 \cdot \sqrt{29}}$$

Ответ: $SAED = 11,25$; $\frac{AD}{AC} = \frac{\sqrt{65,25} \cdot 2}{5 \cdot \sqrt{29}}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(Handwritten mathematical work on grid paper)

$x^2 - 2x + 5 - 4|x-1| \leq 0$

$4x^2 - 12x + |x||x-3|$

$f(\frac{1}{4}) = f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = -4f(9) = 6$

$f(9, \frac{1}{3}) = 3$

$f(\frac{1}{3}) = -3$

$8 + 47 = 9$

$f(\frac{1}{2}) = -2$ $f(\frac{1}{3}) = f(9, \frac{1}{3})$

$f(6, \frac{1}{2}) = f(6) + f(\frac{1}{2}) = 3 = 5 - 2$

$y - 2x = \sqrt{xy}$

$xy \geq 0$

$y - 2x \geq 0$

$y \geq 2x$

$x^2 + 2x^2 = 300$

$5x^2 = 300$

$x^2 = 60$

$x = \sqrt{60}$

$4 - 2 = \sqrt{4 \times 2}$

$f(6) = 5$

$f(6/2) = f(3) = 3$

$8x + x^2 - 9 = 0$

$(x+9)(x-1) = 0$

$x = 1$ $x = -9$

$(y-2x)^2 = xy$

$y^2 - 4xy - xy + 4x^2 = 0$

$y^2 - 5xy + 4x^2 = 0$

$(y-4x)(y-x) = 0$

$y = 4x$

$2(x^2 + 4x^2) = 300$

$5x^2 = 150$

$x^2 = 30$

$x = \sqrt{30}$

$300 - 3x$

75

150

52

99

$7,5$

$17,5$

$37,5$

$52,5$

$59,25$

6

$22,5$

$00'€$

$50'$

$22,5$

$$\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC}$$

$$\frac{AE}{ED} = 0,4$$

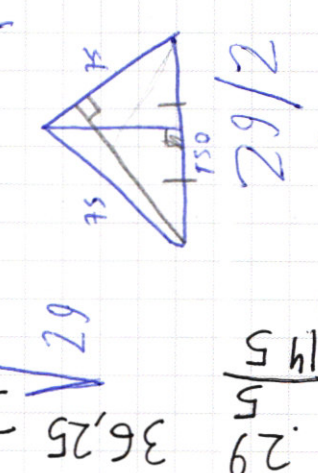
$$29 \cdot 29 / \frac{45\sqrt{29}}{\sqrt{29} \cdot 4}$$

$$2 - \frac{4}{7} + \frac{25}{4}$$

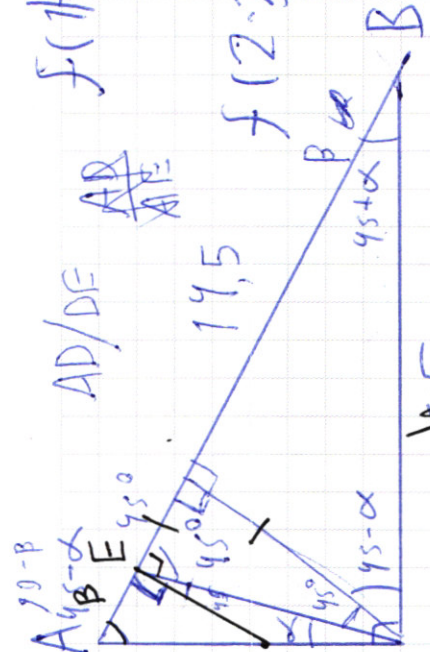
$$29 \left(1 + \frac{25}{4} \right) = \frac{309 \frac{1}{5}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}}$$

$$90 - 95 - \alpha = 95 - \alpha$$

$$29 + \frac{25 \cdot 29}{4}$$



$$F(11) = F(11) + F(11)$$

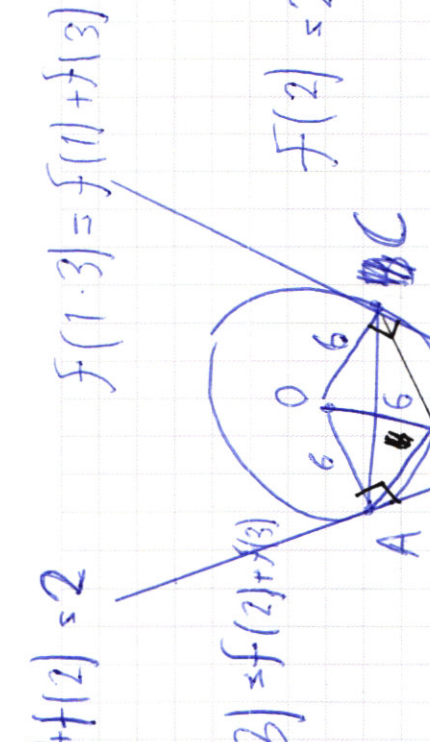


$$\tan B = 0,4$$

$$15 = AB \cdot DH$$

$$\tan(90 - B) = \frac{5}{2}$$

$$x = 4,5 - 9,5 \cdot x^2$$



$$F(1 \cdot 2) = f(1) + f(2)$$

$$15$$

$$F(x/y)$$

$$f(a/b) = f(a) + f(b)$$

$$f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$$

$$F(12) = f(12) + f(13) = 5$$

$$F(18) = f(18) + f(2) + f(2) = 6$$

$$F(9) = 6 \quad F(72) = f(72) + f(13) + f(2) = 7$$

$$F(1+2) = 2$$

$$f(2 \cdot 3) = f(2) + f(3)$$

$$F(1 \cdot 7) = F(1) + f(7)$$

$$2y + x^2 = 9$$

$$2y = 9 - x^2$$

$$y - 2x = \sqrt{xy}$$

$$F(6) = f(12) + f(13) = 5$$

$$F(2) = 2$$

$$F(11) = 2F(11)$$

$$F(1) \neq 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

X

1)

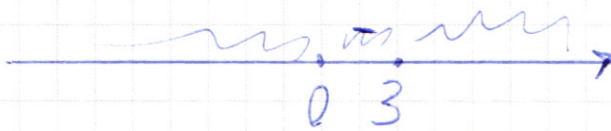
$$X < 0$$

$$\frac{X^2 - 2X + 5 + 4X \neq 4}{4X^2 - 12X + X^2 - 3X}$$

$$\frac{X^2 + 2X + 7}{5X^2 + 15X} \leq 0$$

$$\frac{(X+1)^2 > 0}{X(X-3)} \leq 0$$

$$X^2 - 3X$$



$$X \in \emptyset$$

2) $0 \leq X \leq 1$

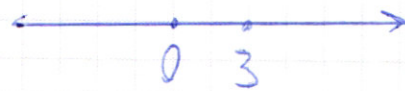
$$X \neq 0$$

$$\frac{X^2 + 2X + 7}{4X^2 - 12X - X^2 + 3X}$$

$$\frac{(X+1)^2}{3X^2 - 9X}$$

$$\frac{(X+1)^2}{X^2 - 3X}$$

$$\frac{(X+1)^2}{(X-3)X}$$



$$X \in (0; 1)$$

$$3) \quad \frac{x^2 - 2x + 5 - 4x + 4}{x(x-3)} \quad 1 < x < 3$$

$$x^2 - 6x + 9$$

$$\frac{(x-3)^2}{x(x-3)} \leq 0$$

$$\frac{(x-3)}{x} \leq 0$$

$$x \in [1; 3)$$

4)

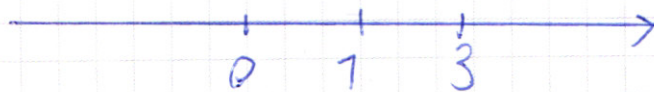
$$x \geq 3$$

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4x + 4}{4x^2 - 12x + x^2 - 3x} = \frac{(x-3)^2}{5x^2 - 15x} \leq 0$$

$$\frac{(x-3)^2}{x(x-3)} \leq 0$$

$$\frac{x-3}{x} \leq 0$$

\emptyset

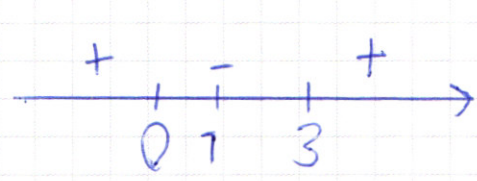


$$\frac{1-7}{-6} = \frac{-6}{-6} = 0$$

$$\frac{1-7-4}{4-12+2}$$

$$\frac{1^2 - 2 + 5 - 4 \cdot 0}{4 - 12 + 1 \cdot 2}$$

$$x \neq 3 \quad x \neq 0$$



$$3 \cdot 6 - 3 \cdot 6 + 0 \cdot 0$$

$$9 \cdot 9 - 12 \cdot 3 + 3(3-3)$$

~~x=1~~

$$9 - 2 + 5 \cdot 4$$

$$2^2 - 2 + 5 - 4 \cdot 1$$

$$16 - 2 \cdot 1 + 2$$

$$9 \cdot 4 - 12 \cdot 2 + 2 \cdot 1$$