



МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 14

ШИФР \_\_\_\_\_

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x - 1|}{4x^2 - 12x + |x| \cdot |x - 3|} \leq 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 300 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.
3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy}, \\ 2y + x^2 = 9. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром  $O$  касается прямых  $AB$  и  $BC$  в точках  $A$  и  $C$  соответственно. Высота  $CH$  треугольника  $ABC$  пересекает эту окружность в точках  $C$  и  $D$ . Найдите отношение  $AB : CH$ , если площадь треугольника  $ABD$  равна 15, а радиус окружности равен 6.
5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике  $ABC$  на катете  $AC$  и гипотенузе  $AB$  отмечены точки  $D$  и  $E$  соответственно, такие что  $DE \perp AB$ . Найдите отношение  $AD : AC$  и площадь треугольника  $AED$ , если известно, что  $AC = \sqrt{29}$ ,  $BC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$ , а  $\angle CED = 45^\circ$ .
6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами  $(x; y)$ , удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| > 6, \\ x^2 - 2x - 3y + y^2 \leq 0. \end{cases}$$

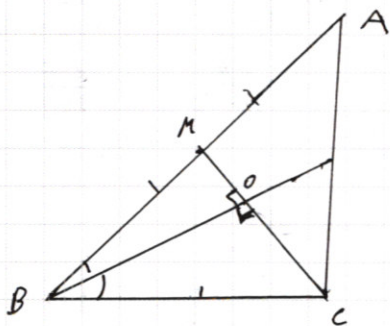
7. [5 баллов] Функция  $f$  определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел  $a$  и  $b$  из этого множества выполнено равенство  $f(ab) = f(a) + f(b)$ , и при этом  $f(p) = p$  для любого простого числа  $p$ . Найдите количество пар натуральных чисел  $(x; y)$  таких, что  $3 \leq x \leq 19$ ,  $3 \leq y \leq 19$  и  $f(x/y) < 0$ .



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Ответ:  $\{x; y\} \in \{1; 4\}; \{-9; -7\}; \{-1 + \sqrt{10}; -4 + 4\sqrt{10}\};$   
 $\{-1 - \sqrt{10}; -4 - 4\sqrt{10}\}.$

№ 2



$\triangle BMO = \triangle MOC$ , т.к.  $\angle MBO = \angle MCO$ ,

и  $BO$  — общая сторона  $\Rightarrow$

$\Rightarrow BM = MC = BO$ .

Пусть  $AB = c$ ,  $BC = a$ ,  $AC = b$

Полагаем:

$$a + b + c = 300$$

$$a = \frac{c}{2}, \quad \frac{c}{2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow c : 2.$$

$$\frac{3}{2}c + b = 300, \quad b = 300 - \frac{3}{2}c$$

По к-ву треугольника

$$b < a + c = \frac{3}{2}c \Rightarrow b < 150$$

$$c < a + b = \frac{1}{2}c + b \Rightarrow \frac{c}{2} < b$$

$$300 - a - b = c < 150$$

$$\frac{3}{2}c > b \Rightarrow \frac{3}{2}c > 150 \Rightarrow c > 100$$

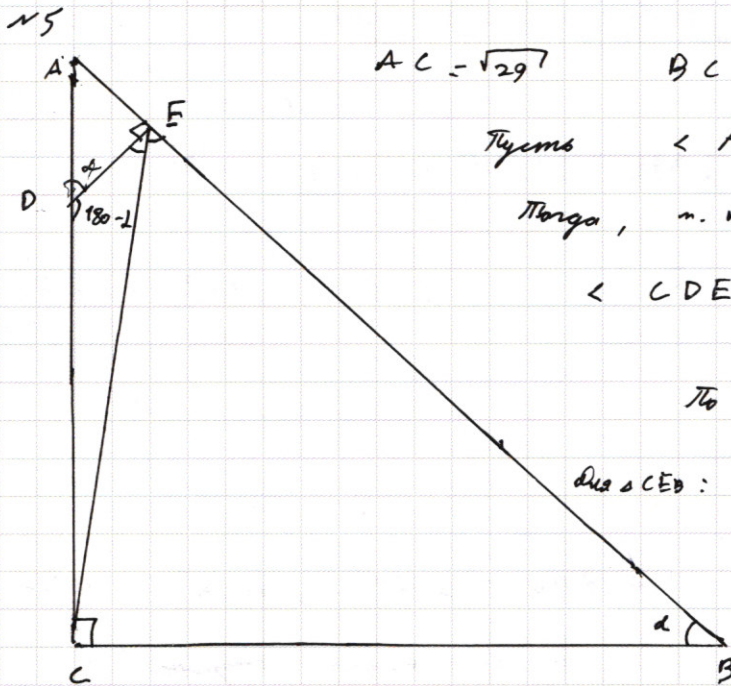
Итого:

$$\begin{cases} 100 < c < 150 \\ \frac{3}{2}c + b = 300 \\ c : 2 \end{cases} \quad \text{Всего есть 24 варианта } (c; b),$$

подлежащих данной системе,

Ответ: 24.





$$AC = \sqrt{29}$$

$$BC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$$

Рысма  $\angle ABC = \alpha$

Тогда, м.к.  $\angle ACB = \angle CED = 90^\circ$ ,

$$\angle CDE = 180 - \alpha.$$

То м. сызылар:

$$\begin{aligned} \text{Диа } \triangle CEB: \frac{CB}{\sin \angle CEB} &= \frac{CE}{\sin (90 - \alpha)} = \\ &= \frac{CB}{\sin 45} = \frac{CE}{\sin \alpha} \end{aligned}$$

$$\text{Диа } \triangle CED: \frac{CE}{\sin (180 - \alpha)} = \frac{CF}{\sin \alpha} = \frac{CD}{\sin 45} = \frac{CB}{\sin 45} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CD = CB = \frac{5\sqrt{29}}{2}$$

Ит.к.  $AD < AC$ , м  $AD = AC - CD = -\frac{3}{2}\sqrt{29}$  —  $\textcircled{W}$  кем релл.

$$\text{Рысма } AC = \frac{5}{2}\sqrt{29}, \quad BC = \sqrt{29}$$

$$\text{Тогда } AD = \frac{3}{2}\sqrt{29},$$

$$\frac{AD}{AC} = \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 5} = \frac{3}{5}$$

$$\angle ADE = 180 - \angle CDE = \alpha. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{DE}{AD} = \frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{29}}{\sqrt{29 + \frac{25 \cdot 29}{4}}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{29}}{29} = \frac{2}{\sqrt{29}}$$

$$DE = AD \cdot \frac{2}{\sqrt{29}} = 3$$

$$AE = DE \cdot \tan \alpha = DE \cdot \frac{AC}{BC} = 3 \cdot \frac{5\sqrt{29}}{\sqrt{29}} = \frac{15}{2}$$

$$S_{\triangle ADE} = \frac{AE \cdot DE}{2} = \frac{3 \cdot \frac{15}{2}}{2} = \frac{45}{4}$$

$$\text{Омбем: } \frac{AD}{AC} = \frac{3}{5}; \quad S_{\triangle ADE} = \frac{45}{4}$$

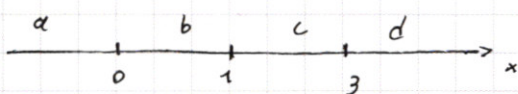


## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x-1|}{4x^2 - 12x + |x| - |x-3|} \leq 0$$

Осуществим перебор случаев для разных  $x$ :



$a, b, c, d$  - варианты перебора.

a)  $x \leq 0$

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4(1-x)}{4x^2 - 12x + x(x-3)} = \frac{(x+1)^2}{5x(x-3)} \leq 0$$

П.к.  $x \leq 0$ , то  $\begin{cases} (x+1)^2 \geq 0 \\ x \leq 0 \\ x-3 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{(x+1)^2}{5x(x-3)} \geq 0$

О.Д.З.:  $x \neq 0$

Единственный нас устраивающий вариант - это

$$\frac{(x+1)^2}{5x(x-3)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

П.к.  $x \leq 0$ , получим  $x = \{-1\}$

b)  $0 \leq x \leq 1$

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4(1-x)}{4x^2 - 12x + (x)(3-x)} = \frac{(x+1)^2}{3x(x-3)} \leq 0$$

О.Д.З.:  $x \neq 0$   
 $x \neq 3$

$$\begin{cases} (x+1)^2 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ x-3 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \text{при } x \in (0; 1) \quad \frac{(x+1)^2}{3x(x-3)} \leq 0$$

c)  $1 \leq x \leq 3$

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4(x-1)}{4x^2 - 12x + x(3-x)} = \frac{(x-3)^2}{3x(x-3)} \leq 0$$

$$\begin{cases} (x-3)^2 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ x-3 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \text{при } x \in [1; 3) \quad \frac{(x-3)^2}{3x(x-3)} \leq 0$$



d)  $x \geq 3$

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4(x-1)}{4x^2 - 12x + x(x-3)} = \frac{(x-3)^2}{5x(x-3)} \leq 0$$

ODЗ:  $x \neq 0$   
 $x \neq 3$

$$\begin{cases} (x-3)^2 \geq 0 \\ x > 0 \\ x-3 > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{при } x \in (3; +\infty) \frac{(x-3)^2}{5x(x-3)} > 0$$

Ответ:  $x \in (0; 3) \cup \{-1\}$

N3

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy} \\ 2y + x^2 = 9 \end{cases} \quad \text{ODЗ: } xy \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 4xy + 4x^2 = xy \\ 2y + x^2 = 9 \end{cases} \begin{matrix} | :xy \\ \Leftrightarrow \end{matrix} \quad , \quad x \neq 0, y \neq 0, \text{ иначе: } \sqrt{xy} \geq 0$$

Если  $x = 0, y \neq 0$  или наоборот:

$$y - 2x \neq 0 \quad \sqrt{xy} = 0 \quad - \text{W}$$

Если  $x = 0, y = 0$ :

$$2y + x^2 = 0 \quad - \text{W}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y}{x} - 4 + 4\frac{x}{y} = 1 \\ 2y + x^2 = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \text{и } \frac{y}{x} = t, \Leftrightarrow \begin{cases} t + \frac{4}{t} = 5 \\ 2y + x^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$t \neq 0$  т.к.  $\begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - 5t + 4 = 0 \\ 2y + x^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y}{x} = t = \frac{5 \pm 3}{2} \\ 2y + x^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} y = 4x \\ y = x \\ 2y + x^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4x \\ x^2 + 8x - 9 = 0 \\ y = x \\ x^2 + 2x - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases} \begin{matrix} 1) \\ 2) \end{matrix} \begin{matrix} -9 \\ -36 \end{matrix} \\ \begin{cases} x = -1 + \sqrt{10} \\ y = -4 + 4\sqrt{10} \end{cases} \begin{matrix} 1) \\ 2) \end{matrix} \begin{matrix} -1 - \sqrt{10} \\ -4 - 4\sqrt{10} \end{matrix} \end{cases}$$

c)

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4x + 4}{4x^2 - 12x + x(3-x)} \leq 0$$

$$\frac{(x-3)^2}{3x(x-9)} \leq 0$$

~~$x < 3$~~   $x \in [1; 3]$

d)

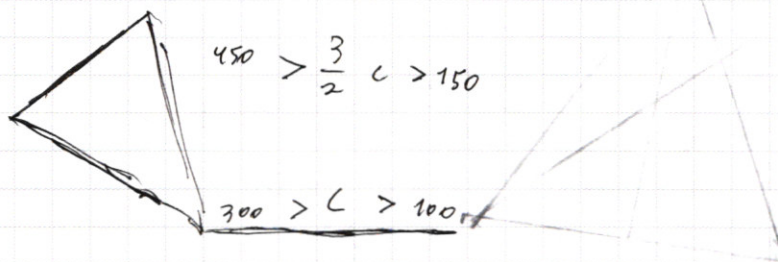
$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4x + 4}{4x^2 - 12x + x(x-3)} \leq 0$$

$$\frac{(x-3)^2}{5x(x-3)} = \frac{x-3}{5x} \leq 0$$

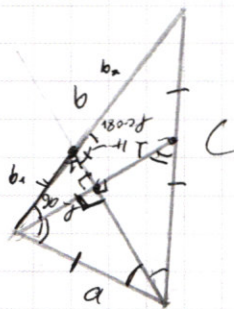
(1)

$$a + b + c = 300$$

$$a = \frac{c}{2}$$



$$c : 2$$



$$a = \frac{c}{2}$$

$$\frac{b_1}{a} = \frac{b_2}{c} \quad \frac{3}{2}c + b = 300$$

$$\downarrow$$

$$\frac{2b_1}{c} = \frac{b_2}{c} \quad b < \frac{3}{2}c$$

$$2b_1 = b_2 \quad \frac{c}{2} < b$$

$$b_1 = \frac{b}{3} \quad b < \frac{3}{2}c < 3b$$

$$b_2 = \frac{2}{3}b$$



### ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(x) = 2 = f(x) + f(x)$   
 $f(x) = 0$   
 $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy} \\ 2y + x^2 = 9 \end{cases}$$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{6}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) + f(2)$

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x-1|}{4x^2 - 12x + x|x-3|} \leq 0$$

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4(1-x)}{4x^2 - 12x + x(x-3)} \leq 0$$

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{5x^2 - 15x} \leq 0$$

$$\frac{(x+1)^2}{5x(x-3)} \leq 0$$

$x = -1, x = 0$

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4 + 4x}{4x^2 - 12x + x(x-3)} \leq 0$$

$$\frac{(x+1)^2}{3x(x-3)} \leq 0$$

$x \in [0; 1]$

$$y = \frac{8 \pm \sqrt{10}}{2} = \begin{cases} 1 \\ -9 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} 4 \\ -36 \end{cases}$$

$$y - 2x = \sqrt{xy}$$
  

$$2y + x^2 = 9$$

$$y^2 - 4xy + 4x^2 = xy$$
  

$$8y + 4x^2 = 36$$

$$\frac{y}{x} - 4 - \frac{4x}{y} = 1$$

$$\frac{y}{x} = 5$$

$$y = 5x$$

$$2(5x) + x^2 = 9$$
  

$$x^2 + 10x - 9 = 0$$
  

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{100 + 36}}{2} = \frac{-10 \pm \sqrt{136}}{2}$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$f\left(x \cdot \frac{1}{b}\right) = f\left(\frac{x}{b}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{b}\right)$$

$$3 \leq x \leq 19$$

$$3 \leq y \leq 19$$

~~3~~

3 5 7 11 13 17 19

----- π -----

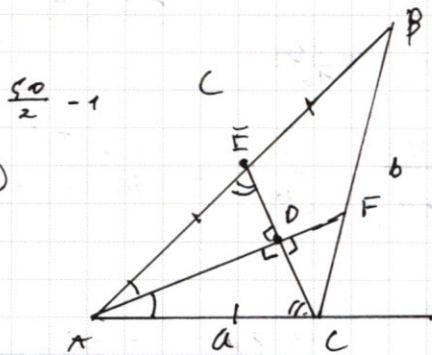
$x \neq$

$y \neq$

102, 109

$$f(15) = f(3) + f(5) = 8$$

(24)



$$100 < c < 150$$

$$b < 150$$

$$\frac{c}{2} < 150$$

$$100 < c < 300$$

$$300 - \frac{c}{2} < 150$$

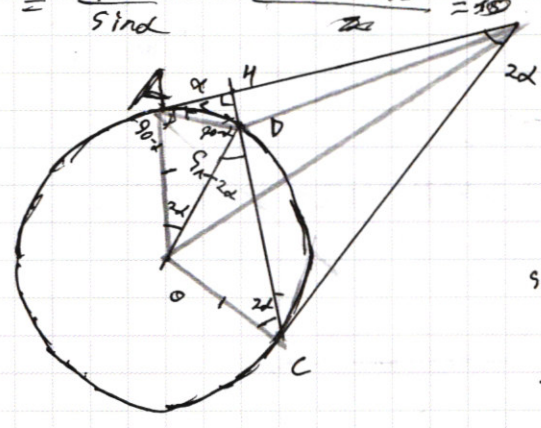
~~$$300 > c > 150$$~~



$$\frac{30}{\cos \alpha} = \frac{AB \cdot AD \cdot \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{AO}{\sin \alpha}$$

$$\frac{AB \cdot AD \cdot \sin \alpha}{2} = 30$$

$$2R = \frac{AD}{\sin \alpha}$$



$$AO = 2R \sin \alpha$$

$$1 \sin 2\alpha = \frac{2R \sin \alpha \cos \alpha}{R}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha =$$

$$= 2 \sqrt[3]{\frac{25}{4AB}} \cdot \sqrt[3]{1 - \frac{24}{4AB}} =$$

$$= 2 \sqrt[3]{\frac{25}{4AB} - \left(1 - \frac{25}{2AB} + \frac{25^2}{16AB^2}\right)}$$

$$\frac{AB \cdot AD \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{AB \cdot DH}{2} = 30$$

$$DH = \frac{30}{AB}$$

$$\frac{AB \cdot DH}{2} = 15$$

$$AD' = \frac{DH}{\sin \alpha} = \frac{30}{\sin \alpha}$$

$$OD = AO = CO$$

$$2 \sin^3 \alpha = \frac{25}{2AB}$$

$$\sin \alpha = \sqrt[3]{\frac{24}{4AB}}$$

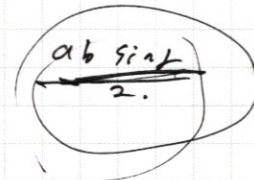
$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\frac{AD}{AB} = 90 - \alpha$$



$$CH = \frac{BH}{\tan 2\alpha}$$

$$DH = AH - \tan \alpha$$



$$CH = \frac{AB}{CH} = BH$$

$$\frac{AO}{\cos \alpha} = \frac{AD}{\sin \alpha}$$

$$\frac{30}{AB} = AH$$

$$\frac{AD \cdot AB}{\sin \alpha}$$

$$\frac{AB}{\cos \alpha} = \frac{AO}{\sin \alpha}$$

$$AB = AO \cos \alpha$$

$$\frac{AD \cdot AB \cdot \sin \alpha}{2} = 15$$

$$\sin \alpha = \frac{30}{AB \cdot AD}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{AD \cos \alpha}{AO} = \frac{AH}{AO} = \frac{30 \cos \alpha}{AO} =$$

$$\frac{AC}{CH} = \frac{AB}{CH} = \sin 2\alpha =$$

$$= \frac{30 \cdot AB}{AO^2} = \frac{AB}{CH}$$

$$\frac{AB}{CH} = \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$CH = \frac{6}{5}$$

$$AB \cdot AD \cdot \sin \alpha = 30$$

$$AD = \sqrt{2AO^2(1 - \cos 2\alpha)}$$

$$AB =$$

$$\frac{AD^2}{2AO^2} = 1 - \cos 2\alpha$$

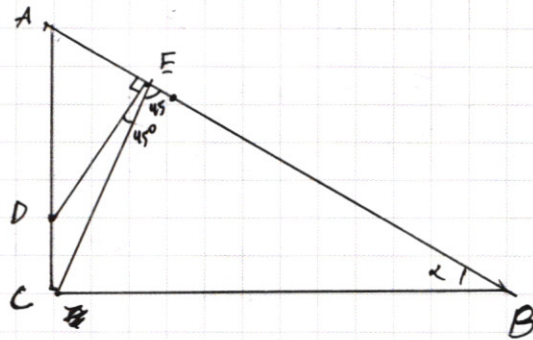
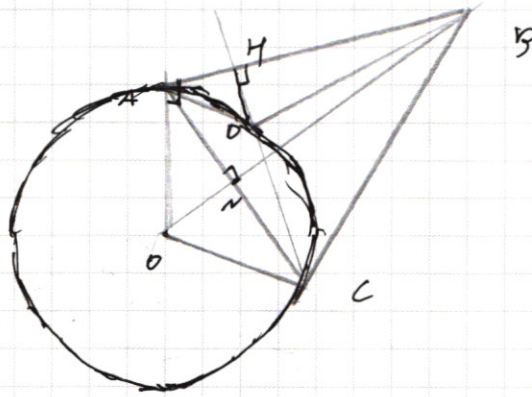
$$\frac{CH}{AB} = \frac{30 \cdot AB}{AO^2} = \frac{5}{6} AB$$

$$AD = \frac{30}{AB \sin \alpha} = \frac{100 \cdot 25}{2 \cdot 36 \cdot AB \cdot \sin \alpha} =$$

$$CH = \frac{5}{6} AB^2 \quad \frac{AB}{CH} = \frac{6}{5} AB$$

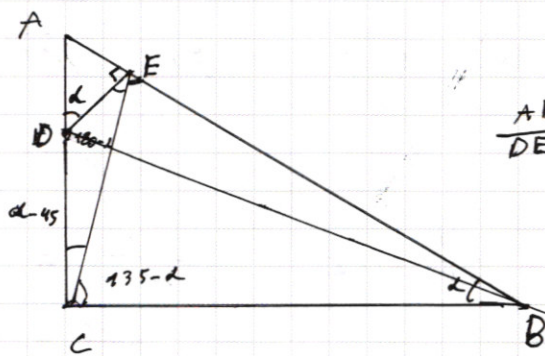
$$= \frac{25}{2AB \sin \alpha} = 1 - \cos 2\alpha + 2 \sin^2 \alpha$$





$$\frac{\frac{3}{2} \sqrt{29}}{\sqrt{29}} = \left(\frac{3}{2}\right)$$

$$\sin \alpha = \frac{AC}{BC} = \left(\frac{2}{5}\right)$$



$$\frac{AE}{DE} = \left(\frac{2}{5}\right)$$

$$\frac{AE \cdot DE}{2} = \frac{2}{5} DE^2 =$$

$$= \frac{15 \cdot \frac{3}{4}}{2} = \left(\frac{45}{4}\right)$$

$$AB = \sqrt{29 + \frac{25}{4} \cdot 29} =$$

$$\frac{BC}{\sin 45} = \frac{CE}{\sin \alpha} = \frac{ED}{\sin 45} = \sqrt{\frac{29 \cdot 29}{4}} = \left(\frac{29}{2}\right)$$

$$\frac{CE}{\sin \alpha} =$$

$$\left(BC\right) = \left(ED\right)$$

$$\frac{AD}{DE} = \frac{AB}{BC} = \frac{29 \cdot 2}{25 \sqrt{29}} = \left(\frac{\sqrt{29}}{5}\right)$$

$$DE = \frac{5AD}{\sqrt{29}} = \frac{45}{2}$$

$$AD = \sqrt{29} - \frac{\sqrt{29} \cdot 5}{2} = -\frac{3}{2} \sqrt{29}$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\lg a = \frac{AH}{CH} = \frac{AN}{BN} =$   
 $= \frac{ON}{AN} = \frac{DH}{BN} =$   
 $= \frac{AO}{AB} =$

$\frac{DH \cdot AB}{2} = 15$   
 $DH = \frac{30}{AB}$

$\frac{AH}{AB} = \frac{DH}{AO} = \frac{30}{AB \cdot AO}$   
 $AB = 40$

$AH = AB - 5$   
 $\frac{AB - 5}{CH} = \frac{6}{AB}$

$BH = \frac{30}{40} = 5$

$\frac{DH}{AO} = \frac{BH}{AB}$   
 $\frac{DH \cdot AB}{2} = 15$

$\frac{2}{AO} = \frac{BH}{15 \cdot AB}$   
 $BH = 5$

$\frac{AH}{BN} = \frac{AC}{AO}$   
 $\frac{AH}{AN} = \frac{AC}{AB}$   
 $\frac{AN}{ON} = \frac{AB}{AO}$   
 $CD = 40$

$\frac{CH}{AH} = \frac{AB - 5}{6}$   
 $AB = \frac{25 \pm \sqrt{25 + 24CH}}{2}$

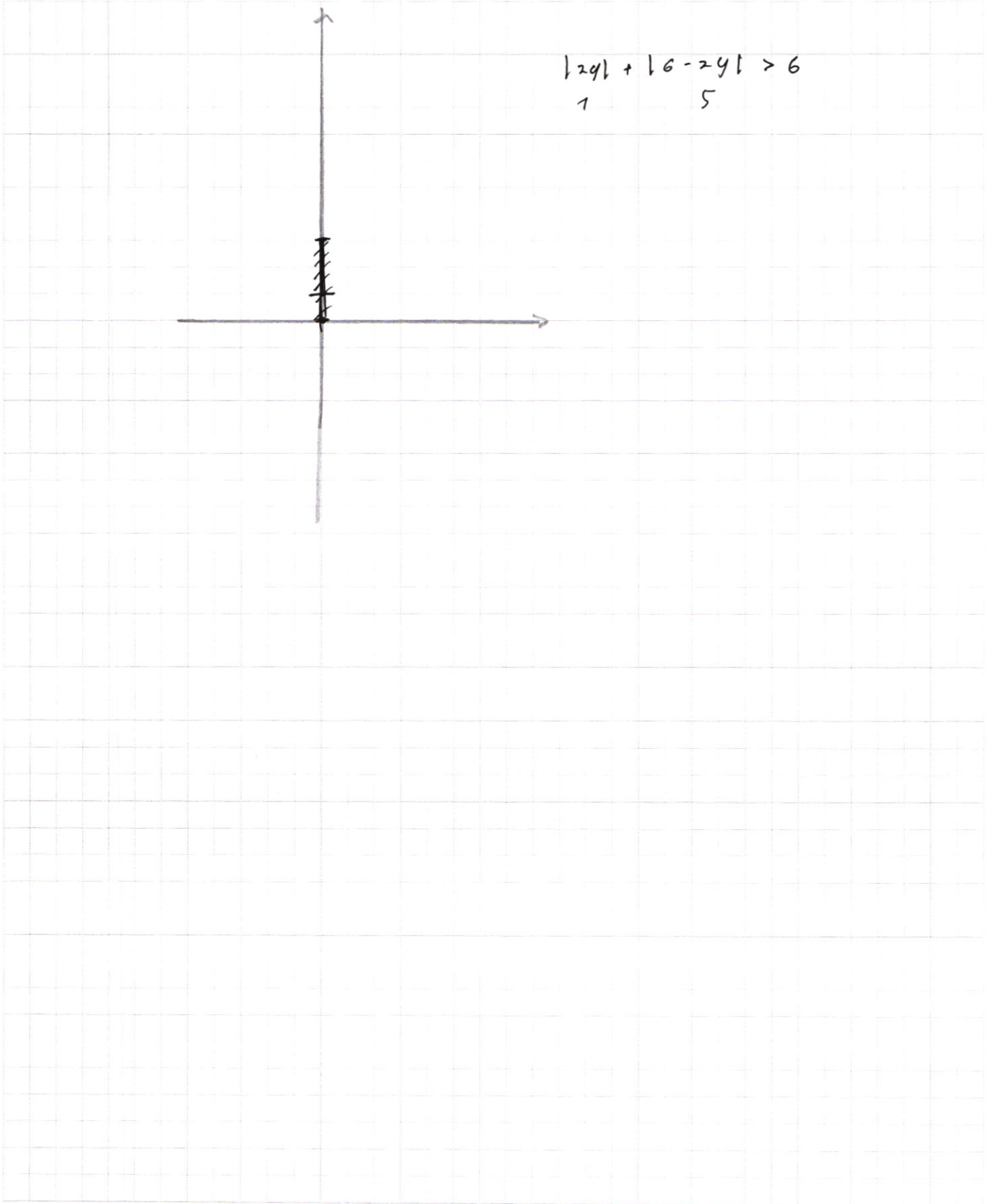
$\frac{AH}{BH} =$   
 $\triangle HBD \sim \triangle CAH$

$\frac{AB}{AO} = \frac{AN}{AN}$   
 $\frac{AB(AB - BH)}{30} = \frac{AH}{DH} = \frac{CH}{BH} = \frac{CH}{5}$

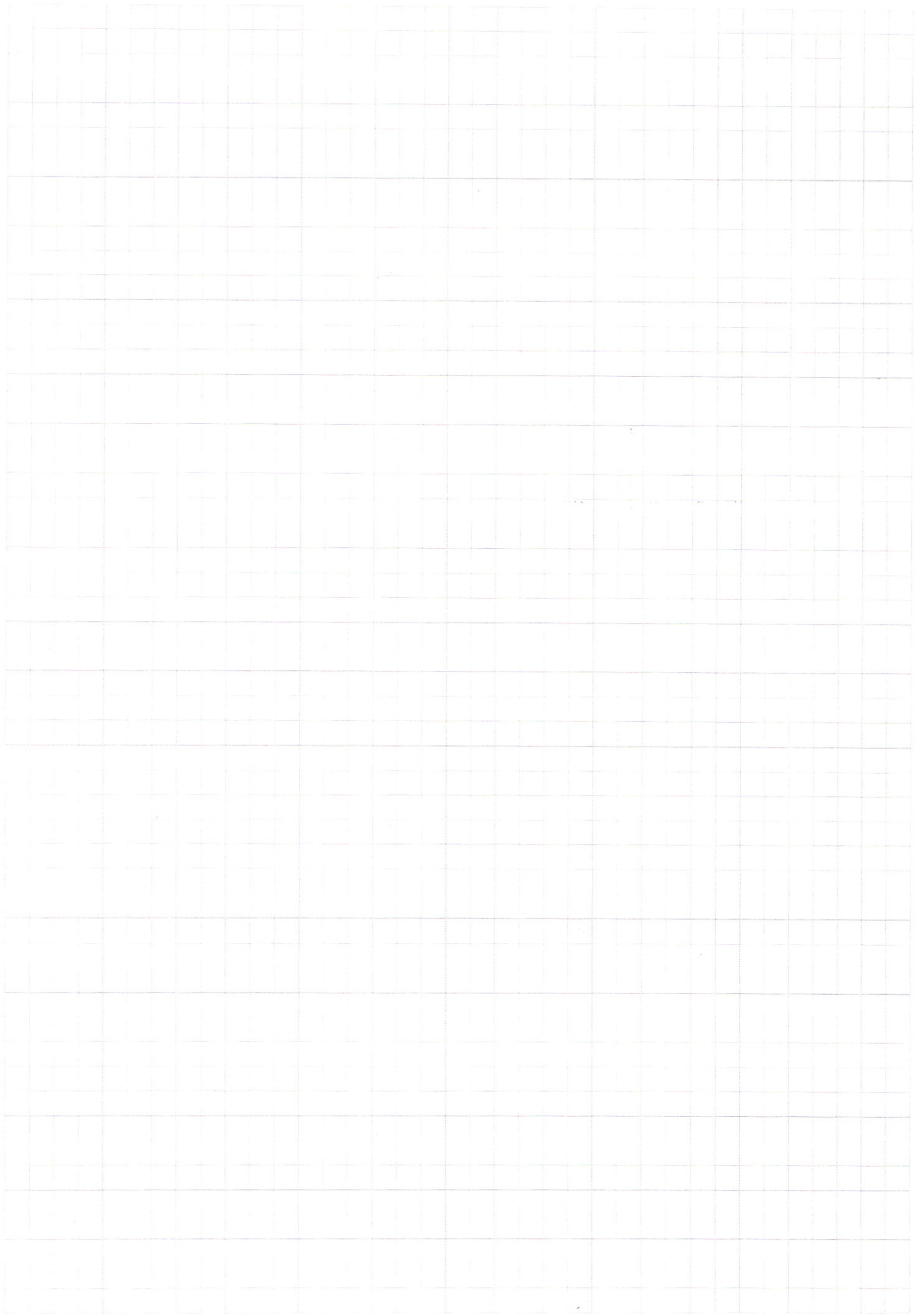
$\frac{CH}{5} = \frac{AB(AB - 5)}{30 \cdot 6}$   
 $6CH = AB^2 - 5AB$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА







черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)