МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 13

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|} \leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 600 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy}, \\ x+y^2=5. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB:CH$, если площадь треугольника ABD равна 6, а радиус окружности равен 4.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD:AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{7}$, $BC=2\sqrt{\frac{7}{3}}$, а $\angle CED=30^\circ$.

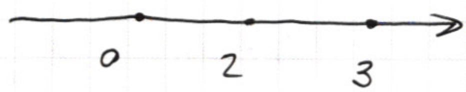
6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |2x|+|y|+|4-2x-y|>4, \\ x^2-2x-4y+y^2 \leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 18$, $1 \leqslant y \leqslant 18$ и $f(x/y)<0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $\dfrac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|} \leq 0$



При $x \in (-\infty;0)$

$$\frac{x^2-6x+10+2x-6}{2x^2-4x+(-x)(-x+2)} = \frac{x^2-4x+4}{2x^2-4x+x^2-2x} =$$

$$= \frac{x^2-4x+4}{3x^2-6x} = \qquad x^2-4x+4 \quad D=16-16$$

$$(x-2)^2$$

$$= \frac{(x-2)^2}{3x(x-2)} = \frac{x-2}{3x} \leq 0 \qquad \text{ОДЗ}: x \neq 0,\ x \neq 2$$

$\Rightarrow$ ~~$3x$~~ $3x(x-2) \leq 0$, при $x \in (-\infty;0)$

$\Rightarrow$ нет решений $\varnothing$

При $x \in (0;2)$

$$\frac{x^2-6x+10+2x-6}{2x^2-4x+x(-x+2)} = \frac{(x-2)^2}{2x^2-4x-x^2+2x} = \frac{(x-2)^2}{x^2-2x} =$$

$$= \frac{(x-2)^2}{x(x-2)} = \frac{x-2}{x} \leq 0 \Rightarrow x(x-2) \leq 0, \text{ при } x \in (0;2)$$

$\Rightarrow$ при $x \in (0;2)$

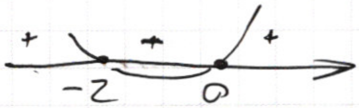
При $x \in (2;3)$

$$\frac{x^2-6x+10+2x-6}{2x^2-4x+x^2-2x} = \frac{x-2}{3x} \Rightarrow \text{нет решений } \varnothing$$

При $x \in [3;+\infty)$

$$\frac{x^2-6x+10-2x+6}{2x^2-4x+x^2-2x} = \frac{x^2-8x+16}{3x^2-6x} = \frac{(x-4)^2}{3x(x-2)} = \frac{(x-2)(x+2)}{3x(x-2)} =$$

$= \dfrac{x+2}{3x} \le 0$ ~~$3x(x+2) \le 0$~~

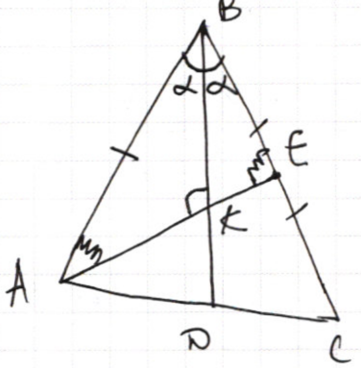


при $x \in (3; +\infty)$

$\Rightarrow$ нет решений $\varnothing$

Ответ: $x \in (0; 2)$

2. Пусть x, y, z – стороны треугольника



$x, y, z \in \mathbb{Z}$

$x, y, z \ge 0$

Если в $\triangle ABC$, BD – бисс.

AE – медиана

$BD \perp AE$ $BD \cap AE = K$

Обозначим $\angle ABD - \alpha$

$\Rightarrow \angle BKA = 90^\circ \Rightarrow \angle BAK = 90^\circ - \alpha$

$\angle BEK = 90^\circ - \alpha \Rightarrow \angle BAK = \angle BEK$

$\Rightarrow BE = AB = EC$

$\Rightarrow AB = \frac{1}{2} AC$

Б.У.О. можем считать, что $x = \frac{1}{2}y \Rightarrow y = 2x$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x + z = 600 \\ 2x + z \ge x \\ x + z \ge 2x \\ 3x \ge z \end{cases}$$

$3x = 600 - z$; $z = 600 - 3x$

$600 - z \ge z \Rightarrow 2z \le 600$

$x = 200 - \frac{z}{3}$ $z \le 300$

$200 - \frac{z}{3} + z \ge 400 - \frac{2z}{3} \Rightarrow 600 - z + 3z \ge 1200 - 2z$

$\Rightarrow 600 + 2z \ge 1200 - 2z \Rightarrow 4z \ge 600$

$z \ge \frac{600}{4} = 150$

$\Rightarrow 150 \le z \le 300 \Rightarrow 151$ тр.

Ответ: 151.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy}, \\ x+y^2=5 \end{cases}$$

$x^2-4xy+4y^2=xy$

$x^2-5xy+4y^2=0$

$D=25y^2-16y^2=9y^2$

$x_{1,2}=\dfrac{5y\pm3y}{2} \Rightarrow 4y, y$

~~Если $x=4y$, то~~

~~$16y^2-16y^2+4y^2=0 \Rightarrow 4y^2=0 \quad y=0 \Rightarrow x=0$~~

~~Если $x=y$~~

~~$y^2-4y^2+4y^2$~~

Если $x=4y$, то $(4y)^2-5\cdot4y\cdot y+4y^2=0$

$16y^2-20y^2+4y^2=0$ – при любом y.

$y^2+4y=5 \Rightarrow y(y+4)=5$

$y^2+4y-5=0 \quad D=16+20=36$

$y_{1,2}=\dfrac{-4\pm6}{2}=-5;1$

При $y=-5$, $x=-20$ – не подходит

При $y=1$, $x=4$

Если $x=y$, то $x+x^2=5$

$x^2+x-5=0$

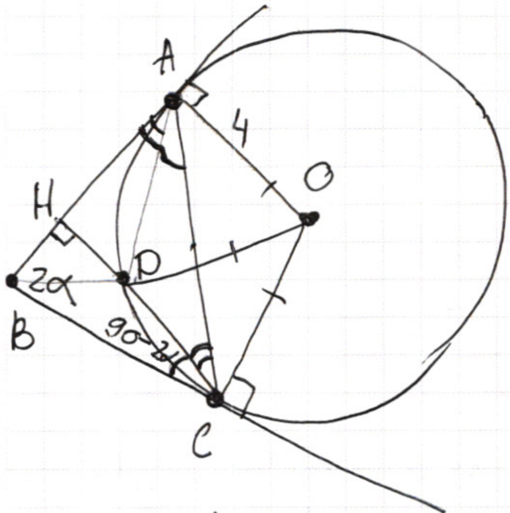
$D=1+20=21$

$x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$

$x=\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}$ – не подх.

Ответ: $\begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-\left(\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}\right) \\ y=-\left(\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}\right) \end{cases}$

№4.

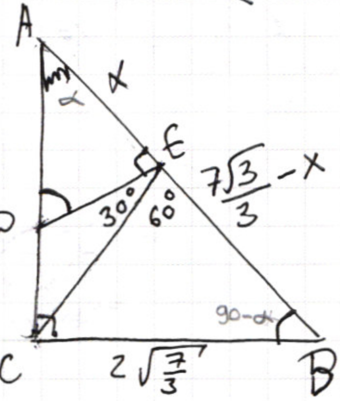


$S_{ABD} = 6 \quad OA = 4 \quad \frac{AB}{CH} - ?$

$S_{ABD} = \frac{AB \cdot DH}{2} = 6 \Rightarrow 12 = AB(CH - CD)$

$AB \cdot CH = CD + 12$

№5.



$AC = \sqrt{7}$

$CB = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$

$AB = \sqrt{\frac{4 \cdot 7}{3} + 7} = \sqrt{\frac{28 + 21}{3}} =$

$= \sqrt{\frac{49}{3}} = \frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$

$\frac{AD}{AC} - ?$ Пусть $AE = x$

тогда, $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ (по 2-м углам)

$\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{\cancel{A}CB} = \frac{AD}{AB}$

$AD = \frac{AE \cdot AB}{AC} = \frac{x \cdot 7\sqrt{3}}{3\sqrt{7}} = \frac{x\sqrt{21}}{3} = x\sqrt{\frac{7}{3}}$

$DE = \frac{BC \cdot AE}{AC} = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}} \cdot x \cdot \frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{2x}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow x^2 + \frac{4x^2}{3} = \frac{7x^2}{3} \Rightarrow 3x^2 + 4x^2 = 7x^2$

$\frac{AD}{AC} = x\sqrt{\frac{7}{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{x}{\sqrt{3}}$

$\frac{28}{3} = \frac{49}{3} - \frac{7\sqrt{3} \cdot x \cdot 2}{3} + x^2 + CE^2 - 2\left(\frac{7\sqrt{3}}{3} - x\right) \cdot CE \cdot \frac{1}{2}$

$\Rightarrow 28 = 49 - 14x\sqrt{3} + x^2 + CE^2 - 7\sqrt{3}CE - CEx$

$CE^2 - CE(7\sqrt{3} + x) - (14x\sqrt{3} + x^2 + 21)$

$7 = x^2 + CE^2 - 2xCE \cdot \cos 120° = x^2 + CE^2 + 2xCE$

$CE^2 - 2xCE + (x^2 - 7) = 0$

$4x^2 - 4x^2 + 28 = 28$

$CE = \frac{2x \pm \sqrt{28}}{2} = x \pm \frac{\sqrt{28}}{2}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

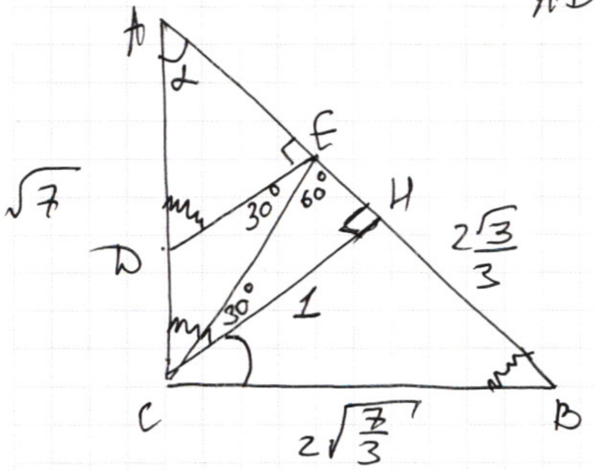
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.



$AB = \sqrt{\frac{4\cdot 7}{3}+7} = \sqrt{\frac{28+21}{3}} = \frac{7}{\sqrt{3}}$

$EH = \frac{1}{2}CE$ / CH - высота

$\triangle ABC \sim \triangle CHB$

$\frac{CB}{AB} = \frac{HB}{BC} = \frac{HC}{AC}$

$\Rightarrow HB = \frac{CB^2}{AB} = \frac{2\cdot 7}{3} \cdot \frac{\cancel{7}\sqrt{3}}{\cancel{\sqrt{3}}\,7} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$CH = \frac{AC\cdot HB}{BC} = \frac{\sqrt{7}\cdot 2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} = 1$

Пусть $EH = x \Rightarrow CE = 2x \Rightarrow 1+x^2 = 4x^2$

$3x^2 = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow CE = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow AE = \frac{7}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{2\sqrt{3}}{3} =$

$= \frac{7}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

$\triangle ADE \sim \triangle ABC$

$\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{CB} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow AD = \frac{AE\cdot AB}{AC} = \sqrt{3}\cdot\frac{7}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{7}} =$

$= \frac{7}{\sqrt{7}} = \sqrt{7}$

$\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \cancel{\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = 1}\ \frac{1}{\sqrt{7}}\cdot\frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{1}{7}$

$DE = \frac{AD\cdot BC}{AB} = \frac{1}{\cancel{\sqrt{7}}}\cdot\frac{2\cancel{\sqrt{7}}}{\cancel{\sqrt{3}}}\cdot\frac{\cancel{\sqrt{3}}}{7} = \frac{2}{7}$

$\Rightarrow S_{ADE} = \frac{2}{7}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{7}$

Ответ: $\frac{1}{7}$; $\frac{\sqrt{3}}{7}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 4

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 7.

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(p_1) + f(p_2) + \ldots + f(p_n) +$$
$$+ f\left(\frac{1}{p_k}\right) + \ldots + f\left(\frac{1}{p_{k+t}}\right)$$

Если $x = p_1 p_2 \ldots p_n$

$y = p_k \ldots p_{k+t}$

$$\Rightarrow p_1 + p_2 + \ldots + p_n < f\left(\frac{1}{p_k}\right) + f\left(\frac{1}{p_{k+1}}\right) \ldots + f\left(\frac{1}{p_{k+t}}\right)$$

$$f(a) = -f\left(\frac{1}{a}\right)$$

т.к. $f\left(\frac{a}{b}\right) = f(a) + f\left(\frac{1}{b}\right) = f\left(\frac{a}{b} \cdot b\right) + f\left(\frac{1}{b}\right) =$

$$= f(a) + f(b) + 2f\left(\frac{1}{b}\right)$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{a}{b}\right) = f\left(\frac{a}{b}\right) + f(b) + f\left(\frac{1}{b}\right)$$

$$\Rightarrow f(b) = -f\left(\frac{1}{b}\right)$$

$$\Rightarrow p_1 + p_2 \ldots + p_n < -p_k - p_{k+1} - \ldots - p_{k+t}$$

~~$\Rightarrow k+t$~~

~~Σ~~ сумма простых делителей числа x, должна быть ~~бол~~ меньше, чем сумма простых делителей y.

$1 \le x \le 18$ $\qquad$ $1 \le y \le 18$

При $x = 1 \Rightarrow y = 2, 3, \ldots, 18$

17 вариантов

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

При $x=2$ $\Rightarrow$ $y = 3, 4, \ldots, 18$ — 16 вар

При $x=3$ — 15 вар.

При $x=4$ $= 2\cdot 2$ $5, 6, 7, \ldots, 18$ 14 вар

При $x=5$ $\cancel{6}\,7, 8, 9, 10, 11, 12, \ldots, 18$ — 12 вар

При $x=6$ $7, \ldots, 18$ — 12 вар

$2\cdot 3$ $\Sigma = 5$

При $x=7$ $7, \cancel{8, 9}, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 18$

8в

$x=8$ $\cancel{9}\,11, 13, 17,$ 3в

$x=9$

$\Sigma = 6$ — 12в

$x=10$ $\Sigma = 7$ 8в

$x=11$ — $13, 17$ 2в

$x=12$ $\Sigma = 7$ 8в

$x=13$ 1в

$x=14$ 9 — ~~2в~~ $11, 13, 17$ 3в

$x=15$ — 3в $x=16$ — 3в

$x=17$ — $\varnothing$ $x=18$ — 3в

$3+3+3+3+1+8+2+8+12+3+8+12+12+14+16$
$+17 =$ $13+30+15+20+30+17 = 95+30$
$= 125$

Ответ: 125.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$= \frac{4\sqrt{21}}{3}$

$\frac{4\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$

$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy} \\ x+y^2=5 \end{cases}$

$y=\sqrt{5-x}$

$x^2-4xy+4y^2=xy$

$x^2-5xy+4y^2=0$

$\cancel{x^2-5\sqrt{5-x}\,x+4(5-x)=0}$

$x^2-5x\sqrt{5-x}-x+5=0$

$D=25y^2-16y^2=9y^2$

$x_{1,2}=\frac{5y\pm3y}{2}=\frac{8y}{2}=4y \quad y$

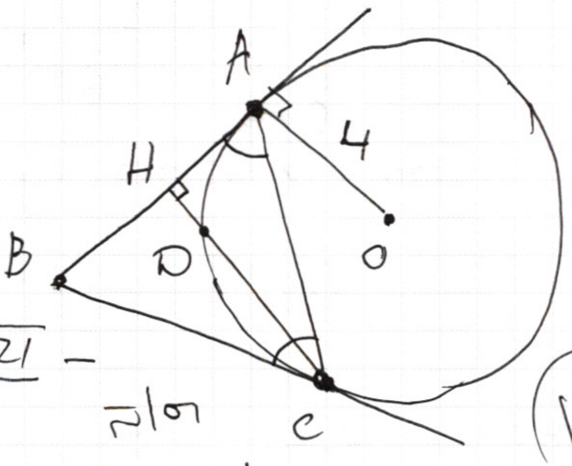
$4-2=2$

$4+1$

$-20 \to -10$

-10

$\frac{13\sqrt{3}}{x}$



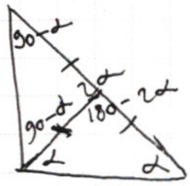
$\frac{-1-\sqrt{21}}{2}-$

$7/\sqrt{7}$

$\sqrt{7}/x$

$7+13$

$\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\cdot\left(-\frac{1+\sqrt{21}}{2}\right)+\frac{2+2\sqrt{21}}{2}=\frac{1+\sqrt{21}}{2}$

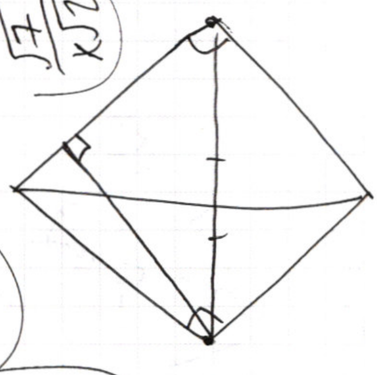


$\frac{AB}{CH}$

$S_{ABD}=6$

$\frac{AB}{2}\cdot DH=6$

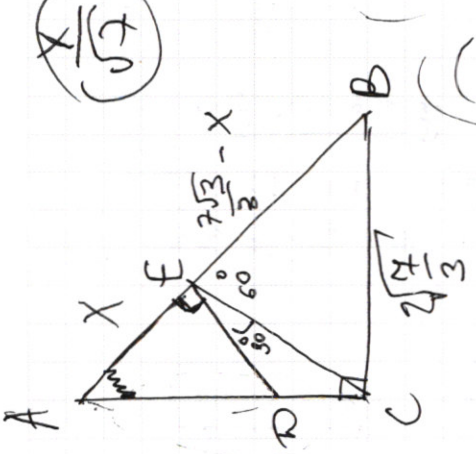
$\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}x$



$\frac{x}{\sqrt{3}}$

$\left(\frac{1+\sqrt{21}}{2}\right)^2$

$\sqrt{7+12}\,x$



$\sqrt{7}$

$\frac{1+\sqrt{21}}{2}-\frac{2+2\sqrt{21}}{2}=\frac{-1-\sqrt{21}}{2}$

$-\frac{(1+\sqrt{21})}{2}+\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$

$\frac{\sqrt{3}}{4x}$

$\frac{4x}{\sqrt{3}}$

$\frac{7x}{\sqrt{3}}$

$\frac{7}{2}x$

x

$\frac{2x}{\sqrt{3}}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy} \\ x+y^2=5 \end{cases} \Rightarrow \quad x^2+4y^2-4xy=xy \quad x=5-y^2$$

12

8 9 10 11

$x^2-5xy+4y^2=0$

~~x = 2y~~

~~$(5-y^2)^2 - 5(5-y^2)y$~~

$28 = 21 + 1 \cdot 21 - 7 \cdot \sqrt{21} \cdot \cos\alpha$

$\frac{4 \cdot 7}{3} = 7 + \frac{21}{3} - \frac{7 \cdot \sqrt{21}}{3} \cdot \cos\alpha$

$2x + z \geq x$

$z \geq -x$

$3z \geq -600 + z$

$2z \geq -600$

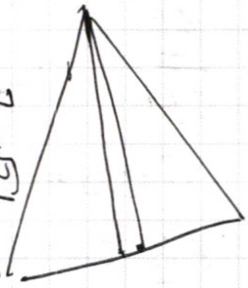
$z \geq -300$

$z \geq -200 + \frac{z}{3}$

1 2 3 4

(1, 4)

y



$100 < x < 200$

$\boxed{x = 100}$

600 | 4
150

141 | 600

564

450

150
150
150
150

$600 + y + 3y > 1200 + 2y$

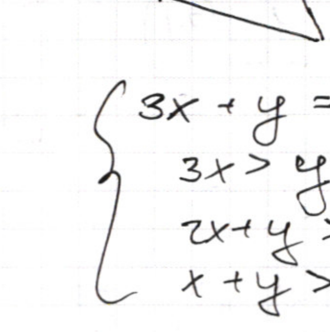
~~$2y > 600$~~

$y > 300$

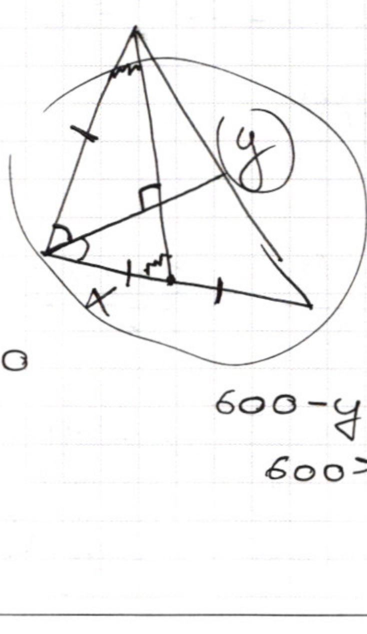
300
300
300

2. $a + b + c = 600$ $\quad a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a, b, c > 0$

$\frac{7}{12\sqrt{21} \cdot 16} = \cos\alpha$



$200 + \frac{y}{3} + y > 400 + \frac{2y}{3}$



$y = 600 - 3x$

~~$2x + 600 - 3x \geq x$~~

~~$600 - x > x$~~

$$\begin{cases} 3x + y = 600 \\ 3x > y \\ 2x + y > x \\ x + y > 2x \end{cases}$$

$600 - y > y$

$600 > 2y$ $\quad \boxed{y < 300}$

$300 < 3x < 600$

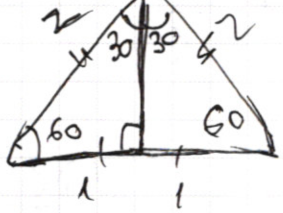
☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

cos

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4-1



$\cos(90+30)$

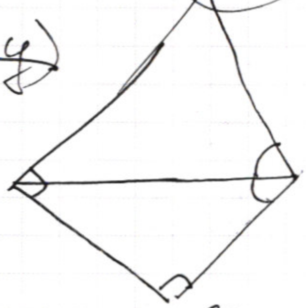
$-\cos 30$

$-\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} 2|x|+|y|+|4-2x-y|>4 \\ x^2-2x-4y+y^2\le 0 \end{cases}$$

~~$xy\cdot\cos\alpha$~~

$(x^2-1)+\cancel{\ldots}^2$ ~~$-2(x+2y)$~~



y^2-4y+1

$(y+1)^2 - (2y)+2$

0 30 45 60 90

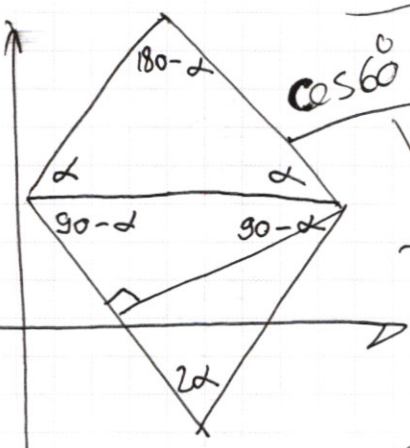
$-2(y+1)$

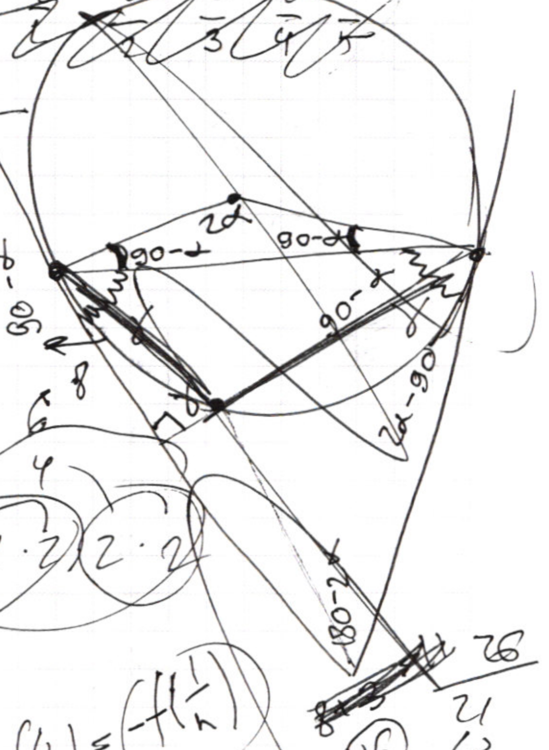
$(x-1)^2+(y-1)^2-2y-2$

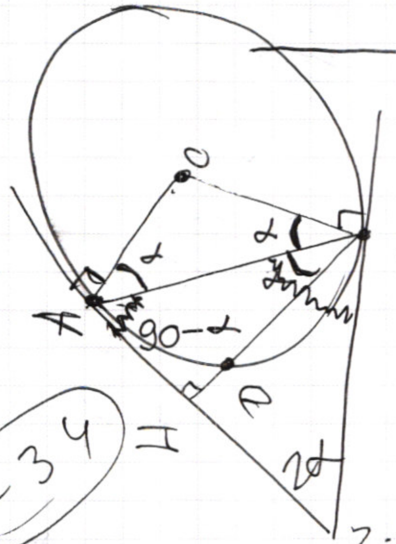
$\cos 60^\circ$

$\frac{1}{2}$

$\cos 60^\circ$







$2\cdot3\cdot3$

$2\cdot9$

$2\cdot2\cdot2\cdot2$

4

$90-180+2\alpha$

$\alpha-2\alpha+90$

$f(n)=-f\left(\frac{1}{n}\right)$

234

$18=2\cdot3\cdot3$

$3\cdot5$

26

21

13

16

$5\cdot2$

$2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3$

3

$2\cdot7$

$\frac{12}{3}$

11

$3\cdot4$

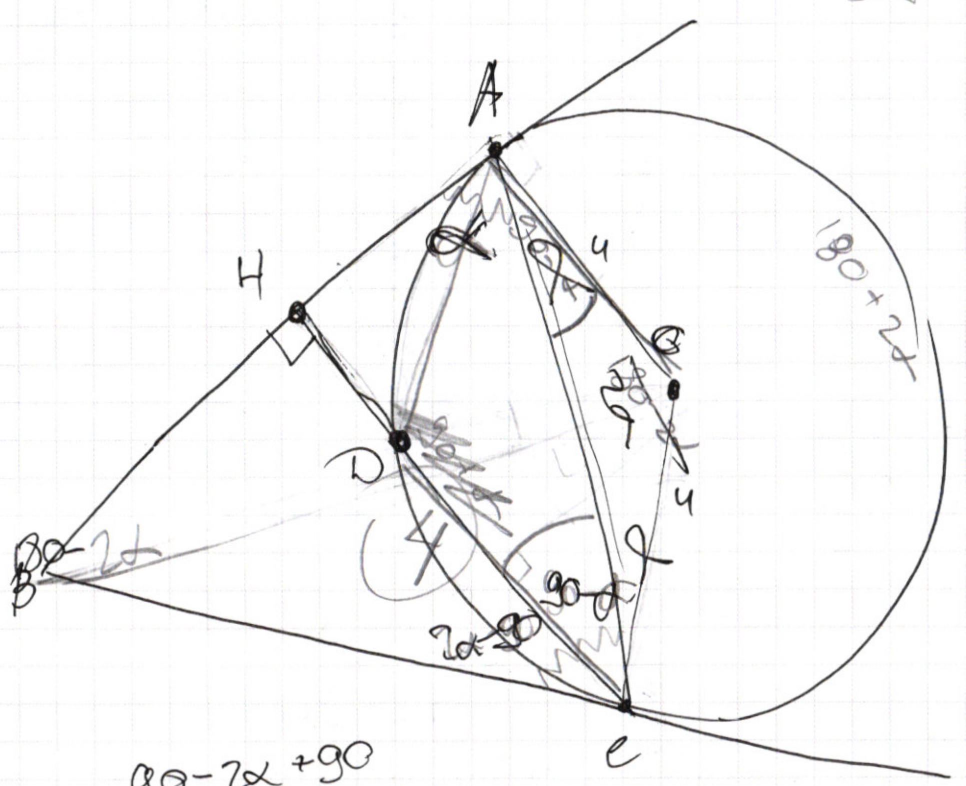
$2\cdot2$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$180-2\alpha+90-\alpha$

$270-3\alpha$

$-90+3\alpha$

$90-2\alpha+90$

$180-2\alpha$

$f(ab) = f(a)+f(b)$

$f(p) = p$

$f(p_1)+f(p_2)+\dots+f(p_n)+f\left(\frac{1}{p_k}\right)+f\left(\frac{1}{p_{k+1}}\right)+\dots+f\left(\frac{1}{p_t}\right)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$[2; 3; 5; 7; 11; 13; 17]$

$\boxed{1 \le x \le 18}$

$1 \le y \le 18$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$8 = 3^2 \cdot 2$