МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 14

ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|} \leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 300 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy}, \\ 2y+x^2=9. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 15, а радиус окружности равен 6.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{29}$, $BC=\frac{5\sqrt{29}}{2}$, а $\angle CED=45^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |3x|+|2y|+|6-3x-2y|>6, \\ x^2-2x-3y+y^2 \leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 19$, $3 \leqslant y \leqslant 19$ и $f(x/y)<0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача № 1

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|}\le 0$$

$$\frac{(x-1)^2+4-4|x-1|}{4(x^2-3x)+|x^2-3x|}\le 0$$

$$\frac{(|x-1|-2)^2}{4(x^2-3x)+|x^2-3x|}\le 0$$

Заметим, что если $x\in(0;3)$, $\to$ тогда ~~$|x^2-3x|$~~ $|(x-3)\cdot x|$ раскрывается с $-$ $\Rightarrow$

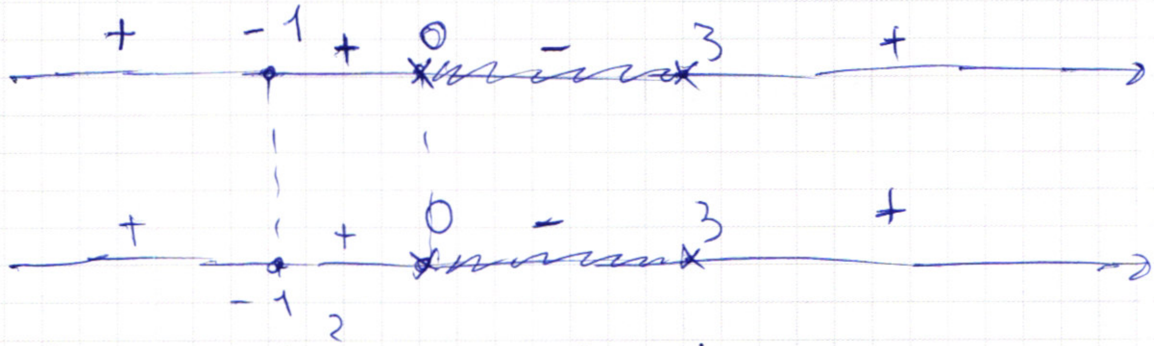
$$\frac{(|x-1|-2)^2}{3(x^2-3x)}\le 0$$

а если $x\in(-\infty;0)\cup(3;+\infty)$.

$$\frac{(|x-1|-2)^2}{4(x^2-3x)+|x^2-3x|}=\frac{(|x-1|-2)^2}{5(x^2-3x)}$$

- При $x=0$ и $x=3$ – нет реш. т.к. $4(x^2-3x)+|x^2-3x|=0$, а на 0 делить нельзя.

Воспользуемся методом областей



$(|x-1|-2)^2=0, \quad |x-1|=2, \quad x=3;-1$

$5(x^2-3x)$ и $3(x^2-3x)=0, \quad x^2-3x=0, x=3;0$

$x\in\{-1\}\cup(0;3)$

Ответ: $x\in\{-1\}\cup(0;3)$.

№3.

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy} \\ 2y+x^2=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} (y-2x)^2=xy \\ y-2x\geq 0 \end{cases} \\ 2y+x^2=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} y^2-4xy+4x^2=xy \\ 2y+x^2=9 \end{cases} \\ y-2x\geq 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \begin{cases} y^2-5xy+4x^2=0 \\ 2y+x^2=9 \end{cases} \\ y\geq 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} (x-y)(4x-y)=0 \\ 2y+x^2=9 \end{cases} \\ y\geq 2x \end{cases} \quad \begin{cases} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=y \\ 4x=y \end{array}\right. \\ 2y+x^2=9 \end{cases} \\ y\geq 2x \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=y \\ 2y+x^2=9 \end{cases} \\ \begin{cases} 4x=y \\ 2y+x^2=9 \end{cases} \end{array}\right. \\ y\geq 2x \end{cases} \qquad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=y \\ x^2+2x-9=0 \end{cases} \\ \begin{cases} 4x=y \\ x^2+8x-9=0 \end{cases} \end{array}\right. \\ y\geq 2x \end{cases} \qquad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=y \\ x=\frac{-2\pm 3\sqrt{5}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} 4x=y \\ x=1;-9 \end{cases} \end{array}\right. \\ y\geq 2x \end{cases}$$

Проверем корни по $y\geq 2x$

• $x=\frac{-2-3\sqrt{5}}{2}=y$.

$\frac{-2-3\sqrt{5}}{2}<0$, $\Rightarrow y\geq 2x$, $-$ $x=\frac{-2-3\sqrt{5}}{2}$ – корень.

• $x=\frac{-2+3\sqrt{5}}{2}=y$ $\quad 3\sqrt{5}-2>0$, $\Rightarrow$ $y<2x$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow x=\frac{-2+3\sqrt{5}}{2}$ – не корень.

• $x=1$.

$1\geq 2$ – неверно $\quad x=1$ – не корень.

• $x=-9$. $\quad y\geq 2x \Rightarrow 4x\geq 2x$ – $-36\geq -18$ – неверн

$\cancel{-8\geq}\,-18$ – верно. ~~$x=-9$ – корень~~. $x=-9$ – не корень.

Ответ: $\left(\frac{-2-3\sqrt{5}}{2};\frac{-2-3\sqrt{5}}{2}\right)\cup\cancel{(-9;-36)}$.

Задача №6

$$\begin{cases} |3x|+|2y|+|6-3x-2y|>6 \\ x^2-2x-3y+y^2\le 0 \end{cases}$$

Рассмотрим случай если $6-3x-2y\ge 0$

, тогда $|3x|+|2y|+6-3x-2y>6$;

$(|3x|-3x)+|2y|-2y>0$

Воспол. методом обл. (опр. f для $x,y>0$, $x>0, y<0$ ...).

$x>0, y>0$

$$\begin{cases} 3x+2y+|6-3x-2y|>6 \\ x^2-2x-3y+y^2\le 0 \end{cases}$$

если $\{6-3x-2y\ge 0$, $\Rightarrow$ ~~6-3x~~ $3x+2y+6-3x-2y>6$

$6>6$ – неверно. $\Rightarrow$ $6-3x-2y<0$

$$\begin{cases} 3x+2y+3x+2y>12 \\ x^2-2x-3y+y^2\le 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x+2y>6 \\ x^2+y^2\le 2x+3y \end{cases}$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №7

$f(a)+f(b)=f(ab)$

$f(p)=p$ p-простое.

$f\left(\frac{x}{y}\right)<0$.

Заметим, что $f(ab)=f(a)+f(b)$.

Пусть число x – не простое (иначе $f(x)=x$), тогда

$x=p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_n$ – где $p_1\ldots p_n$ – простые множители.

тогда $f(x)=f(p_1\cdot(p_2\ldots p_n))=p_1+f(p_2\ldots p_n)=$

а $f(p_2\ldots p_n)=f(p_2)+f(p_3\ldots p_n)=p_2+f(p_3\ldots p_n)$.

$\Rightarrow f(x)=p_1+p_2+p_3\ldots p_n$, где $p_1\cdot p_2\ldots p_n=x$ ($p_1, p_2\ldots p_n$ – простые множители).

$\Rightarrow$ функция $f(x)$ – возвращает сумму его простых множителей (при x – натур.

$f\left(\frac{x}{y}\right)$ – $\frac{x}{y}$ – рац. по усл., тогд.

$f\left(\frac{x}{y}\cdot y\right)=f\left(\frac{x}{y}\right)+f(y)\Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)\Rightarrow$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=$ разности суммы цифр пр. мн. x и y.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$f\left(\frac{x}{y}\right) > 0$, когда $f(x) > f(y)$

$\rightarrow$ сумма$^{у.п.п}$ от x $>$ сумм. у. прост. мн от y.

• $f(1\cdot 2) = f(1) + f(2)$ $\Rightarrow f(2) = f(2) + f(1)$

т.е. $\Rightarrow f(1) = 0$

~~$f(p\cdot y) = f p + f(y)$~~

~~Если x - прост~~

~~$f(x\cdot y) = f$~~ $p_1 \cdot p_2 \cdots p_n \cdot x$ (т.к x - простой множ.)

~~$\Rightarrow f(x\cdot y) = \underbrace{f(x)}_{=x} + \underbrace{(p_1 \cdot p_2 \cdots p_n)}_{=f(y)}$~~ $= f(x) + f(y)$ -

Рассмотрим при каких x и y - выполн.

$f(x\cdot y) = p_1 + p_2 + p_3 + \cdots p_n$, ... - это пр. мн.

от x + прост. мн. от $y \Rightarrow f(xy) = f(x) + f(y)$

при x, y - ~~∈~~ ∈ N, ~~при $x \neq y$~~.

$f(x/y) < 0 \Rightarrow f(x) < f(y)$

~~$f(x)$~~ -

x	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$f(x)$	3	4	5	5	7	6	6	7	11	7	13	9	8	8	17	8	19

$f(19) > f(17) > f(13) > f(11) > f(14) > f(18) = f(16) = f(15)$

$f(15) > f(12) = f(10) = f(7) > f(9) = f(8) > f(6) = f(5) > f(4) > f(3)$

$f(9) > f(x)$ (когда $x = y$, $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(1) = 0 < 0$ - невер $\Rightarrow$ $x \neq y$)

при ~~f~~ $y = 19$,

$f(19)$
$f(17)$
$f(13)$
$f(11)$
$f(14)$
$f(18)$; $f(16)$

- Нас интересует не x и y, а $f(x)$ и $f(y)$, если при x_1 и x_2 $f(x_1) = f(x_2)$ - ~~то~~ выбираем

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 6

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

при $y=19$, x ~~=~~ может принимать $17-1=16$ зн.

$y=17$, x – м. принимать $17-2=15$ зн.

~~$y=13$, x – м. принимать 14 зн.~~

~~$y=$~~

$y=13$, x – м. прин. 14 зн.

$y=11$, x – 13 зн.

$y=14$, x – 12 зн.

~~$y=18$, $x=11$ зн.~~ $y=18$ или $y=16$, или $y=15$ – x – 9 зн для каждого

~~$y=$~~

$\Rightarrow + 9\cdot 3=27$ пар.

$y=12, 10, 7$, x – 6 зн. по 3 $\Rightarrow 6\cdot 3=18$ пар +

$y=9, 8$, – x – 4 зн. по 2 $\Rightarrow 4\cdot 2=8$ пар +

$y=6, 5$, x – 2 зн. по 2 $\Rightarrow 2\cdot 2=4$ пар. +

$y=4$, x – 1 зн. $=1+$

$y=3$, – нет решений для x

$\Rightarrow$ Всего пар – $16+15+14+13+12+27+18+8+4+1=$

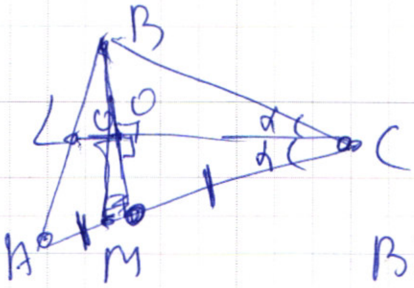
$=(16+14)+(15+13+12)+(27+8+4+1)+18=$

$=30+40+40+18=128$ натур. чисел.

Ответ: 128

Задача №2

Докажем, что если мед. ⊥ бисс. ⇒ одна сторону в 2 раза больше другой



BM - медиана, CL - биссектриса

$\angle C = 2\alpha$.

1) Пусть $BM \cap CL = O$,

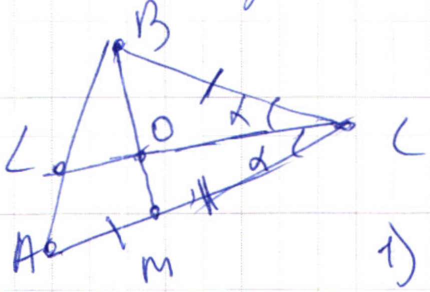
2) $\angle MOC = \angle COB = 90^\circ \Rightarrow CO$ - высота в $\triangle BCM$

3) $\angle BCO = \alpha = \angle OCM \Rightarrow CO$ - бис. в $\triangle BCM$

4) 2) и 3) ⇒ $\triangle BCM$ - р/б ⇒ $BC = CM$, $CM = AM$.

5) $AC = AM + MC = 2 \cdot BC$ - доказано.

Докажем, что если одн. сторона в 2 раза > другой ⇒ медиана ⊥ биссектрисе



$BC = AM = MC$.

1) $\triangle BOC = \triangle MOC$ ($\alpha = \alpha$, CO-общ., $BC = CM$)

2) ⇒ $\angle MOC = \angle COB$. (т.к. $\triangle BOC = \triangle MOC$).

3) $\angle BOC + \angle MOC = 180^\circ$ (на прямой).

4) $\angle BOC + \angle MOC = 2\angle BOC = 180^\circ$

5) $\angle BOC = \angle MOC = 90^\circ \Rightarrow CL \perp BM$

— Доказано.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

~~Тогд~~ γ =>.

~~Тот.~~ Биссектр $\perp$ медиане - ТОГДА и только тогда
(по 2 ранее док. фактам)
когда одна сторона в 2 раза больше другой

. Тогда стороны Δ - Пусть - $a, 2a, b$.
По Нер-ву Δ - $a+b>2a \Rightarrow b>a$
$b<a+2a \Rightarrow b<3a$

$a<b<3a$

$3a+b=300$

при $b\le 75$, $3a \ge b$, => $b>75$

$3a \ge 300-75=225 \Rightarrow a \ge 75$

при $b<3a \Rightarrow 3a>b$
~~$b=300$~~ $3a+b=300$

$\left.\begin{matrix} 3a>b \\ 3a+b=300 \end{matrix}\right\}$ $3a+3a>300$
$6a>300$
$a>50$
$150>b$.

=> $75<b<150$

=> для b - $150-75-1=74$ варианта

Ответ: 74 различных треугольников.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №6

$$\begin{cases} |3x|+|2y|+|6-(3x+2y)|>6 \\ x^2-2x-3y+y^2\le 0 \end{cases}$$

при $x>0,\ y>0$

$$\begin{cases} 3x+2y+|6-(3x+2y)|>6 \\ x^2+y^2\le 2x+3y \end{cases}$$

при $3x+2y \le 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x+2y>6$

$$\begin{cases} \cancel{3x+2y+3x+2y>12}\ 3x+2y>6 \\ x^2+y^2\le 2x+3y \end{cases}$$

$6x^2+6y^2\le 12x+18y$

$\cancel{6\le 12x+8y}$

$6\ge 12x+8y$

$\cancel{6x^2+6y^2-6\ge}$

$x^2-2x+3x-3y+2y\le 3x+2y$

$x^2+x+y^2-y\le 3x+2y$

$$\begin{cases} 3x+2y+6-3x-2y>6 \\ x^2+y^2\le 2x+3 \end{cases}$$

$\Rightarrow \begin{cases} 6>6 - \text{невер} \\ x^2+y^2\le 2x+x \end{cases}$

$2y-6>3x$

$8y-24>12x$

$-6>-12x-8y$

$24-8y<-12x$

$6x^2+6y^2\le 12x+18y$

$24-8y<-12x$

$6x^2+6y^2+24-8y\le 18y$

$\cancel{6x}\ 6y^2-26y+24\le -6x^2$

$2(y-3)(3y-4)\le -6x^2$

☑ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №

(Нумеровать только чистовики)

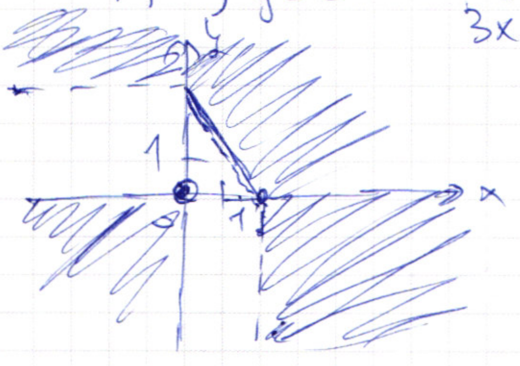
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №6

$$\begin{cases} |3x|+|2y|+|6-3x-2y|>6 \\ x^2-2x-3y+y^2\le 0 \end{cases}.$$

Построим $|3x|+|2y|+|6-3x-2y|>6$

$x\ge 0,\ y>0$



$3x+2y+|6-3x-2y|>6$

при $6-3x-2y\ge 0$ – нет. реш

– $3x+2y-3x-2y+6>6$

$6>6$ – (!)

=>

$3x+2y+3x+2y>12$ $(3x+2y>6)$

$x<0\ y>0.$ $\cancel{3x}$ $-3x+2y+|6-3x-2y|>6.$

$-3x+2y+6-3x-2y>6$

$-6x>0$, x – любое <0

$-3x+2y-6+3x+2y>6$

$4y>12,\quad y>3$

$x\ge 0,\ y<0.$

$-3x-2y+6-3x-2y>6$ (при $-3x-2y-6+3x-2y>6$ $-6>6$ – (!)).

$x<$

$-6x-4y>0\qquad -(6x+4y)>0$

$\cancel{-6x+6}$ $-6x>4y\qquad y<-\frac{3}{2}x$

$y=-1{,}5x$

$x > 0,\ y < 0$

$3x - 2y + 6 - 3x - 2y > 6$

$6 - 4y > 0$

$y < 0$

$3x - 2y - 6 + 3x + 2y > 6$

$6x > 12$

$x > 2$

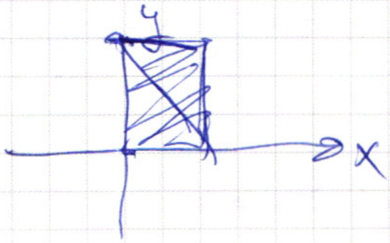
Пол. $x^2 - 2x - 3y + y^2 \le 0.$

$y \le 3$

$\cancel{y(y-3) + x(x-2) \le 0}$

$x^2 + y^2 \le 2x + 3y \quad 2x + 3y \ge 0$

Заметим что $0 \le y \le 3$, $0 \le x \le 2$



Заметим, что D_f: $x > 0, y > 0$ ⇒ нас интересует только полож. x и y ⇒ при $x \in [0;2]$ − $0 \le y \le 3$, а при $y \in [0;3]$ − $0 \le x \le 2$. ⇒

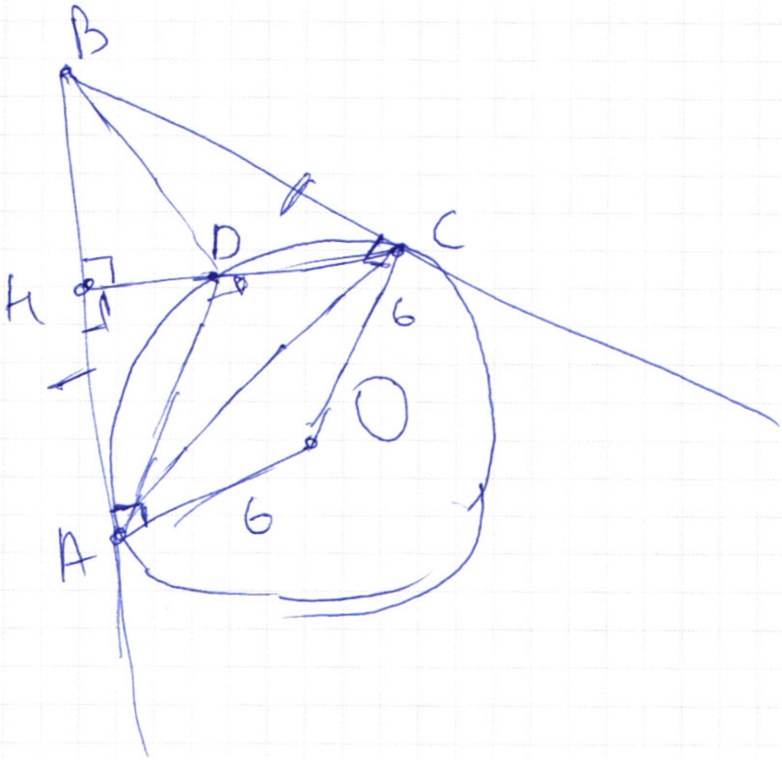
Накладываем графики ⇒ в области $x \ge 0, y > 0$, ⇒ получается треугольник с координатами $(0;3), (2;3), (2;0)$

$S_\Delta = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3$

Ответ: 3

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №4



1) $S_{\triangle ABD} = 15 = \frac{DH \cdot AB}{2} \Rightarrow DH = \frac{30}{AB}$

$DC = AO = 6. \Rightarrow CH = DH + DC = DH + 6$

$DH = CH - 6$ $\qquad$ $CH - 6 = \frac{30}{AB}$

$CH = \frac{30}{AB} + 6$ $\qquad$ $\cancel{CH}$

$AB \cdot CH = 30 + 6 \cdot AB$ $\qquad$ S $\qquad$ $\frac{\cancel{C}AB}{CH} = \frac{30}{6} = \frac{5}{1}$

$AB = \frac{30 \cdot}{}$

AB $\qquad$ AB

Ответ: $\frac{5}{1}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|}\le 0$$

$a+b$

$b+c$

$c+a$

$2(a+b+c)=300$

$a+b+c=150$

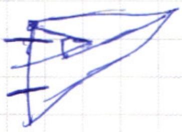
$(x-1)^2=x^2-2x+1$

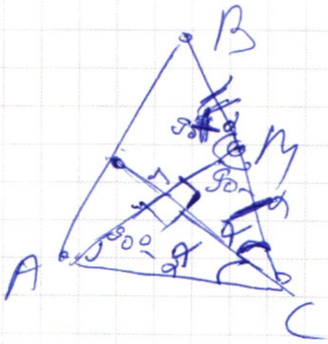
$(x-1)^2+4-4|x-1|=\underline{(|x-1|-2)^2}$

$4x(x-3)+|x|\cdot|x-3|$

$4(x^2-3x)+|x^2-3x|$

$4a+|a|$





$D=26^2-4\cdot6\cdot24$

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy} \\ 2y+x^2=9 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=2x+\sqrt{xy} \\ y=\frac{(3-x)(3+x)}{2} \end{cases}$$

$\cancel{\frac{9-x^2}{2}}$ $\cancel{y}$

$(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2=x-2\sqrt{xy}+y$

$\cancel{9-x^2=4x+2\sqrt{xy}}$

$2y=4x+2\sqrt{xy}$

$3y-3x=(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$

$\cancel{3(y-x)=}$

$$\begin{cases} (y-2x)^2=xy \\ \cancel{xy}> y-2x>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2-4xy+4x^2=xy \\ y>2x \end{cases} \quad \begin{cases} \begin{cases} y^2-5xy+4y^2=0 \\ y>2x \end{cases} \\ \cancel{2}y=\frac{9-x^2}{2} \end{cases}$$

$$\frac{(9-x^2)^2}{4}-5x\cdot\frac{9-x^2}{2}+4x^2=0$$

$$\frac{x^2-6x+9+x^2+6x+9}{4}-\frac{5x\cdot(3-x)(3+x)}{2}+4x^2=0$$

$$x^2+9-5x\cdot(3-x)(3+x)+8x^2=0$$

$$x^2+9-45x+5x^3+8x^2=0$$

$$5x^3+9x^2-45x+9=0$$

$\cancel{40+36-90+9}$ $\cancel{135+81-135+9}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

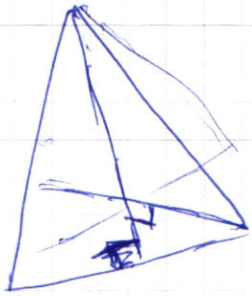
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2a<b$

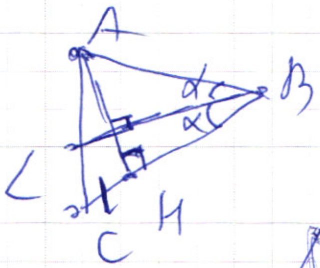
$2b<c$

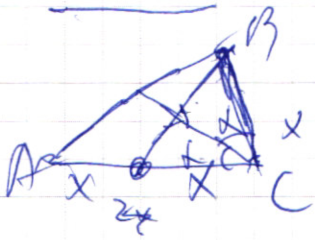
$2c<a$

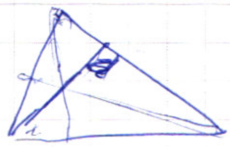


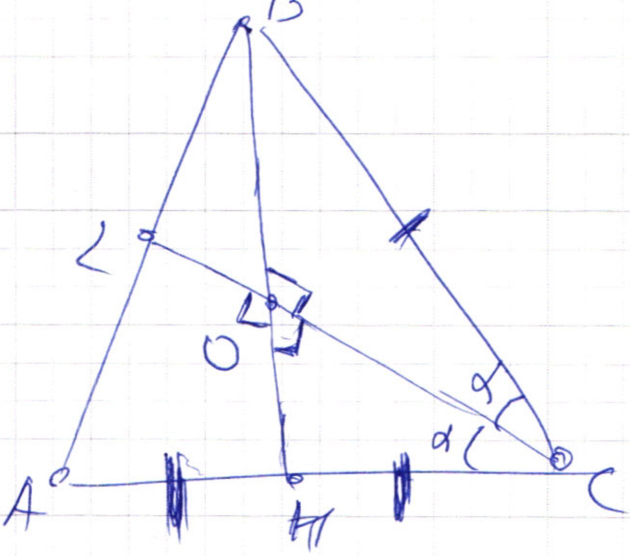
$3a+2c<b$

~~$3a$~~$<c$









a b

$3a+b=300$

b a

$2a$

$b<3a$

$2a+b>a$

~~$a+b>0$~~

$a+b>2a$

$b>a$

O $BC=HC$ — т.к. $\angle BHC$ — р/б

☑ черновик ☐ чистовик

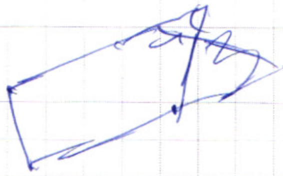
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} |3x|+|2y|+|6-3x-2y|>6 \\ x^2-2x-3y+y^2\leq 0 \end{cases}$$

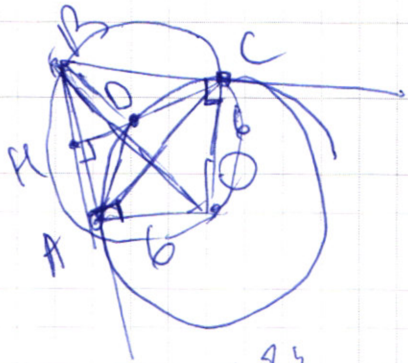
$x>y>0$



$x^2+y^2\leq 2x+3y$

$x^2+y^2\geq 0$

$2x+3y\geq 0$



$\Rightarrow$ $6-3x-2y$

$6-(3x+2y)$

$S(ABD)=144$

$x^2+x+y^2-y-3x-2y$

$6=3x+2y$

$x(x+1)+y(y-1)\leq 3x+2y$

$2y=6-3x$

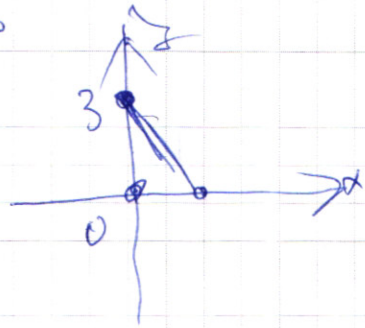
$-x(x+1)-y(y-1)\geq -3x-2y$

$|3x|+|2y|+|6-x(x+1)-y(y-1)|>6$ $2y=6$ $y=\frac{6-3x}{2}$

$(3x+2y)+|6-x^2-x-y^2+y|>6$

$3x+2y+|6-3x-2y|>6$

$6-(3x+2y)$



$x^2+y^2\leq 2x+3y$

черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} |3x|+|2y|+|6-3x-2y|>6 \\ x^2-2x-3y+y^2\geq 0 \end{cases}$$

$x^2-2x+y^2-3y\geq 0$

$(x-1)^2$

$6-3x-2y>0$

$|3x+2y|=|6|$

$\cancel{6>2}\quad -3x-2y\leq -6$

$f(x^2)=f(x)+f(x)$

$\cancel{6}>6$

$x^2+y^2-6>0$

$6,$

$3x+2y+|3x|+|2y|>18\quad x^2+y^2\leq 1$

$3y>-2x$

$6y>-4x$

$|3x|+|2y|=|6-3x-2y|>6$

$2x+3y\geq 0 \;.\; 6$

$f(p\cdot q)=p+q\; x^2+y^2\leq 2x+3y$

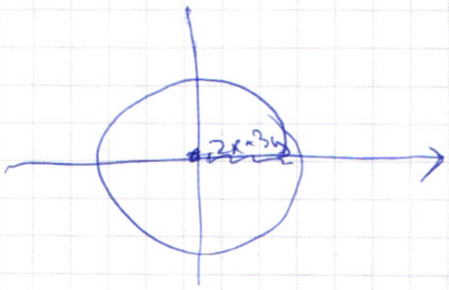
$12x+18y\geq 0\quad 2x+3y>$

$2x\geq -3y$

$3x+4,5y\geq 0$

$6x\geq -9y$

$3x\geq -4,5y$



$\frac{9}{2}\quad \frac{4}{3}x$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$x\,y^2 \le 3y$

$x^2 \le 2x$

$x^2+y^2 \le 2x+3y$

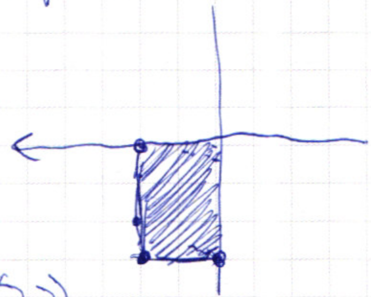
$x^2-2x-3y+y^2$

$3+y^2 \le 3y$

$9+y^2 \le 6+3y$

$1+y^2 \le 2+3y$

$f(1\cdot b) = f(1)+f(b)$



$f(2\cdot 2)$

$x = y\cdot p$, где p - простое,

$f(a^2) = 2f(a)$ $f(p) = p > 0$

5 $f(2\cdot 0{,}5) = f_1 = 0$

$f(2$

3

$f(2)+f(0{,}5) = 0$

10 5

$f(12) + 3 + f(4)$

3 4

$f\left(\frac{3}{4}\right) < 0$

6 8 5

$f(12) < f(2)+f(6)$

$f(12) = 2+f(6)$ $f(12) = 2\cdot 2\cdot 3$

$f(6) = f(3)+f(2) = 5$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy} \\ 2y+x^2=9 \end{cases}$$

$x^2+\cancel{(\sqrt{2y})^2}=9$

$x^2+2(2x+\sqrt{xy})=9$

$(y-2x)^2=xy$

$\cancel{xy\geq 0}$

$y-2x\geq 0$ $\quad y=$

$y=2x+\sqrt{xy}$

$y^2-5xy+4x^2=0$

$\cancel{y^2-4xy}$

$y-2x)$

$\cancel{\sqrt{y}-\sqrt{}}$

$x^2=9-2y$

$y^2\cancel{-5x}-4xy+4x^2=xy$

$x=$

$y^2-5xy+4x^2=0$

$y=2x+\sqrt{xy}$

(y^2-1)

$(\sqrt{y}+\sqrt{2x})^2=y$

$4x+2\sqrt{xy}+x^2=9$

$\frac{9-x^2}{2}-2x=\sqrt{x\cdot\frac{9-x^2}{2}}$

$\cancel{18-2x^2-8x}=$

$9-x^2-4x=\sqrt{18x-2x^3}$

$-(x^2+4x-9)=$

$\cancel{(x+\sqrt{2y})^2}$ $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2=x+2\sqrt{xy}+y$

18

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$y^2+4x^2=5xy$

$y^2+(2x)^2=5xy$

$y^2-2xy=9$

$(x-y)(x+2y)$

$\cancel{x^2}\ y^2-5xy+4x^2=(x-y)(4x-y)$

$(x-y)(4x-y)$

$4x^2-4xy$

$4x^2-4xy-xy+y^2$

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy} \\ 2y+x^2=9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} y^2-4xy+4x^2=xy \\ y>2x \end{cases} \\ 2y+x^2=9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-y)(4x-y)=0 \\ y>2x \\ 2y+x^2=9 \end{cases}$$

$x=y$

$4x=y$

$x^2+2x-9=0$

$D=4+4\cdot 9=45=3\sqrt{5}$

$x_{1,2}=\frac{-2\pm 3\sqrt{5}}{2}$

$x^2+8x=9$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)