МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 13 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство
$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|} \leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 600 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy}, \\ x+y^2=5. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB:CH$, если площадь треугольника ABD равна 6, а радиус окружности равен 4.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD:AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{7}$, $BC=2\sqrt{\frac{7}{3}}$, а $\angle CED=30^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе
$$\begin{cases} |2x|+|y|+|4-2x-y|>4, \\ x^2-2x-4y+y^2 \leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 18$, $1 \leqslant y \leqslant 18$ и $f(x/y)<0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|} \le 0$

При $x<0$ $\frac{x^2-6x+10+2x-6}{2x^2-4x+(-x)(2-x)} \le 0$, $\frac{x^2-4x+4}{3x^2-6x} \le 0$

$\frac{(x-2)^2}{3x(x-2)} \le 0$, $\frac{\overset{<0}{x-2}}{\underset{<0}{3x}} \le 0$ нет решений

При $x \in [0;2)$ $\frac{x^2-6x+10+2x-6}{2x^2-4x+2x-x^2} \le 0$, $\frac{x^2-4x+4}{x^2-2x} \le 0$

$\frac{(x-2)^2}{x(x-2)} \le 0$, $\frac{\overset{<0}{x-2}}{\underset{<0}{x}} \le 0$ ~~нет решений~~

$\begin{cases} x \le 2, x \ne 0 \\ 0 \le x < 2 \end{cases} \Rightarrow 0 < x < 2$

При $x \in [2;3)$ $\frac{x^2-6x+10+2x-6}{2x^2-4x+x^2-2x} \le 0$, $\frac{x^2-4x+4}{3x^2-6x} \le 0$, $\frac{x-2}{x} \le 0$

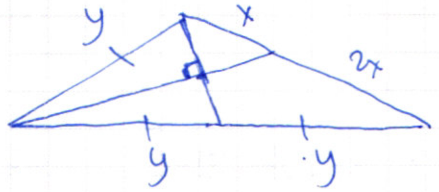
$\begin{cases} x \le 2, x \ne 0, x \ne 2 \\ 2 \le x < 3 \end{cases}$ нет решений

При $x \in [3;+\infty)$ $\frac{x^2-6x+10-2x+6}{2x^2-4x+x^2-2x} \le 0$, $\frac{x^2-8x+16}{3x^2-6x} \le 0$, $\frac{\overset{\geq 0}{(x-4)^2}}{\underset{>0\ \ >0}{3x(x-2)}} \le 0$

нет решений

Ответ: $x \in (0;2)$

2)



$P = 3x+3y = 3(x+y) = 600$

$x+y=200$

y-целое, тогда и x-целое

$x=99$, $y=101$

$\begin{cases} 3x < 3y \\ 2y < 3x+y \\ y < 2y+3x \end{cases}$ $\begin{cases} x<y \\ y<3x \end{cases}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} x+y=200 \\ y<3x \end{cases} \quad \begin{cases} 200-x<3x \\ x+y=200 \end{cases} \quad \begin{cases} x>50 \\ y<150 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 50<x<100 \\ 100<y<150 \end{cases}$$

Всего: 49 треуг.

3) $\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy} \\ x+y^2=5 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 \cancel{5} -4xy+4y^2=xy \\ x+y^2=5, \ x=5-y^2 \end{cases}$

$y^4-10y^2+25-20y+4y^3+4y^2=5y-y^3$

$y^4-6y^2-25y+5y^3+25=0$

$x=4, \ y=1$

$$\begin{array}{l|l} y^4+5y^3-6y^2-25y+25 & y-1 \\ \hline y^4-y^3 & y^3+6y^2-25 \\ \quad 6y^3-6y^2 & \\ \quad 6y^3-6y^2 & \\ \qquad -25y+25 & \\ \qquad -25y+25 & \\ \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

$(y-1)(y^3+6y^2-25)=0$

$y^3+6y^2=25$

$-125+6\cdot 25=25$

$$\begin{array}{l|l} y^3+6y^2-25 & y+5 \\ \hline y^3+5y^2 & y^2+y-5 \\ \quad y^2-25 & \\ \quad y^2+5y & \\ \qquad -5y-25 & \\ \qquad -5y+25 & \\ \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

$(y-1)(y+5)(y^2+y-5)=0$

$y^2+y-5=0$

$D=1+20=21$

$$\left[\begin{array}{l} y=\frac{-1+\sqrt{21}}{2} \\ y=\frac{-1-\sqrt{21}}{2} \end{array}\right.$$

$y=1, \ x=4$

$y=-5, \ x=-20$

$y=\frac{\sqrt{21}-1}{2}, \ x=5-\frac{(21-2\sqrt{21}+1)}{4}=\frac{20-21+2\sqrt{21}-1}{4}=\frac{2\sqrt{21}-2}{4}=\frac{\sqrt{21}-1}{2}$

$\cancel{\frac{\sqrt{21}-1}{2}+\frac{21-2\sqrt{21}+1}{4}=\frac{20}{4}=5}$

$y=\frac{-\sqrt{21}-1}{2}, \ x=5-\frac{(21+2\sqrt{21}+1)}{4}=\frac{20-22-2\sqrt{21}}{4}=\frac{-\sqrt{21}-1}{2}$

Ответ: $(4;1)$, $(-20;-5)$, $\left(\frac{\sqrt{21}-1}{2}; \frac{\sqrt{21}-1}{2}\right)$, $\left(\frac{-\sqrt{21}-1}{2}; \frac{-\sqrt{21}-1}{2}\right)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

6) $\begin{cases} |2x| + |y| + |4-2x-y| > 4 & (1) \\ x^2 - 2x - 4y + y^2 \le 0 & (2) \end{cases}$

(2) $(x-1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 \le 0$ (1) $4-2x-y \geq 0$

$(x-1)^2 + (y-2)^2 \le 5$ $y \le 4-2x$

$|4-2x-y| > 4 - |2x| - |y|$

$16 + 4x^2 + y^2 - 8x - 4y + 2xy > 16 + 4x^2 + y^2 - 8|x| - 4|y| + 2|xy|$

$-4x - 2y + xy > -4|x| - 2|y| + |xy|$

$4(|x|-x) + 2(|y|-y) > |xy| - xy$

при $x \geq 0$ и $y<0$ при $x \geq 0$ и $y \geq 0$

$-4y > -2xy$ $0>0$ нет решений

$\cancel{x>1}$ $x<2$

при $x<0$ и $y<0$ при $x<0$ и $y \geq 0$

$-8x - 4y > \cancel{-2xy}\ 0$ $-8x > -2xy$

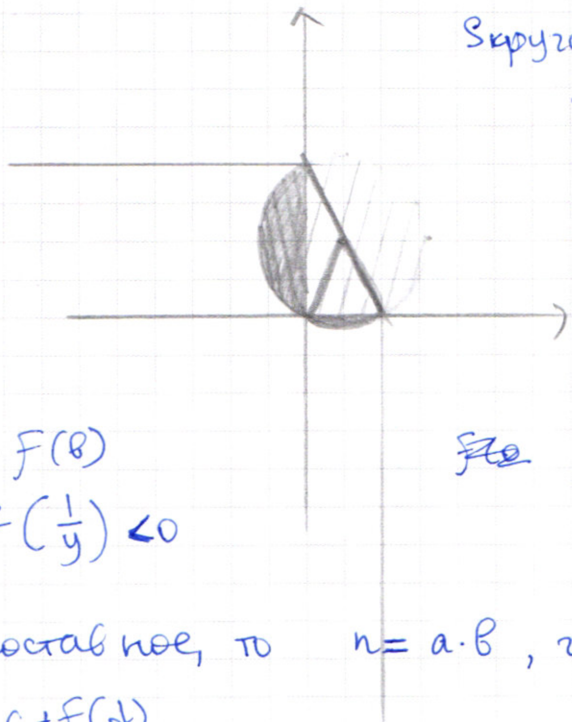
$\cancel{xy > 4x+8y}$ $y<4$

$2x+y<0$

$y < -2x$

$S_{круга} = \pi R^2 = 5\pi$

$S_{фиг.} = 2{,}5\pi - 4$



7) $f(ab) = f(a) + f(b)$ $\cancel{f(0)}$

$f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) < 0$

Если $\cancel{f}$ n – составное, то $n = a \cdot b$, где a – простое число

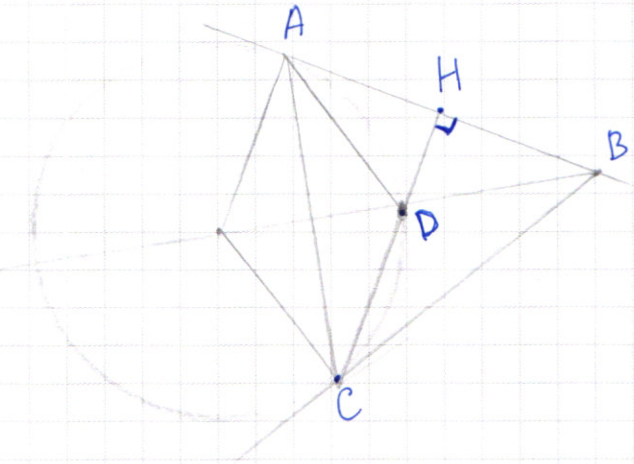
$f(n) = a + f(b) = a + c + f(d)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4)

$S_{ABD}=6$, $R=4$

Найти: $AB:CH$



$AK^2 = HD \cdot HC$

$\frac{1}{2} HD \cdot AB = 6$

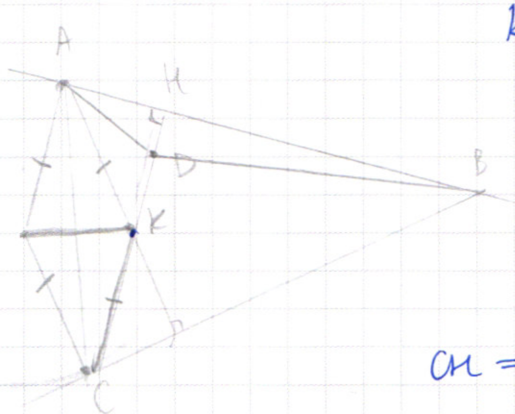
$HD = \frac{12}{AB}$

$AK^2 = \frac{12}{AB} \cdot HC$

$\frac{BK}{BC} = \frac{BK}{AC}$

~~$\frac{1}{2} HC \cdot AB =$~~ $AK^2 = 16 - KH^2$

$KH = CH - 4$



$KH^2 = CH^2 - 8CH + 16$

$AK^2 = 8CH - CH^2 = \frac{12}{AB} \cdot CH$

$\frac{AC}{AB} = \frac{CH}{CB}$

$8 - CH = \frac{12}{AB}$

$CH = \frac{CB \cdot AC}{AB}$

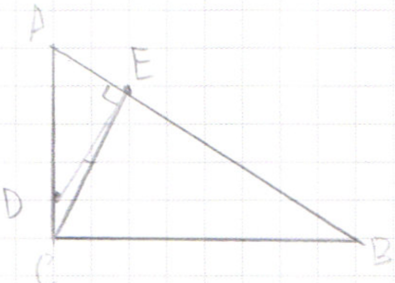
$CH = 8 - \frac{12}{AB}$

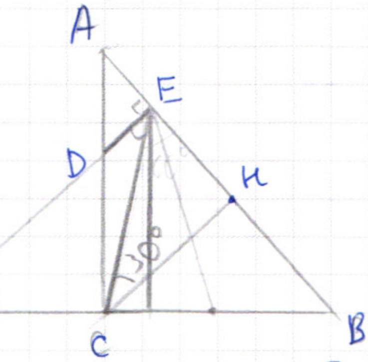
$AB \cdot CH = 8AB - 12$

$AB(CH - 8) = -12$

$AB = \frac{12}{8 - CH}$

5)





$AC = \sqrt{7}$, $BC = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$

$\angle CED = 30°$

$\frac{S_{ADE}}{S_{ACE}} = \frac{AD}{AC}$

$\frac{AE}{DE} = \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{7} \cdot \sqrt{3}}{2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$AB^2 = 7 + 4 \cdot \frac{7}{3} = \frac{21+28}{3} = \frac{49}{3}$

$AB = \frac{7}{\sqrt{3}}$

$S_{ADE} = \frac{2\sqrt{3}}{3 \cdot 2} AE^2 = \frac{\sqrt{3}}{3} AE^2$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$CH = \frac{CB\cdot AC}{AB} = \frac{\frac{2\cdot 7}{\sqrt3}}{\frac{7}{\sqrt3}} = 2$$

$$\frac{EH}{CH} = tg\,30^\circ = \frac{\frac12}{\frac{\sqrt3}{2}} = \frac{1}{\sqrt3} \Rightarrow EH = \frac{2}{\sqrt3}$$

$$\frac{AH}{AC} = \frac{CH}{CB} \Rightarrow AH = \frac{AC\cdot CH}{CB} = \frac{2\sqrt7}{\frac{2\sqrt7}{\sqrt3}} = \sqrt3$$

$$AE = AH - EH = \sqrt3 - \frac{2}{\sqrt3} = \frac{1}{\sqrt3}$$

$\cancel{AD}$, $$\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AH} = \frac{\frac{1}{\sqrt3}}{\sqrt3} = \frac13$$

$$\frac{AE}{AH} = \frac{DE}{CH} = \frac13 \Rightarrow DE = \frac{CH}{3} = \frac23$$

$$S_{ADE} = \frac{AE\cdot DE}{2} = \frac{\frac{1}{\sqrt3}\cdot\frac23}{2} = \frac{1}{3\sqrt3} = \frac{\sqrt3}{9}$$

$$f(ab) = f(a) + f(b)$$

$$f\left(2\cdot\tfrac12\right) = f(2) + f\left(\tfrac12\right) = 2 + f\left(\tfrac12\right) \qquad f\left(\tfrac12\right) = -2$$

$$f(1) = 2 + f\left(\tfrac12\right) \qquad f\left(\tfrac16\right) = -6?$$

$$f\left(\tfrac12\right) = f(3) + f\left(\tfrac16\right) = 3 + f\left(\tfrac16\right)$$

$$f(6) = f(2) + f(3) = 5 \qquad f(4) = 4$$

$$f(8) = f(2) + f(4) = 6$$

$f(10) = 7$ $\quad f(12) = 7$, $f(14) = 9$, $f(16) = 8$, $f(18) =$

$f(15) = 8$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac1y\right)$$

$<0 \qquad >0$

$$f\left(\frac1y\right) > -f(x)$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

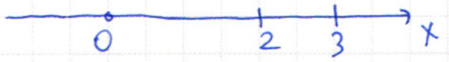
Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

Задача 1

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\,|x-2|}$$

Модули меняют знак в 3х точках! $x=0$, $x=2$ и $x=3$



x	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$+$

Будем раскрывать модули на этих промежутках!

1) При $x<0$ $\quad \frac{x^2-6x+10+2x-6}{2x^2-4x+x^2-2x} \leq 0 \Rightarrow \frac{(x-2)^2}{3x(x-2)} \leq 0$

При $x \neq 0$ и $x \neq 2$ выражение $\frac{(x-2)^2}{3x(x-2)}$ всегда положительно, т.к. $3x<0$, $x-2<0$ и $(x-2)^2>0$

Значит, при $x<0$ нет решений

2) При $0 \leq x < 2$ $\quad \frac{x^2-6x+10+2x-6}{2x^2-4x+2x-x^2} \leq 0$, $\frac{(x-2)^2}{x(x-2)} \leq 0$

Выражение $\frac{(x-2)^2}{x(x-2)}$ неположительно при $0<x<2$,

т.к. $(x-2)^2 \geq 0$, $x \geq 0$ и $x \neq 0$, $x \neq 2$

Значит, неравенство верно при $x \in (0;2)$

3) При $2 \leq x < 3$ $\quad \frac{x^2-6x+10+2x-6}{2x^2-4x+x^2-2x} \leq 0$, $\frac{(x-2)^2}{3x(x-2)} \leq 0$

Всё то же самое, что и в пункте (1). Значит, при $x \in [2;3)$ нет решений, т.к.

$(x-2)^2 \geq 0$, $3x \geq 0$ и $x \neq 0$, $x \neq 2$ и $x-2$ должно быть меньше 0.

4) При $x \geq 3$ $\quad \frac{x^2-6x+10-2x+6}{2x^2-4x+x^2-2x} \leq 0$, $\frac{(x-4)^2}{3x(x-2)} \leq 0$

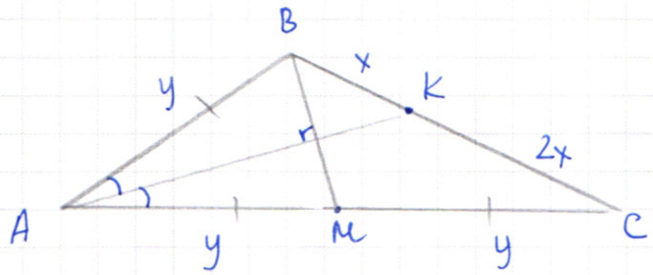
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(x-4)^2 \geq 0$, $3x > 0$ и $x \neq 0$, $x \neq 2$, тогда $x-2$ должно быть меньше 0, что невозможно. Тогда при $x \geq 3$ нет решений.

Т.к. всего 4 промежутка, то других решений нет.

Ответ: $(0;2)$

Задача 2



Пусть есть $\triangle ABC$, в котором биссектриса AK перпендикулярна медиане BM.

В треуг. ABM биссектриса является высотой, значит, $\triangle ABM$ – равнобедр. с основанием BM. Т.к. BM – медиана, то $AB = AM = CM = y$, где y – целое число, т.к. AB имеет целую длину по условию. По свойству биссектрисы в $\triangle ABC$ $\frac{AB}{AC} = \frac{BK}{CK} = \frac{1}{2}$

Пусть $BK = x$, тогда $CK = 2x$.

Периметр $\triangle ABC$ равен $P = AB + BC + AC = 3(x+y) = 600$

Тогда $x + y = 200$. Т.к. y – целое число, то x – тоже целое, причём оба натуральны. Значит, $0 < x < 200$ и $0 < y < 200$.

Кроме того, в $\triangle ABC$ должно выполняться неравенство треуг. Т.е. $AB < BC + AC$, $BC < AB + AC$ и $AC < AB + BC$.

Тогда $\begin{cases} 3x < 3y \\ 2y < 3x + y \\ y < 2y + 3x \end{cases}$ $\begin{cases} x < y \\ y < 3x \end{cases}$

— при любых x и y — натуральных

Отсюда получим систему: $\begin{cases} x + y = 200 \\ x < y \\ y < 3x \end{cases}$

Решив которую, получим, что:

$\begin{cases} x + y = 200 \\ 50 < x < 100 \\ 100 < y < 150 \end{cases}$ Т.к. каждому x соответствует единственный y, то всего таких треугольников будет 49.

Ответ: 49

Задача 3

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy} \\ x + y^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-2y)^2 = xy & (1) \\ x = 5 - y^2 & (2) \end{cases}$$

Если подставим (2) в (1), получим:

$y^4 - 10y^2 + 25 - 20y + 4y^3 + 4y^2 = 5y - y^3$

$y^4 + 5y^3 - 6y^2 - 25y + 25 = 0$

Легко подбирается $y = 1$. Тогда:

$$\begin{array}{r|l} y^4 + 5y^3 - 6y^2 - 25y + 25 & y - 1 \\ \cline{2-2} -\underline{y^4 - y^3} & y^3 + 6y^2 - 25 \\ 6y^3 - 6y^2 & \\ -\underline{6y^3 - 6y^2} & \\ -25y + 25 & \\ -\underline{-25y + 25} & \\ 0 & \end{array}$$

Значит, $(y-1)(y^3 + 6y^2 - 25) = 0$

Можно подобрать ещё один корень: $y = -5$, тогда:

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r|l} -y^3+6y^2-25 & y+5 \\ \underline{y^3+5y^2} & \overline{y^2+y-5} \\ -y^2-25 & \\ \underline{y^2+5y} & \\ -5y-25 & \\ \underline{-5y-25} & \\ 0 & \end{array}$$

Значит, $(y-1)(y+5)(y^2+y-5)=0$

$$\left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=-5 \\ y^2+y-5=0 \quad (*) \end{array}\right.$$

$(*)$ $y^2+y-5=0$

$D = 1+5\cdot4=21$

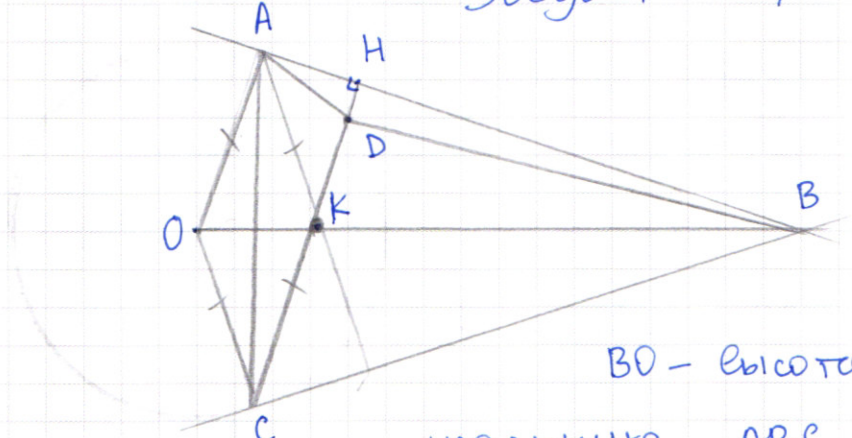
$$\left[\begin{array}{l} y=\frac{\sqrt{21}-1}{2} \\ y=\frac{-\sqrt{21}-1}{2} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} y=1,\ x=4 \\ y=-5,\ x=-20 \\ y=\frac{\sqrt{21}-1}{2},\ x=5-\frac{(\sqrt{21}-1)^2}{4}=\frac{\sqrt{21}-1}{2} \\ y=\frac{-\sqrt{21}-1}{2},\ x=5-\frac{(\sqrt{21}+1)^2}{4}=\frac{-\sqrt{21}-1}{2} \end{array}\right.$$

Проверкой убедимся, что все корни подходят

Ответ: $(4;1)$, $(-20;-5)$, $\left(\frac{\sqrt{21}-1}{2};\frac{\sqrt{21}-1}{2}\right)$, $\left(\frac{-\sqrt{21}-1}{2};\frac{-\sqrt{21}-1}{2}\right)$

Задача 4



Доп. построение: проведём BO:

т.к. AB и BC — касательные, то BO — высота в равнобедр треугольнике ABC пусть $BO \cap CH$ в точке K. т.к. высоты в треуг. пересекаются в одной точке, то AK — тоже высота в ΔABC. Т.к. ΔABC — равнобедр., то $AK = CK$.

Т.к. $OA \perp AB$ и $CK \perp AB$, то $OA \parallel CK$, т.к. $OC \perp AC$ и $AK \perp AC$, то $OC \parallel AK$. Значит, OAKC — параллелограмм, и $AK = KC = R = 4$

По свойству секущей и касательной:

$AH^2 = HD \cdot CH$

Площадь ΔABD равна $\frac{1}{2} HD \cdot AB = 6$, отсюда $HD = \frac{12}{AB}$. Значит, $AH^2 = \frac{12 \cdot CH}{AB}$

Из прямоуг. треуг. AKH:

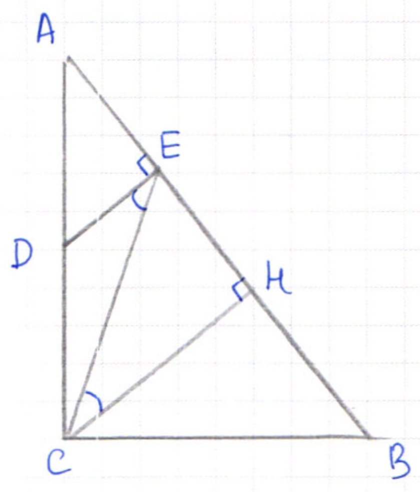
$AH^2 = AK^2 - KH^2 = 16 - KH^2$, причём $KH = CH - CK = CH - 4$

Тогда $AH^2 = 8CH - CH^2 = \frac{12}{AB} \cdot CH$.

Следовательно, $AB = \frac{12}{8 - CH}$

Ответ: $AB = \frac{12}{8 - CH}$

Задача 5



Доп. построение: проведём в ΔABC высоту CH.

Тогда $\Delta ACH \sim \Delta ABC$ по двум углам: $\angle CAH$ — общий, $\angle AHC = \angle ACB = 90°$. Из подобия: $\frac{AC}{AB} = \frac{CH}{CB}$

Тогда $CH = \frac{CB \cdot AC}{AB}$

По теореме Пифагора $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \frac{7}{\sqrt{3}}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Тогда $CH = 2$.

Из прямоуг. треуг. CEH: $EH = CH \cdot tg \angle ECH$.

$DE \perp AB$ и $CH \perp AB$, значит $DE \parallel CH$ и $\angle DEC =$
$= \angle ECH = 30°$, как накрест лежащие.

Значит, $EH = CH \cdot tg\, 30° = \frac{2}{\sqrt{3}}$

Из того же подобия $\triangle ACH$ и $\triangle ABC$:

$\frac{AH}{AC} = \frac{CH}{CB} \Rightarrow AH = \frac{AC \cdot CH}{CB} = \sqrt{3}$

$AE = AH - EH = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\triangle ADE \sim \triangle ACH$ по двум углам: $\angle DAE$ — общий, $\angle AED = \angle AHC = 90°$. Тогда $\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AH} = \frac{1}{3}$

Также $\frac{AE}{AH} = \frac{DE}{CH}$, отсюда $DE = \frac{2}{3}$

Площадь $\triangle ADE$ равна $\frac{1}{2} AE \cdot DE = \frac{\sqrt{3}}{9}$

Ответ: $\frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$, $S_{ADE} = \frac{\sqrt{3}}{9}$

Задача 6

$$\begin{cases} |2x| + |y| + |4-2x-y| > 4 & (1) \\ x^2 - 2x - 4y + y^2 \le 0 & (2) \end{cases}$$

(1) $|4-2x-y| > 4 - |2x| - |y|$. Возведём обе части в квадрат. Тогда получим, что

$-4x - 2y + xy > -4|x| - 2|y| + |xy|$

Рассмотрим 4 четверти координатной плоскости в которых x и y отрицательны или неотрицательны.

1) При $x \geqslant 0$ и $y<0$

$-4y > -2xy$

$x<2$

2) При $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$

$0>0$

нет решений

3) При $x<0$ и $y<0$

$-8x-4y>0$

$y<-2x$

4) При $x<0$ и $y \geqslant 0$

$-8x > -2xy$

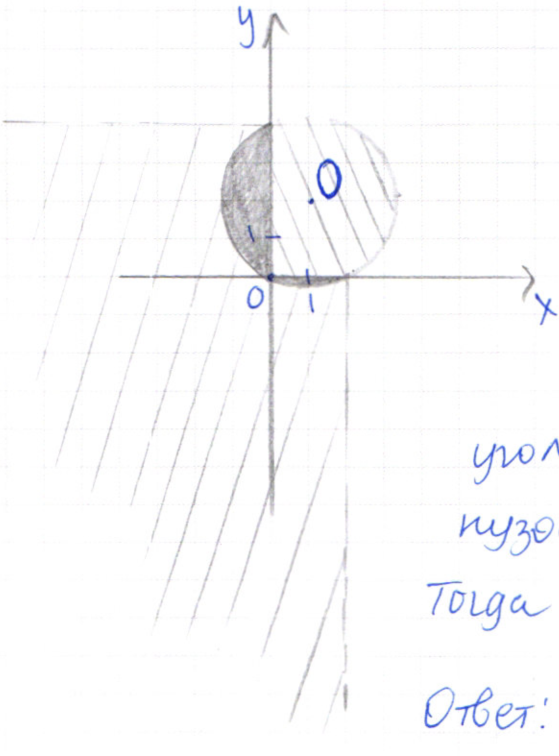
$y<4$

(2) $x^2-2x-4y+y^2 \leq 0$ — Графиком этого неравенства будет круг с центром в точке (1;2) и радиусом R, равным $\sqrt{5}$

$(x-1)^2-1+(y-2)^2-4 \leq 0$

$(x-1)^2+(y-2)^2 \leq 5$

Изобразим систему на координатной плоскости:



Решением системы будет пересечение графиков круга и неравенства. А её площадь получается вырезанием из полукруга прямоугольного треугольника с гипотенузой $2\sqrt{5}$ и катетами 2 и 4.

Тогда $S_{фиг.} = \frac{1}{2}\pi R^2 - \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4 = 2{,}5\pi - 4$

Ответ: $2{,}5\pi - 4$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)