МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 13 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство
$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|} \leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 600 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy}, \\ x+y^2=5. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 6, а радиус окружности равен 4.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{7}$, $BC=2\sqrt{\frac{7}{3}}$, а $\angle CED=30^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе
$$\begin{cases} |2x|+|y|+|4-2x-y|>4, \\ x^2-2x-4y+y^2 \leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 18$, $1 \leqslant y \leqslant 18$ и $f(x/y)<0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 $\dfrac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|}\leq 0$; $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-6x+10-2|x-3|\leq 0\\ 2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|>0\end{cases} (1)\\ \begin{cases}x^2-6x+10-2|x-3|\geq 0\\ 2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|<0\end{cases} (2)\end{array}\right.$

(1) $\begin{cases}x^2-6x+10-2|x-3|\leq 0\\ 2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|>0\end{cases}$

① $x\geq 3$. $\begin{cases}x^2-6x+10-2x+6\leq 0\\ 2x^2-4x+x^2-2x>0\end{cases}$, $\begin{cases}(x-4)^2\leq 0\\ 3x^2-6x>0\end{cases}$ $\begin{cases}x=4\\ \left[\begin{array}{l}x>2\\ x<0\end{array}\right.\end{cases}$; $x=4$ $(4>3)$ => является решением.

② $x\in(2;3)$ $\begin{cases}x^2-6x+10+2x-6\leq 0\\ 2x^2-4x+x^2-2x>0\end{cases}$; $\begin{cases}(x-2)^2\leq 0\\ 3x^2-6x>0\end{cases}$; $\begin{cases}x=2\\ \left[\begin{array}{l}x>2\\ x<0\end{array}\right.\end{cases}$; $\varnothing$

③ $x\in(0;2]$ $\begin{cases}x^2-6x+10+2x-6\leq 0\\ 2x^2-4x-x^2+2x>0\end{cases}$, $\begin{cases}(x-2)^2\leq 0\\ x^2-2x>0\end{cases}$, $\begin{cases}x=2\\ \left[\begin{array}{l}x>2\\ x<0\end{array}\right.\end{cases}$, $\varnothing$

④ $x\leq 0$ $\begin{cases}(x-2)^2\leq 0\\ 3x^2-6x>0\end{cases}$, $\varnothing$

(2) $\begin{cases}x^2-6x+10-2|x-3|\geq 0\\ 2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|<0\end{cases}$

① $x\geq 3$ $\begin{cases}(x-4)^2\geq 0\\ 3x^2-6x<0\end{cases}$; $\begin{cases}x\text{-любое}\\ x\in(0;2)\end{cases}$, но по условию $x\geq 3$ => $\varnothing$

② $x\in(2;3)$ $\begin{cases}(x-2)^2\geq 0\\ 3x^2-6x<0\end{cases}$, $\begin{cases}x\text{-любое}\\ x\in(0;2)\end{cases}$, но $x\in(2;3)$ => $\varnothing$

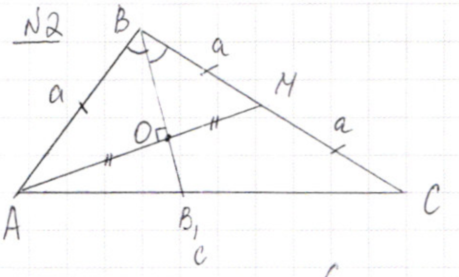
③ $x\in[0;2]$ $\begin{cases}(x-2)^2\geq 0\\ x^2-2x<0\end{cases}$; $\begin{cases}x\text{-любое}\\ x\in(0;2)\end{cases}$; $x\in(0;2)$

④ $x<0$ $\varnothing$

Ответ: $x\in(0;2)\cup\{4\}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№2



Рассмотрим такой $\triangle ABC$, в котором бис-са $BB_1 \perp$ медиане AM.

$\triangle ABM$: BO - бис-са и высота $\Rightarrow$ по теореме BO - медиана $\Rightarrow AO = OM$
а также $\triangle ABM$ - р/б. $\Rightarrow AB = BM$.

Пусть $AB = BM = MC = a$ (ед), где $a \in N$
$AC = c$, где $c \in N$

По условию $P_{ABC} = 600$ (ед)
По неравенству сторон треугольника $\begin{cases} AB + BC > AC \\ |AB - BC| < AC \end{cases}$, т.е

$\begin{cases} 3a + c = 600 \\ 3a > c \\ a < c \end{cases}$; $\begin{cases} c = 600 - 3a \\ 3a > c \\ a < c \end{cases}$; $\begin{cases} 600 - 3a < 3a \\ 600 - 3a > a \end{cases}$, $\begin{cases} a > 100 \\ a < 150 \end{cases}$

Вариантов a — $150 - 100 - 1 = 49$ вариантов $\Rightarrow$ 49 треугольников

Ответ: 49

№3 $\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy} \quad (1) \\ x + y^2 = 5 \quad (2) \end{cases}$ Можно возвести (1) в квадрат, при условии, что $x - 2y \geq 0$, $xy > 0$.

$\begin{cases} x^2 + 4y^2 - 4xy - xy = 0. \\ x + y^2 = 5 \\ x - 2y \geq 0 \\ xy > 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 25 + y^4 - 10y^2 + 4y^2 - 4(5 - y^2)y - y(5 - y^2) = 0 \\ x = 5 - y^2 \\ x - 2y \geq 0 \\ xy > 0 \end{cases}$; $\begin{cases} y^4 + 5y^3 - 6y^2 - 25y + 25 = 0 \\ x = 5 - y^2 \\ x - 2y \geq 0 \\ xy > 0 \end{cases}$

$\begin{cases} (y+5)(y-1)(y^2 + y - 5) = 0 \quad (1) \\ x = 5 - y^2 \\ x - 2y \geq 0 \\ xy > 0 \end{cases}$; (1) $\begin{cases} y = -5 \\ x = -20 \\ -20 + 10 \ngeq 0 \\ xy > 0 \end{cases}$ $- \varnothing$ или $\begin{cases} y = 1 \\ x = 4 \\ 4 - 2 > 0 \\ 4 > 0 \end{cases}$ или

$(4; 1)$
решение

$y^2 + y - 5 = 0$
$y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}$

1) $\begin{cases} y = -0,5 + \frac{\sqrt{21}}{2} \\ x = 0,5\sqrt{21} - 0,5 \\ x - 2y = 0,5 - \frac{\sqrt{21}}{2} < 0 \end{cases}$ $- \varnothing$

2) $\begin{cases} y = \frac{-1 - \sqrt{21}}{2} \\ x = \frac{-1 - \sqrt{21}}{2} \\ x - 2y = 0,5 + \frac{\sqrt{21}}{2} > 0 \\ xy > 0 \end{cases}$ $\rightarrow \left(-0,5 - \frac{\sqrt{21}}{2}; -0,5 - \frac{\sqrt{21}}{2}\right)$ - решение.

Ответ: $(4; 1)$
$\left(-0,5 - \frac{\sqrt{21}}{2}; -0,5 - \frac{\sqrt{21}}{2}\right)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6 $\begin{cases} |2x| + |y| + |4-2x-y| > 4 & ; (1) \\ x^2-2x-4y+y^2 \le 0 & ; (2) \end{cases}$

(2) $x^2-2x-4y+y^2 \le 0$

$(x-1)^2 + (y-2)^2 - 5 \le 0$

$(x-1)^2 + (y-2)^2 \le 5$ — ~~окруж~~ круг, с $r=\sqrt{5}$.

(1) ① $\begin{cases} x>0 \\ y>0 \\ 4-2x-y<0 \end{cases}$; $2x+y+2x+y-4>4$

$2x+y>4$

$y>4-2x$. Рассмотрим $y=4-2x$ - лин. ф. $(0;4)$ $(2;0)$
(в I четв.)

② $\begin{cases} x>0 \\ y<0 \\ 4-2x-y>0 \end{cases}$; $\begin{cases} x>0 \\ y<0 \\ y<4-2x \end{cases}$ Рассмотр $y=4-2x$ - лин. ф. в IV четв. ~~(0;0)~~ ~~(...)~~ $(2;0)$ $(3;-2)$

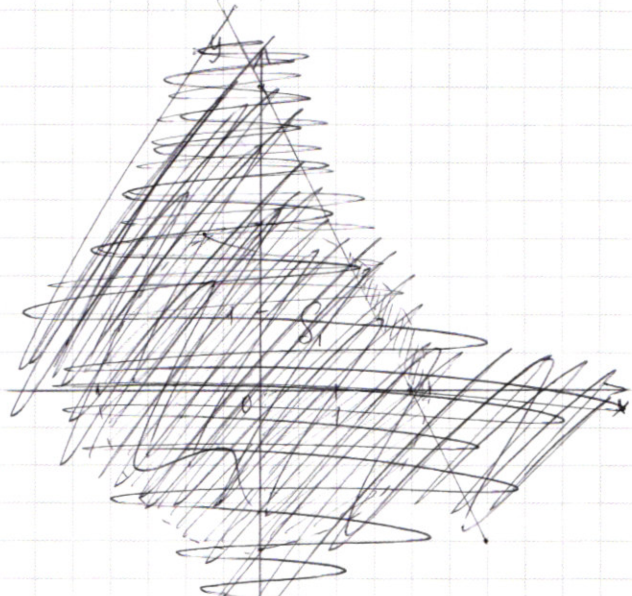
$\begin{cases} x>0 \\ y<0 \\ 4-2x-y<0 \end{cases}$; $\begin{cases} x>0 \\ y<0 \\ y>4-2x \end{cases}$ Рассм. $y=4-2x$ - лин. ф. в IV четв. $(2;0)$ $(3;-2)$

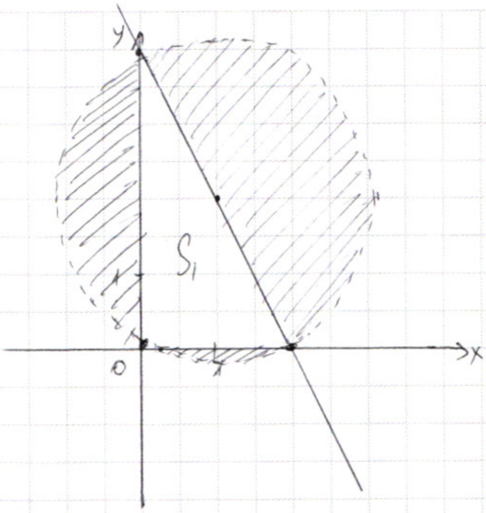
③ $\begin{cases} x<0 \\ y>0 \\ 4-2x-y>0 \end{cases}$; $\begin{cases} x<0 \\ y>0 \\ y<4-2x \end{cases}$ - II четв. $y=4-2x$ - лин. ф. $(-1;6)$ $(-2;8)$

$\begin{cases} x<0 \\ y>0 \\ 4-2x-y>0 \end{cases}$ $y>4-2x$. (II четв)

Ⓘⓥ $\begin{cases} x<0 \\ y<0 \\ 4-2x-y>0 \end{cases}$; $\begin{cases} x<0 \\ y<0 \\ y<4-2x \end{cases}$ (III четв)

$\begin{cases} x<0 \\ y<0 \\ 4-2x-y<0 \end{cases}$; $\begin{cases} x<0 \\ y<0 \\ y>4-2x \end{cases}$ III четв.

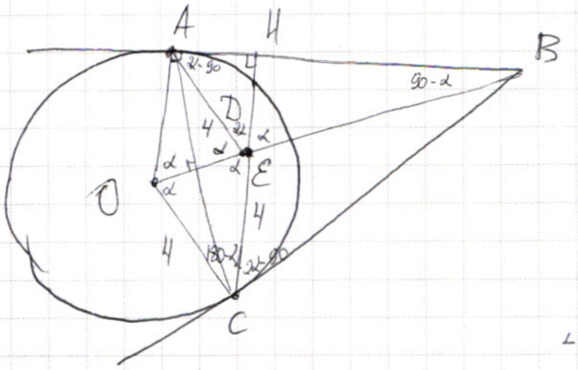




$$S = \pi R^2 - S_1 = \pi R^2 - 2\cdot 4\cdot \frac{1}{2} = 3{,}14\cdot 5 - 4$$
$$= 15{,}7 - 4 = 11{,}7\ (ед^2)$$

Ответ: $S = 11{,}7\ (ед^2)$

№4



Решение

Пусть $\angle AOB = \alpha$, тогда

$\angle ABO = \alpha$, $\angle HEB = \alpha$, $\angle BOC = \alpha$.

$\angle OCE = 180 - 2\alpha$.

$\angle EOC = \angle OEC \Rightarrow OC = CE$. и $OC \parallel CE$

$\Rightarrow OAEC$ - пар-мм., и $AE = OC \Rightarrow$

$OAEC$ - ромб.

Т.к $S_{\Delta ABD} = 6$, то $HD \cdot AB = 12$.

$\angle HAE = 90-(180-2\alpha) = 2\alpha - 90$.

$\angle AEH = 90 - 2\alpha + 90 = 2\alpha$.

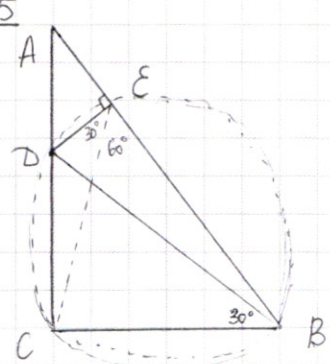
$\angle HEC = 180^\circ = 4\alpha \Rightarrow \alpha = 45^\circ$.

$CH : AB = CH : CB = \sin\angle HBC = \sin(45^\circ + 45^\circ) = \sin 90^\circ = 1$

Ответ: $\frac{CH}{AB} = 1$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N5



Дано: $\triangle ABC$ - прямоуг

$\angle C = 90^\circ$

$AC = \sqrt{7}$

$BC = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$

$\angle CED = 30^\circ$

$\frac{AD}{AC}$ - ?

$S_{\triangle AED}$ - ?

Решение.

1) Рассмотрим CDEB - четырехуг. , где

$\angle DEB = \angle DCB = 90^\circ \Rightarrow \angle DEB + \angle DEB = 180^\circ$

→ по свойство четырехугольник, у которого сумма противоположных углов равна 180°, можно вписать в окружность.

2) Рассмотрим $\angle DEC$ и $\angle DBC$ - вписанные и опираются на $\overset{\frown}{CD} \Rightarrow \angle DEC = \angle DBC = 30^\circ$

3) Рассмотрим $\triangle CDB$; $\angle B = 30^\circ$, $\angle C = 90^\circ \Rightarrow$ по св-ву: $CD = \frac{1}{2} DB$

$CD = tg 30^\circ \cdot CB$

$CD = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 2\sqrt{\frac{7}{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{7}$

4) $AD = AC - CD = \sqrt{7} - \frac{2}{3}\sqrt{7} = \frac{1}{3}\sqrt{7}$.

5) $\frac{AD}{AC} = \frac{\frac{1}{3}\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{1}{3}$.

6) $\triangle ADE$ и $\triangle ACB$ - подобные $\Rightarrow$

$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ACB}} = k^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$. , $S_{\triangle ADE} = \frac{S_{\triangle ACB}}{9} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{7} \cdot 2\sqrt{\frac{7}{3}}}{9}$

$= \frac{7}{\sqrt{3} \cdot 9} = \frac{7\sqrt{3}}{27}$

Ответ: $\frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$, $S_{\triangle AED} = \frac{7\sqrt{3}}{27}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} |2x|+|y|+|4-2x-y|>4 \\ x^2-2x-4y+y^2\le 0 \end{cases}$$

$x>0$, $y>0$, $4-2x-y>0$ — $\varnothing$

$x>0$, $y>0$, $4-2x-y<0$

$2x+y>4+4-2x-y$
$4x+2y>8$
$2x+y>4$

$$\begin{cases} 2x+y\overset{=4}{>}4 \\ x>0 \\ y>0 \end{cases}$$

$(x-1)^2+(y-2)^2-5\le 0$

$x^2-2x+1 \quad y^2-4y+4$

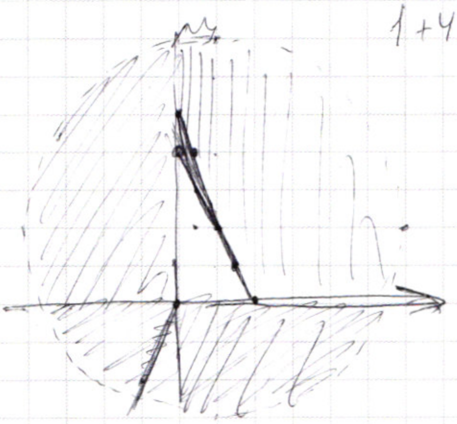
$(x-1)^2+(y-2)^2\le 5$

$2x+y>4+4-2x-y$

$4x+2y>8$

$1+4$

$2x+y>2$



$180|4$, 45, 16, 20

$2x>4-y$

$x>\frac{4-y}{2}$

$x=\frac{4-y}{2}$

$2-\frac{y}{2}$

$90=180+2\alpha$

$2\alpha-90$

$y=1$

$y>4-2x$
$y=4-2x$

$1:2;$

$90-180+2\alpha$

$x=\frac{1}{2}$

$2\alpha-90+\frac{90-\alpha}{\alpha}$

$4+y>4$

$2\alpha-90$

$y=4-1$

$$\begin{cases} x>0 \\ y<0 \\ 4-2x-y>0 \end{cases}$$

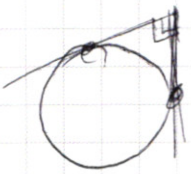
$2x-y>\cancel{4}-\cancel{4}+2x+y$

$-y>y$

$\boxed{y<0}$

$3+y=4$

$1{,}5$
$y=4-3=1$



$S=\frac{\pi D^2}{4}$

πR^2

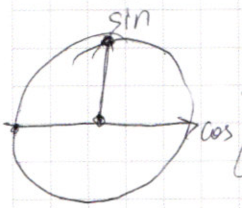
$x>0$, $y<0$, $4-2x-y<0$

$x-\cancel{y}>4+4-2x-\cancel{y}$

$8-3x<0$

$8<3x$

$x>2\frac{2}{3}$



$$\begin{cases} x<0 \\ y>0 \\ 4-2x-y>0 \end{cases}$$

$-2x+\cancel{y}>4-4+2x\cancel{-y}$

$-2x>2x$

$-x>x$

$x<0$

$4-2x-y<0$

$\cancel{2x}+y>4+4\cancel{-2x}-y$

$2y>8$

$y>4$

$4-2x-y<0$

$\cancel{y>2x}$

$2x+y>4$

$x<0$, $y<0$, $4-2x-y>0$

$-2x-y>\cancel{4-4}+2x+y$

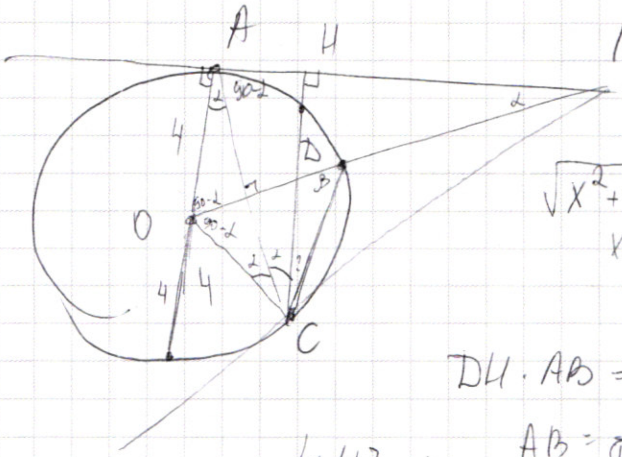
$-(2x+y)>2x+y$

$2x+y<0$

$+2x+y>4+\cancel{4-2x}-y$

$0>8$

$2x+y<2<0$



$$\sqrt{x^2+16}\cdot\left(\sqrt{x^2+16}-4\right)=x^2$$
$$x^2+16-4\sqrt{x^2+16}=x^2$$
$$4=\sqrt{x^2+16}$$
$$x^2+16=16$$
$$x=0$$

$DH \cdot AB = 12.$

$AB = \frac{12}{DH}$

$\alpha+\alpha+? = \beta.$

$90-\alpha$
$\underline{90+\alpha}$

$\cancel{90+\alpha+\beta}$ $\beta+?=90+\alpha$

$\cancel{90+\alpha+2\alpha=180}$

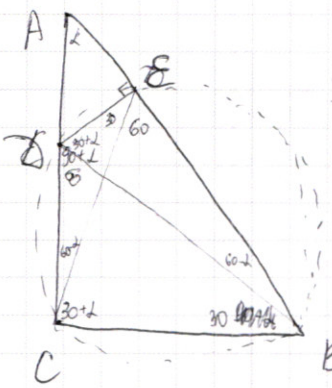
$90+\cancel{\alpha}+2\alpha+90-\cancel{\alpha}=180$

$\cancel{180}$ 2α

$\beta+?=90-\alpha.$

$90-\alpha+2\alpha+90-\alpha.$

$DH \cdot AB = 12$



$AD : AC - ?$

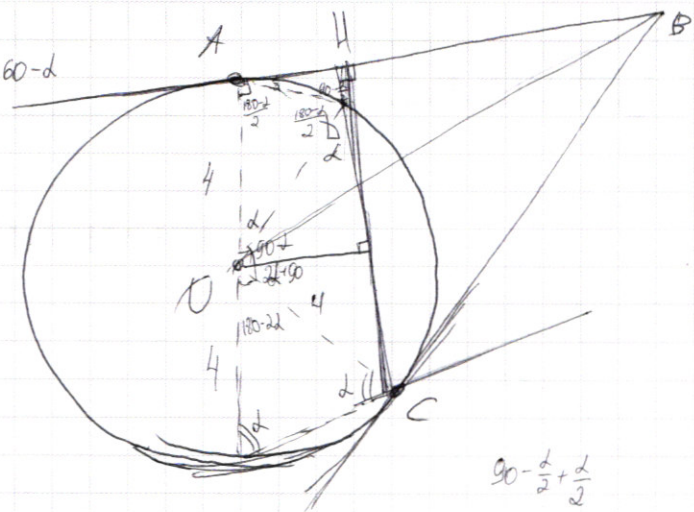
$S_{AED} - ?$

$AC = \sqrt{7}$

$BC = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$

$\angle CED = 30^\circ$

$90 - 60 + \alpha$



$90 - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}$

$90 - \alpha$

$90 + \alpha$

$CD = \frac{1}{2} DB$

DB = диаметр.

$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ $\frac{1 \cdot 2}{2\sqrt{3}}$ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

$AE \cdot EB = AD \cdot AC$

$\cancel{2x} - y > \cancel{4} + \cancel{2x} + y$ $\cancel{\frac{AE}{EB} = AD}$

$-y > y$

$90 - 90 + \frac{\alpha}{2}$

$\frac{CD}{CB} = tg\,30^\circ$

$90 - 180 + 2\alpha$

$\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{CB}$

$2\alpha + 90$

$90 - 2\alpha - 90$

$\frac{CD}{CB} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$CB = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$ $\boxed{CD} = \frac{2\sqrt{\frac{7}{3}} \cdot \sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{7} \cdot \sqrt{\frac{1}{3} \cdot 3}}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{7}$

$AD = \sqrt{7} - \frac{2}{3}\sqrt{7} = \frac{1}{3}\sqrt{7}$ $\frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$

$\frac{S_{AED}}{S_{ACB}} = k^2 = \frac{1}{9}$

$2x + y > \cancel{4} + 2x + y$

$S_{AED} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{7} \cdot 2\sqrt{\frac{7}{3}}}{9}$

$4 - 2x - y > 0$

$y < 4 - 2x$

$DE = \frac{2\sqrt{\frac{7}{3}}}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}$

$S_{AED} = \frac{7}{\sqrt{3} \cdot 9} = \frac{7\sqrt{3}}{27}$

$AE = \frac{1}{3} AC = \frac{\sqrt{7}}{3}$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{3}$

$AB = 7\sqrt{\frac{7}{3}}$ 2,

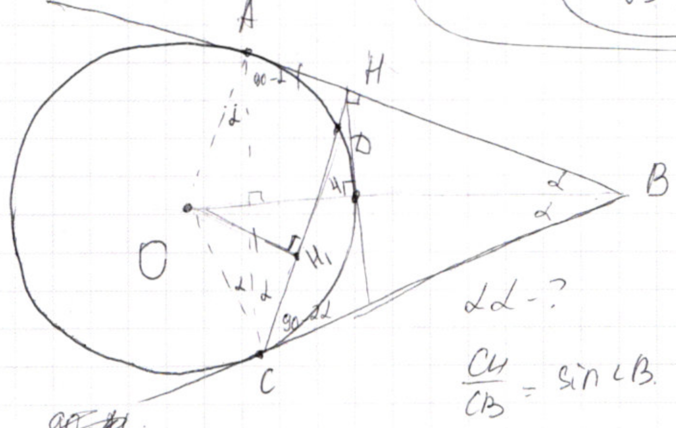
$\frac{7}{\sqrt{3} \cdot 9}$

$\frac{3{,}14}{15{,}70}$

$\sqrt{5}$

$DH \cdot AB = 12$

$r = 4$



$2{,}2 \cdot 2{,}2 = 4{,}84$ 488

$\sin 2\alpha = \sin\alpha\, 2\cos\alpha$?

$\frac{CH_1}{OC} = \cos 2\alpha$

$\frac{OH_1}{OC} = \sin 2\alpha = \frac{CH}{CB}$

$CH_1 = 4 \cdot \cos 2\alpha$

$2\alpha - ?$

$\frac{AH}{AC} = \frac{CH}{CB} = \frac{4\cos 2\alpha + 4}{CB}$

$\frac{CH}{CB} = \sin\angle B$

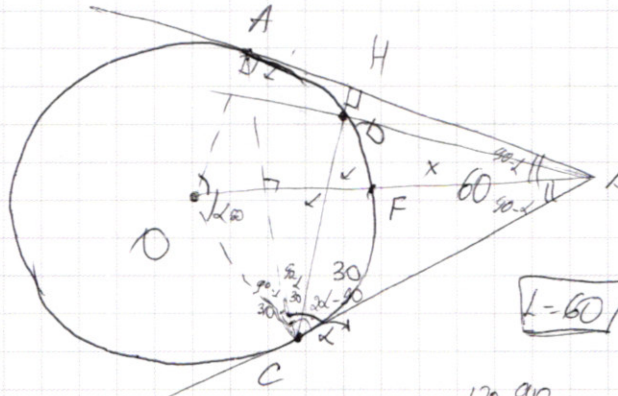
~~$4 \cdot 16 (\cos 2\alpha + 1) = \sin 2\alpha \cdot 4 \cdot CB$~~

~~90~~

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



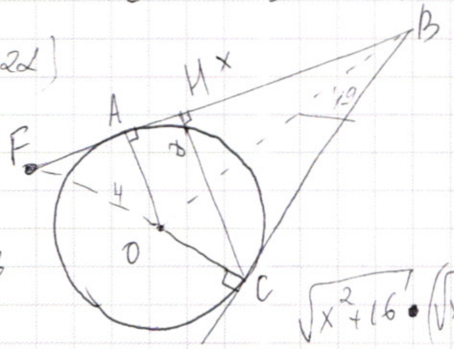
$\cancel{AB = DH}$ $AB = \frac{12}{DH}$

$AB^2 = OB \cdot BF = BF^2 + 4BF$

$90 - (180 - 2\alpha)$

$2\alpha - 90$

$\alpha = 60$



$120 - 90$

$(x+4)^2 - 16$

$= (x+4)x$

$OB = x.$ $AB = \sqrt{x^2 - 16}$

$\frac{AB}{CH} - ?$

$x^2 - 16 = x \cdot (x-4)$

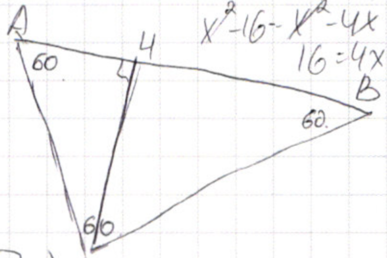
$x^2 - 16 - x^2 - 4x$

$16 = 4x$

$x = 4$

$\sqrt{x^2+16} \cdot (\sqrt{x^2+16} - 4)$

$= x^2$



$\frac{1}{2} CH \cdot AB = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin 60°$

$CH = AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\frac{1{,}7}{2}$

$BF \cdot BO = BA^2$

$x^2 = BF \cdot (BF + 4)$

$\frac{AB}{CH} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$x^2 = \sqrt{x^2+16} \cdot (\sqrt{x^2+16} - 4)$

$\cancel{x^2 + 16 = 4\sqrt{x^2+16} < 0}$

$\sqrt{x^2+16}^2 - 4\sqrt{x^2+16} = x^2$

$x^2 + 16 - 4\sqrt{x^2+16} = x^2$

$4 = \sqrt{x^2+16}$

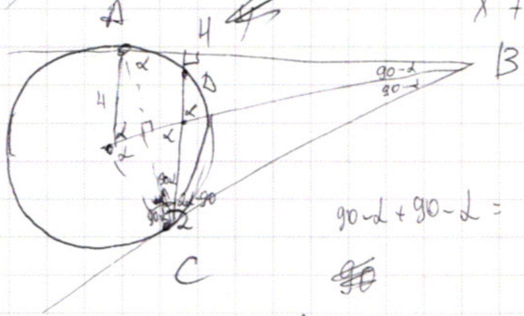
$x^2 + 16 - 4\sqrt{x^2+16} = x^2$

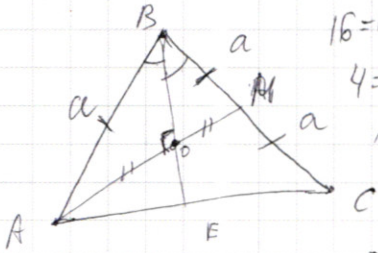
$16 = 4\sqrt{x^2+16}$

$4 = \sqrt{x^2+16}$

$x^2 + 16 = 16$

$x = 0.$





$90 - \alpha + 90 - \alpha =$

$\cancel{90}$

$OB \cdot BD = x^2$

$\sqrt{x^2+16} \cdot (\sqrt{x^2+16} - 4) = x^2$

$90 - \alpha + 2\alpha - 90$

$AC < 3a$

$AC > a$

$BC = BM + MC$

$= 2a$

$a > 100.$

$a < 150$

a

$CH = \sqrt{EH \cdot HB}$ $AB = m.$

$c < 3a$ $AC = c$

$a = 49$ вар

$$\begin{cases} 3a + c = 600. \\ c < 3a \\ c > a \end{cases}$$

$3a = 600 - c$

$a = 200 - \frac{c}{3}$

$600 / 4 = 150$ $\cancel{3a} > 600$

$\cancel{x^2} + 8x + 16 - 16 = \cancel{x^2} + 4x$

$600 > 4a$ $a < 150$

$c < 3a$

$c = 600 - 3a$

$c > a$

$c = 600 - 3a$

$600 - 3a > a$

$8x = 4x$ $x = 0.$

$3a > 600 - 3a$

$c \,\vdots\, 3$

$6a > 600$

$a > 100$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

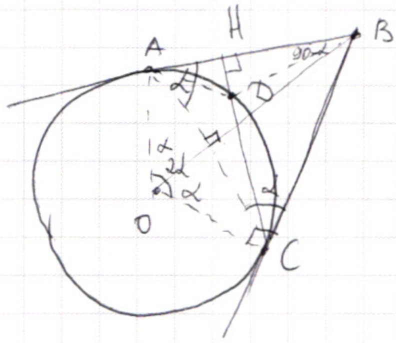
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3/5

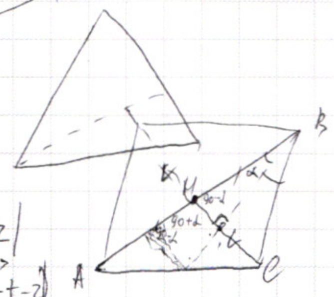


$AB = BC$.

$P = 600$

$$\begin{cases} a+b > c \\ a+c > b \\ c+b > a \\ |a-b| < c \\ |a-c| < b \\ |c-b| < a \end{cases}$$

$a+b+c = 600$.



$AB : CH$ — ?

$S_{\triangle ABD} = 6$. ; $\frac{1}{2} AB \cdot BD \cdot \sin\angle ABD = 6$.

$r = 4$.

$t \quad z \quad 4-t-z$

$$\begin{cases} 2|x| + |y| + |4-2x-y| > 4 \\ x^2 - 2x - 4y + y^2 \leq 0 \end{cases}$$

$x(x-2) - y(4-y) \leq 0$.

$|t| + |z| + |4-t-z| > 4$

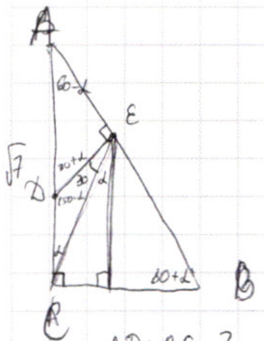
$|t| + |z| > 4 - |4-t-z|$

при $t > 0$, $z > 0$. $t+z > 4 - |4-t-z|$

то < 0, $t+z > 4 - z - t + 4$

$2t + 2z > 8$

$t+z > 4$



$\sqrt{7 + 4 \cdot \frac{7}{3}} = 7\sqrt{\frac{1}{3}} = AB$

$\frac{21+28}{3} = \frac{49}{3}$

$\sin\angle B = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{7}}{\frac{7}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}}$

$AD : AC$ — ?

S_{AED} — ?

$AC = \sqrt{7}$

$BC = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$

$\angle CED = 30$

$\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{CB}$.

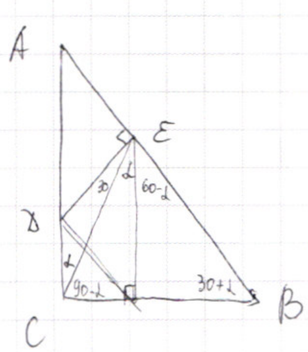
$\cos\angle B = \frac{1}{\sqrt{\frac{7}{3}}} = \frac{AE}{AD} = \frac{AC}{AB}$.

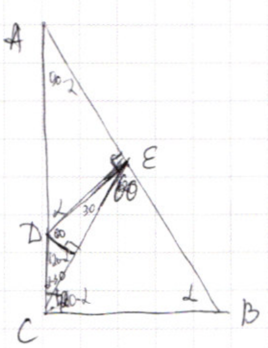
$AD = AE \cdot \sqrt{\frac{7}{3}}$.

$\frac{AE\sqrt{\frac{7}{3}}}{7\sqrt{\frac{1}{3}}} = \frac{AE \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{3}}{7\sqrt{3}} = \frac{AE}{\sqrt{7}} = \frac{DE}{CB}$. $DE = \frac{AE \cdot CB}{\sqrt{7}} = \frac{AE \cdot 2\sqrt{\frac{7}{3}}}{\sqrt{7}} = \frac{AE \cdot 2\sqrt{7} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}}}{\sqrt{7}} = AE \cdot 2\sqrt{\frac{1}{3}}$

DE

$\frac{DE}{AE} = tg(60-\alpha) = \frac{CB}{AC} = \frac{2\sqrt{7} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}}}{\sqrt{7}}$





$90 - 120 + \alpha$

$180 - (60 + \alpha)$

$120 - \alpha$

~~$120 = 180 - 60 + \alpha + \alpha$~~

$90 - 120 + \alpha$

$120 + (180 - 60 + \alpha - \alpha)$

$\alpha - 30$

$90 - \alpha + 30$

$120 - \alpha + \alpha$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

При $x>0$, $y>0$ $\quad 2x+y > 4 - |4-2x-y|$

Если $4-2x-y>0$, то они равны =>

$4-2x-y<0$ $\quad \begin{cases} 2x+y>4 \\ \cancel{2x+y>0} \\ x>0 \\ y>0 \end{cases}$

При $x<0$, $y>0$. $\quad y-2x > 4 - |4-2x-y|$

$4-2x-y>0$. $\quad y-2x > \cancel{4}-4+2x+y$

$-2x>2x$, т.е $x<0$ всегда будет

$y<4-2x$ $\quad \underline{x<-x}$

$\begin{cases} x<0 \\ y<4-2x \end{cases}$ $\quad x<-2$

$4-2x-y<0$.

$y-2x>4+4+2x+y$

$8+4x<0$

$4x<-8$ $\quad \boxed{x<-2}$

При $x>0$, $y<0$ $\quad 2x-y > 4 - |4-2x-y|$

$f(x)$ $\quad f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(p)=p$ для любого прост. p

$(x;y)$

$\begin{cases} 1 \le x \le 18 \\ 1 \le y < 18 \\ f(x/y) < 0 \end{cases}$

$f(1)=1$

$f(2)=2$

$f(5)=5$ и т.п.

$f(7)=7$

$f(11)-11$

$f(10)=f(2)+f(5)$

$f(10)=7$

$\dfrac{f(2)}{f(5)} < 0$?

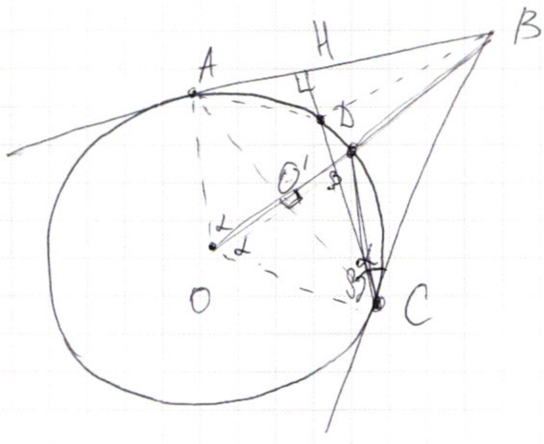
$f(1\cdot(-11)) = f(1)+f(\underline{-11})$

$f(2\cdot(-11)) = f(2)+f(-11)$

$f(1\cdot b)=f(1)+f(b)$

$f(b)=1+f(b)$ - не возм.

$x,y \ne 1$.



$\frac{1}{2} DH \cdot AB = 6$. $\quad DH \cdot AB = 12$.

$r=4$. $\quad AB = \dfrac{12}{DH}$.

$\dfrac{CO'}{OC} = \dfrac{CB}{OB} = \dfrac{O'B}{CB}$ $\quad CB^2 = O'B \cdot OB$

$CB^2 = BD \cdot BO$.

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 $\dfrac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|}\leq 0$;

① $\begin{cases} x^2-6x+10-2|x-3|\leq 0 \\ 2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|>0 \end{cases}$;

0 2 3

$16-24+10-2=0$

$32-16+4\cdot 2$

При $x\geq 3$: $\begin{cases} x^2-6x+10-2x+6\leq 0 \\ 2x^2-4x+x(x-2)>0 \end{cases}$ $x^2-2x>0$; $\begin{cases} x^2-8x+16\leq 0 \\ 3x^2-6x>0 \end{cases}$ ~~D = 64-16·4~~ $(x-4)^2\leq 0$, $3x(x-2)>0$

$\begin{cases} x=4 \\ \left[\begin{array}{l} x<0 \\ x>2 \end{array}\right. \end{cases}$; + − + 0 2 $x=4$

$-2(3-x)$

При $x\in(2;3)$: $\begin{cases} x^2-6x+10+2x-6\leq 0 \\ 2x^2-4x+x^2-2x>0 \end{cases}$, $\begin{cases} x^2-4x+4\leq 0 \\ 3x^2-6x>0 \end{cases}$, $\begin{cases} (x-2)^2\leq 0 \\ 3x^2-6x>0 \end{cases}$ $x=2$ $\varnothing$

При $x\in(0;2]$; $\begin{cases} x^2-6x+10-2(3-x)\leq 0 \\ 2x^2-4x+x\cdot(2-x)>0 \end{cases}$ ($+2x-6$, $-x^2+2x$), $\begin{cases} x^2-4x+4\leq 0 \\ x^2-2x>0 \end{cases}$, $\begin{cases} x=2 \\ \left[\begin{array}{l} x>2 \\ x<0 \end{array}\right. \end{cases}$ $\varnothing$

0 2

При $x\leq 0$ $\begin{cases} x^2-6x+10-6+2x\leq 0 \\ 2x^2-4x-x(2-x)>0 \end{cases}$ ($+x^2-2x$), $\begin{cases} x^2-4x+4\leq 0 \\ 3x^2-6x>0 \end{cases}$ $x=2$, $x<0$, $x>2$ $\varnothing$

0 2

② $\begin{cases} x^2-6x+10-2|x-3|\geq 0 \\ 2x^2-4x+|x||x-2|<0 \end{cases}$;

$-2x+6$

При $x\geq 3$ $\begin{cases} x^2-6x+10-2(x-3)\geq 0 \\ 2x^2-4x+x(x-2)<0 \end{cases}$ ($+x^2-2x$), $\begin{cases} x^2-8x+16\geq 0 \\ 3x^2-6x<0 \end{cases}$, $\begin{cases} x\text{ — любое} \\ x\in(0;2) \end{cases}$ — не подх.

При $x\in(2;3)$ $\begin{cases} (x-2)^2\geq 0 \\ 3x^2-6x<0 \end{cases}$; $\begin{cases} x\text{ — любое} \\ x\in(0;2) \text{ — не} \end{cases}$

При $x\in(0;2]$ $\begin{cases} (x-2)^2\geq 0 \\ x^2-2x<0 \end{cases}$; x — любое, $(0;2)$ — подход.

0 2

При $x\leq 0$ $(x-2)^2\geq 0$, $x\in(0;2)$ — нет

Ответ: $x=4$, $x\in(0;2)$

303 297
149
2
2447

153 $\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy} \\ x+y^2=5 \end{cases}$

$\sqrt{xy}>0 \Rightarrow x-2y>0$ если система имеет решен.

$\Rightarrow$ можно возвести в квадрат

~~$y^2=25-x$~~

$x=5-y^2$

$x^2-4xy+4y^2=xy$

$x^2-5xy+4y^2=0$

Ответ: $(4;1)$

$\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{21}}{2}; -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{21}}{2}\right)$

$25+y^4-10y^2-5y(5-y^2)+4y^2=0$

$-25y+5y^3$

$y^4+5y^3-6y^2-25y+25=0$

-5

~~$625+5\cdot125-6\cdot25-125+25$~~

$(y+5)(y-1)(y^2+y-5)=0$

~~$625-625$~~ $-6\cdot25+25\cdot5+25=0$

$25\cdot6$

$y^4+5y^3-6y^2-25y+25 \mid y+5$

$y^4+5y^3 \qquad y^3-6y+5$

$-6y^2-25y$

$-6y^2-30y$

$5y+25$

$5y+25$

0

$y^3-6y+5=0$ $y=1$ - корень.

$1-6+5=0$

$y^3-6y+5 \mid y-1$

$y^3-y^2 \qquad y^2+y-5$

y^2-6y

y^2-y

$-5y+5$

$-5y+5$

0

$y^2+y-5=0$

$D=1+20=21$

$y_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$

$x-2y>0$

① При $y=-5$ - Нет

$x=5-25=-20$

Проверка: $-20+10=\sqrt{\ }$

$0{,}5+\frac{\sqrt{21}}{2}=$

Равно

② $y=1$ $\quad 4-2=\sqrt{4\cdot1}$ - Подходит $\quad (4;1)$

$x=4$

$5-0{,}25-\frac{21}{4}+0{,}5\sqrt{21}$

$5-\frac{22}{4}$ $\quad 0{,}5\sqrt{21}-0{,}5$

$0{,}5\sqrt{21}-0{,}5-2\left(-0{,}5+\frac{\sqrt{21}}{2}\right)$

$0{,}5\sqrt{21}-0{,}5+1-\sqrt{21}$

③ $y=\frac{-1+\sqrt{21}}{2}$

$\sqrt{21}-6+\cancel{1}-\sqrt{21}<0$

$x=5-\left(\frac{-1+\sqrt{21}}{2}\right)^2$

Не подх

$5-\left(\frac{1+21-2\sqrt{21}}{4}\right)$

$\frac{-1-\sqrt{21}}{2}+(+1+\sqrt{21})$

$0{,}5+\frac{\sqrt{21}}{2}$

~~$5-11+\sqrt{21}$~~ $\quad \boxed{\cancel{\sqrt{21}-6}}$

$5-\frac{22}{4}+\frac{\sqrt{21}}{2}$

$\frac{\sqrt{21}}{2}-0{,}5$

$\frac{\sqrt{21}}{2}-0{,}5-2\left(\frac{-1+\sqrt{21}}{2}\right)$

$\frac{\sqrt{21}}{2}-0{,}5+1-\sqrt{21}=0{,}5-\frac{\sqrt{21}}{2}<0$

④ $y=\frac{-1-\sqrt{21}}{2}$

$x=5-\left(\frac{-1-\sqrt{21}}{2}\right)^2=5-\left(\frac{1+21+2\sqrt{21}}{4}\right)$

$-\frac{\sqrt{21}}{2}-0{,}5-2\left(\frac{-1-\sqrt{21}}{2}\right)$

$\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{21}}{2}; -0{,}5-\frac{\sqrt{21}}{2}\right)$

$5-5{,}5-\frac{\sqrt{21}}{2}=-\frac{\sqrt{21}}{2}-0{,}5$

$=-\frac{\sqrt{21}}{2}-0{,}5+1+\sqrt{21}=\boxed{0{,}5+\frac{\sqrt{21}}{2}}$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)