

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 14

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x - 1|}{4x^2 - 12x + |x| \cdot |x - 3|} \leq 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 300 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy}, \\ 2y + x^2 = 9. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках S и D . Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 15, а радиус окружности равен 6.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED , если известно, что $AC = \sqrt{29}$, $BC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$, а $\angle CED = 45^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x; y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| > 6, \\ x^2 - 2x - 3y + y^2 \leq 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = p$ для любого простого числа p . Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $3 \leq x \leq 19$, $3 \leq y \leq 19$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$3. \begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy} \\ 2y + x^2 = 9 \end{cases}$$

$$y = \frac{9-x^2}{2}$$

$$y \geq 2x \Rightarrow y - 2x \geq 0$$

$$\frac{9-x^2}{2} - 2x = \sqrt{\frac{9-x^2}{2} \cdot x}$$

$$3y - 2x + x^2 = \sqrt{xy} + 9$$

$$y + 2\sqrt{xy} + x$$

$$y + 2x + x^2 = 9 - \sqrt{xy}$$

$$2\sqrt{xy} + y + 2x + x^2 + y + 3x + x^2 - 9 = 0$$

$$2x^2 - 2x + 1 = \sqrt{xy} + 10 - 3x$$

$$(x^2 - x + 1) \cdot (\sqrt{y} - 2\sqrt{x}) = 0$$

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{y} - 2\sqrt{x}) = 0$$

$$= -\sqrt{xy} - 2x + y + 2\sqrt{xy}$$

$$\sqrt{xy} - 2x + y - 2\sqrt{xy}$$

$$1. \sqrt{x} + \sqrt{y} \cdot (\sqrt{y} - 2\sqrt{x}) = 0$$

$$2y + x^2 = 9$$

2. $x=0, y=0$ не подходит в 2-ое

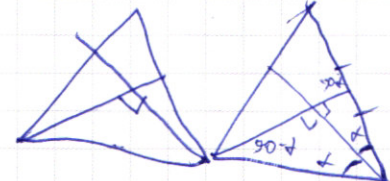
$$2. \sqrt{y} = 2\sqrt{x}$$

$$y = 4x$$

$$x^2 + 8x - 9 = 0$$

$$x_1 = 1, x_2 = -9 \quad 7. \text{ так как } x, y > 0$$

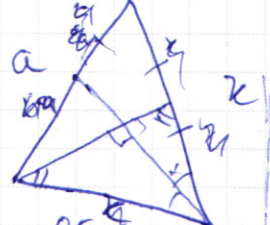
$$y_1 = 4, y_2 = -36$$



$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x-1|}{4x^2 - 12x + 1} \leq 0$$

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x-1|}{4 \cdot (x^2 - 3x) + |x^2 - 3x|} \leq 0$$

$$\frac{a}{b} = \frac{2x-2}{x}$$



1. $2 \leq 0$ $3x > 0$ $2. x \geq 0$ $3x < 0$

7. Смотрим по знаку.

$$4(x^2 - 3x) + (x^2 - 3x) \neq 0$$

$$5(x^2 - 3x) \neq 0$$

$$x \in (-\infty; 0] \cup [3; +\infty)$$

отриц: $(3; 0)$

$3(x^2 - 3x) \neq 0$

$$3x + 3a = 300$$

$$a + 1,5x = 300$$

$$2a = 100$$

$$2a + 3x = 600$$

$$3a < 3x$$

$$a < x$$

$$a < 1,5x \Rightarrow a > \frac{2}{3}x$$

$$a > 0,5x$$

$$x^2 - 2x + 5 - 4|x-1| \geq 0 \quad x \in (0; 3)$$

$$x \geq 1$$

$$x^2 - 2x + 5 - 4x + 4 \geq 0$$

$$x^2 - 6x + 9 \geq 0$$

$$(x-3)^2 \geq 0 \Rightarrow x \in [1; 3]$$

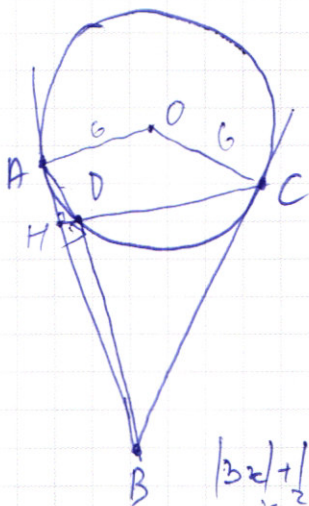
$$(a+3)(x+2) = 394$$

$$\begin{cases} 2a + 3x = 600 \\ 0,5x < a < 1,5x \\ x \geq 2 \end{cases}$$

lim: при $a, x \in \mathbb{N}$
 $6x = 600 \Rightarrow x = 100$
 $4x = 600 \Rightarrow x = 150$

$$x \in (100; 150)$$

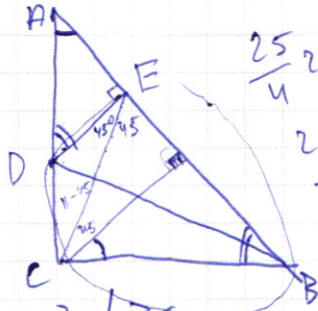
уменьш. сумм и до и в больш.



$$\frac{1}{2} AB \cdot DH = 15$$

$$AB = BC$$

$$AO = 6$$

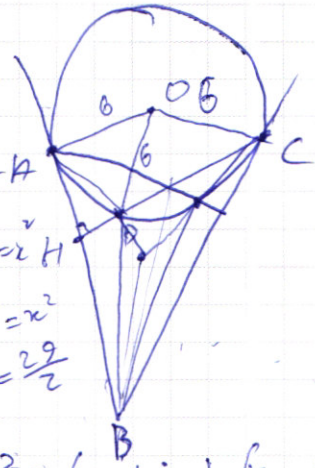


$$\frac{25}{4} \cdot 29 + 29 = x$$

$$29 \cdot \left(1 + \frac{25}{4}\right) = 2H$$

$$29 \cdot \frac{29}{4} = x^2$$

$$x = \frac{29}{2}$$



$$x^2 + y^2 = (x + iy) \cdot (x - iy)$$

$$|3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| \geq 6$$

$$x^2 - 2x + 3y + y^2 \leq 0$$

$$(3x) + 2(2y) + |6 - 3x - 2y| + 3y + (6 - 3x - 2y) - x^2 - y^2 \geq 6$$

$$(0; 0; y)$$

$$6x + 4y \geq 12$$

$$5x + 2y \geq 0$$

$$9x^2 + 4y^2 + 36 - 18x - 12y - 18x + 9x^2 + 6xy - 12y + 6xy + 4y^2 + 6|xy| +$$

$$+ 36 - 6x - 3x \cdot (6 - 3x - 2y) + 6|xy| + (2y \cdot (6 - 3x - 2y)) + (3x \cdot (6 - 3x - 2y)) + (2y \cdot (6 - 3x - 2y)) \geq 36$$

$$18x^2 + 8y^2 - 36x - 24y + 12xy + 12|xy| + 2 \cdot (3x \cdot (6 - 3x - 2y)) + 2 \cdot (2y \cdot (6 - 3x - 2y)) \geq 0$$

$$18x^2 + 8y^2 - 36x - 24y + 12xy + 12|xy| + 2 \cdot (18x - 9x^2 - 6yx) + 2 \cdot (12y - 6yx - 4y^2) \geq 0$$

$$t + |t| \geq 0$$

$$|a| + |b| + |c - a - b| \geq c$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + a^2 + b^2 - 2ax - 2bx + 2ab + 2|a \cdot (c - a - b)| + 2|b \cdot (c - a - b)| + 2|ab| \geq c^2$$

$$2 \cdot (a^2 + b^2 - ax - bx + ab) + 2 \cdot (|ax - a^2 - ba| + 2|bx - ab - b^2| + |ab|) \geq 0$$

$$(a^2 - ax + ab) + (b^2 - bx + ab) + |ab|$$

$$m + n + |m| + |n| - ab + |ab| \geq 0$$

$$\frac{m}{n} < 0$$

$$\frac{m}{n} < 0$$

$$ab < 0$$

$$a^2 - ax + ab \geq 0$$

$$a^2 - ax + b^2 - bx \leq 0$$

$$b^2 - bx + ab \leq 0$$

$$ab \geq 0$$

$$9x^2 - 18x + 6xy \leq 0$$

$$4y^2 - 12y + 6xy \leq 0$$

$$6xy \geq 0$$

x, y одного знака, x > 0

А это со вторыми?

$$x^2 - 2x - 3y + y^2 \leq 0$$

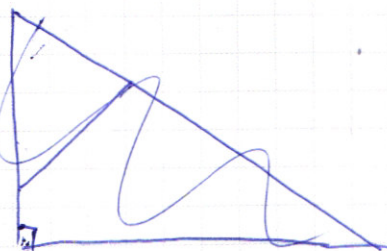
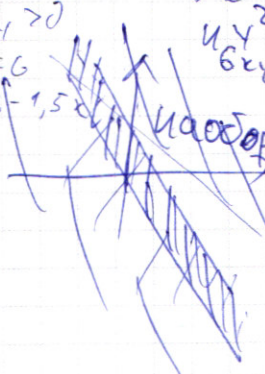
$$2x + 3y \geq 0$$

$$y \geq \frac{2}{3}x$$

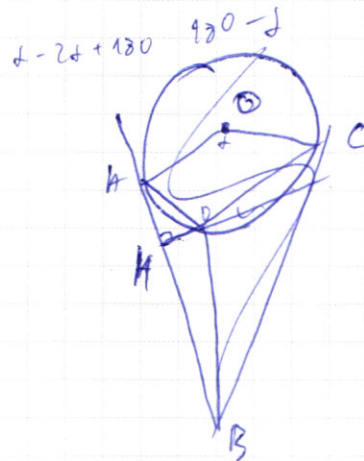
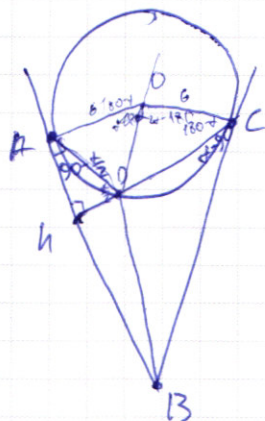
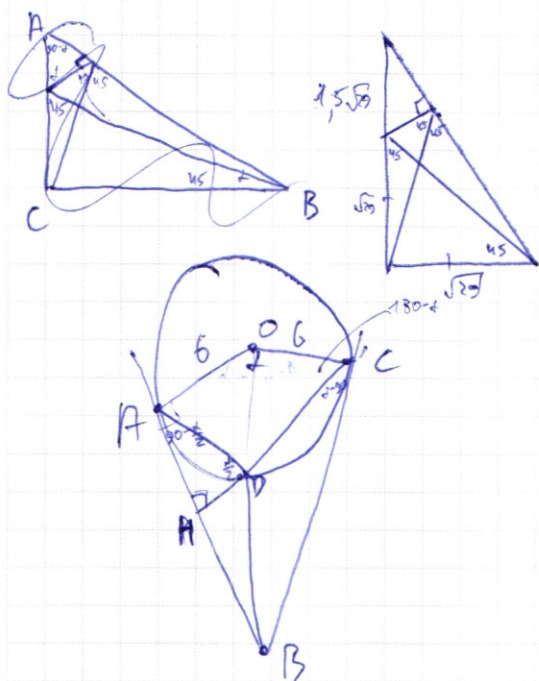
$$3x + 2y \geq 0$$

$$y \leq 3 - 1.5x$$

$$y \geq -1.5x$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$x^2 + y^2 - 2x - 3y \leq 0$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 3y = 0$$

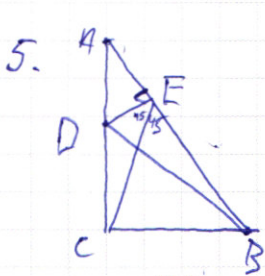
$$y \geq -\frac{2}{3}x + 3$$

y



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



Проведём DB

Заметим, что CDEB - впис. т.к. $\angle DEB = 90^\circ$ и $\angle DCB = 90^\circ$

$$\Rightarrow \angle DEB = \angle CDB = \angle CEB = 45^\circ$$

$$\angle DBC = \angle DEC = 45^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle CDB - \text{равноб. } DC = BC = \sqrt{29}$$

$$\Rightarrow AD = AC - BC = 1,5\sqrt{29}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{1,5\sqrt{29}}{2,5\sqrt{29}} = 0,6$$

$$S_{ADE} = \frac{1}{2} \sin(\angle DAE) \cdot AD \cdot AE$$

$$S_{ADE} = \frac{1}{2} \cdot \tan \angle DAE \cdot AD^2$$

$$S_{ADE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{9}{4} \cdot 29$$

$$S_{ADE} = \frac{9 \cdot 29}{20}$$

$$S_{ADE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{CB}{AB} \cdot AD \cdot \frac{AC}{AB}$$

$$S_{ADE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{29}}{29} \cdot 2,25 \cdot 29 \cdot \frac{2,5\sqrt{29}}{29}$$

$$S_{ADE} = \frac{2,5 \cdot 29}{29} \cdot 2,25 \quad S_{ADE} = 5 \cdot 2,25 = 11,25 \text{ ег}^2$$

$$AB^2 = \frac{25}{4} \cdot 29 + 29$$

$$AB^2 = \frac{29}{4} \cdot (\frac{25}{4} + 1)$$

$$AB^2 = \frac{29^2}{4} \quad AB = \frac{29}{2}$$

$$\sin \angle DAE = \frac{CB}{AB}$$

$$AE = \cos \angle DAE \cdot AD$$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$$

6. На момент написания я не знаю как её решить

Рассмотрим 1-ое:

$$|3x + 2y + 6 - 3x - 2y| > 6$$

$3x^2 + 4y^2 + 36$ Давимте $3x = a$ $2y = b$, а 6 примем за x , много удобнее.

И возведём в квадрат

$$a^2 + b^2 + x^2 + a^2 + b^2 - 2ax - 2bx + 2ab + 2|a \cdot (x - a - b)| +$$

$$+ 2 \cdot |b \cdot (x - a - b)| + 2|ab| > x^2$$

Сгруппируем и дадим $2ab - 2ab$

$$2a^2 - 2ax + 2ab + 2 \cdot (b^2 - bx + ab) + 2|a(x - a - b)| + 2 \cdot |b \cdot (x - a - b)| +$$

$$2|ab| - 2ab > 0$$

Заметили?

$t + |-t| \geq 0$ т.к. в случае $t \geq 0$ мы удавим, а в $t < 0$ сократимся

Остается одна проблема, когда $t = 0$, а у нас строгое неравенство.

не входят:

$$a^2 - ax + ab = 0$$

$$b^2 - bx + ab = 0$$

Остается одна проблема, когда $t > 0$ неравенство \Rightarrow , а должно быть больше.

не входят:

$$a^2 - ax + ab \geq 0$$

$$b^2 - bx + ab \geq 0$$

$$ab \geq 0$$

Или дадимте сразу входят:

$$(3x + 2y)^2 - 6 \cdot (3x + 2y) < 0$$

$$(3x + 2y) \cdot (3x + 2y - 6) < 0$$

т.к. $ab \geq 0$ - то a и b одного знака ... несколько лог. рассуждений

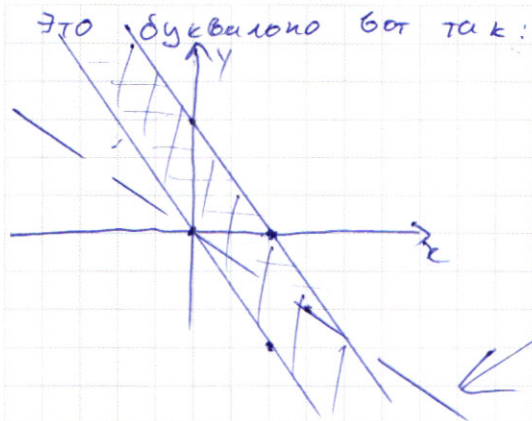
$$\Rightarrow 3x + 2y - 6 < 0$$

$$y < -1,5x + 3 \leftarrow \text{этого}$$

$$3x + 2y > 0$$

$$y > -1,5x$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Осталось со вторым разобраться:

$$x^2 - 2x - 3y + y^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow 1/2x + 3y \geq 0 \leftarrow \text{это как минимум}$$

$$y \geq -\frac{2}{3}x$$

А вот со вторым непонятно, но
можно подставить из 1 во 2.

либо я не понимаю, либо в условии

не между это уравнение эллипса



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)