МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 13 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|} \leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 600 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy}, \\ x+y^2=5. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 6, а радиус окружности равен 4.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{7}$, $BC=2\sqrt{\frac{7}{3}}$, а $\angle CED = 30^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |2x|+|y|+|4-2x-y|>4, \\ x^2-2x-4y+y^2 \leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 18$, $1 \leqslant y \leqslant 18$ и $f(x/y)<0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|}\le 0$$

$(x-3)^2=|x-3|^2$

$$\frac{(x-3)^2-2|x-3|+1}{2\cdot x\cdot(x-2)+|x|\cdot|x-2|}\le 0$$

$$\frac{(|x-3|-1)^2}{2\cdot x(x-2)+|x|\cdot|x-2|}\le 0$$

$(|x-3|-1)^2\ge 0$ всегда

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}(|x-3|-1)^2=0\\ 2\cdot(x-2)\cdot x+|x|\cdot|x-2|\ne 0\end{cases}\\ 2\cdot x\cdot(x-2)+|x|\cdot|x-2|<0\end{array}\right.$$

$(|x-3|-1)^2=0$

$|x-3|-1=0$

$$\left[\begin{array}{l}x=4\\x=2\end{array}\right.$$

$x=4$

$2\cdot 2\cdot 4+2\cdot 4\ne 0$ V - подходит

$x=2$

$2\cdot 0\cdot 2+0\cdot 2=0$ X - не подходит

$2\cdot x\cdot(x-2)+|x|\cdot|x-2|<0$

$x\ge 2$

$$\begin{cases}2\cdot x\cdot(x-2)+x(x-2)<0\\ x\ge 2\end{cases}$$

$$\begin{cases}x\ge 2\\ 3\cdot x\cdot(x-2)<0\end{cases}$$

$+\quad 0 \quad - \quad 2 \quad +$

Решений на этом промежутке нет

$0\le x<2$

$$\begin{cases}2\cdot x(x-2)-x\cdot(x-2)<0\\ 0\le x<2\end{cases}$$

$$\begin{cases}0\le x<2\\ x\cdot(x-2)<0\end{cases}$$

$+\quad 0 \quad - \quad 2 \quad +$

$x\in(0;2)$

$x<0$

$$\begin{cases}2x\cdot(x-2)+x\cdot(x-2)<0\\ x<0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x<0\\ 3\cdot x\cdot(x-2)<0\end{cases}$$

$+\quad 0 \quad - \quad 2 \quad +$

Решений на этом промежутке нет

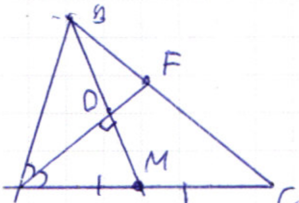
Итого: $x\in\{4\}\cup(0;2)$

№2

(где $x, y>0$, а в задаче ещё целые)

Стороны треугольника являются $3x$, y, $2y$ тогда и только тогда, когда одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

Если б ⊥ м



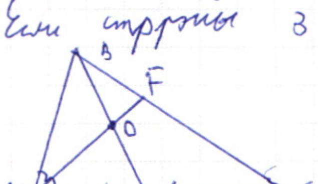
Пусть $y=1$, $AC=2y$

$\triangle MAB$ равнобедр. $\Rightarrow AB=AM=y$

(AO - мед. и высота) $\frac{BF}{FC}=\frac{AB}{AC}=\frac{1}{2}$.

Пусть $BF=x$, тогда $FC=2x$, $BC=3x$.

Если стороны $3x$, y, $2y$ ($BC=3x$, $AB=y$, $AC=2y$)



Проведём медиану BM и бис. AF. $AC=2y$, значит $1=y$, значит $AB=1$. Тогда $\triangle ABM$ равнобедр., и AO не только бис., но и высота $\Rightarrow BM\perp AF$

Утверждение в обе стороны доказано.

Но также для ~~чисел х и у~~ сторон должны выполняться неравенство треугольника. Тогда треугольник, удовлетворяющий условию существует если:

$$\begin{cases} y < 2y+3x \\ 2y < y+3x \\ 3x < y+2y \\ y+2y+3x=600 \end{cases}$$

$y < 2y+3x$ — верно ($y,x>0$, целые) $0 < y+3x$

$$\begin{cases} y < 3x \\ x < y \\ x+y=200 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 200-y \\ y < 600-3y \\ 200-y < y \end{cases} \qquad \begin{cases} x=200-y \\ y<150 \\ y>100 \end{cases}$$

Получается 49 вариантов y и, соответственно, x. По этим числам однозначно восстанавливаются стороны треугольника. Значит и искомых Δ 49.

№3

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy} \\ x+y^2=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-2y)^2=xy \\ x+y^2=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-4xy+4y^2=xy \\ x=5-y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-5xy+4y^2=0 \\ x=5-y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 25-10y^2+y^4-25y+5y^3+4y^2=0 \\ x=5-y^2 \end{cases}$$

$$y^4+5y^3-6y^2-25y+25=0$$

1 – корень

$$\begin{array}{l|l} y^4+5y^3-6y^2-25y+25 & y-1 \\ \underline{-\;y^4-y^3} & y^3+6y^2-25 \\ \quad 6y^3-6y^2 & \\ \quad \underline{-\;6y^3-6y^2} & \\ \qquad\qquad -25y+25 & \\ \qquad\qquad \underline{-\;-25y+25} & \\ \qquad\qquad\qquad 0 & \end{array}$$

-5 – корень

$$\begin{array}{l|l} y^3+6y^2-25 & y+5 \\ \underline{-\;y^3+5y^2} & y^2+y-5 \\ \quad y^2 & \\ \quad \underline{-\;y^2+5y} & \\ \qquad -5y-25 & \\ \qquad \underline{-\;-5y-25} & \\ \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

$$(y-1)(y+5)(y^2+y-5)=0$$

$$\left[\begin{array}{l} y^2+y-5=0 \\ y=1 \\ y=-5 \end{array}\right.$$

Надо проверить, чтобы в левой части самого первого уравнения не получались отрицательные числа.

$y^2+y-5=0$

$D = 1+20=21$

$y=\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$

$y=1$

$x=4$

$4-2=\sqrt{4\cdot 1}$

$2=2$ ✓

$y=-5$

$x=-20$

$-20+10\neq\sqrt{100}$

✗

$y=\frac{-1+\sqrt{21}}{2}$

$x=5-\left(\frac{-1+\sqrt{21}}{2}\right)^2=5-\frac{1-2\sqrt{21}+21}{4}=$

$=\frac{20-22+2\sqrt{21}}{4}=\frac{-1+\sqrt{21}}{2}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 продолжение

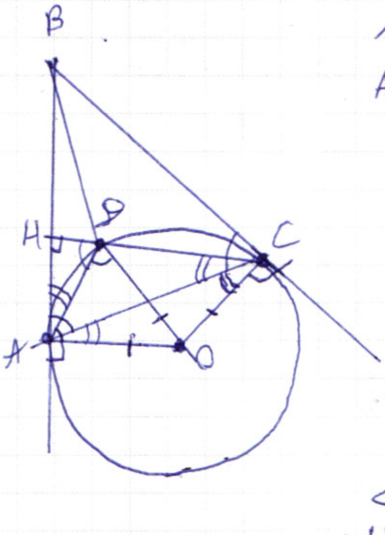
Если $y = \frac{-1-\sqrt{21}}{2}$, то $x = \frac{-1-\sqrt{21}}{2}$

В ~~2-х~~ 2-х случаях $x = y$, но тогда $x - 2y = -y$. Если $-y < 0$, то под корнем должно быть отрицательное и пара чисел не подходит. Это значит $y = x = \frac{-1+\sqrt{21}}{2}$ $(\sqrt{21} > 4 > 1)$

Если же $y = x = \frac{-1-\sqrt{21}}{2}$, то всё хорошо:

$$\frac{-1-\sqrt{21}}{2} - 2\cdot\left(\frac{-1-\sqrt{21}}{2}\right) = -\left(\frac{-1-\sqrt{21}}{2}\right) = \frac{\sqrt{21}+1}{2} = \sqrt{\left(\frac{-1-\sqrt{21}}{2}\right)^2}$$

Итого: решения системы: $y = 1$, $x = 4$; $x = \frac{-1-\sqrt{21}}{2}$, $y = \frac{-1-\sqrt{21}}{2}$



№4

$AB = AC$ (отрезки кас. из 1 точки)

$\triangle ABC$ равнобедр.

$\angle BAC = \angle BCA =)$

$AO = DO = CO$ (r) $\triangle AOC$ равнобедр.

$\angle CAO = \angle ACO = (($

$AO \perp AB$, $OC \perp BC$ (рад $\perp$ кас)

$\angle AOC = \cancel{2(}\ \smile AC = 2($

$(+ ((= 90^\circ$ ~~(~~ $(\angle BAO = 90 = (+ (($

$\angle HCA = 180 - 90 - (= (($

$\angle HAD = \frac{1}{2}\smile AD = \angle HCA = (($ $\angle HDA = 180 - 90 - ((= ($

$\angle DAC = (- (($

$\angle DAO = (- ((+ ((= (= \angle ADO$ ($\triangle ADO$ равнобедр.)

$\triangle ADO \sim \triangle ABC$ по 2-м углам $\frac{AO}{AB} = \frac{DO}{BC} = \frac{AD}{AC} = \frac{4}{AB} = \frac{2}{BC}$

$\triangle HDA \sim \triangle HAC$ по 2-м углам $\frac{HD}{AH} = \frac{AH}{HC} = \frac{AD}{AC}$

$\frac{CH}{AC} = \cos((= \sin(= \frac{AH}{AB}$ $\frac{CH}{AB} = \frac{AH\cdot AC}{4\cdot AC} = \frac{AH}{4} = \frac{\sqrt{HD}\cdot\sqrt{HC}}{4}$

$AD = \frac{4\cdot AC}{AB}$; $AH^2 = DH\cdot HC$ (из подобия) $\frac{CH^2}{AB^2} = \frac{HD\cdot HC}{16}$

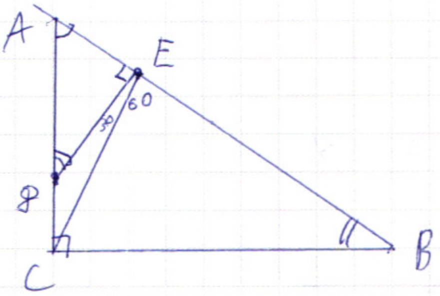
$\frac{CH}{AC} = \cancel{4\cdot AC\cdot AC}\ \frac{AH\cdot AB}{4\cdot AC}$

$CH = \frac{AB^2 \cdot HD}{16}$

$S_{\triangle ABD} = 6 = AB \cdot HD \cdot \frac{1}{2}$ $\quad AB \cdot HD = 12$

$CH = AB \cdot \frac{12}{16} = AB \cdot \frac{3}{4}$ $\quad \frac{CH}{AB} = \frac{3}{4}$ $\quad \frac{AB}{CH} = \frac{4}{3}$

№5



$AC = \sqrt{7}$

$BC = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$

$AB = \sqrt{7 + \frac{28}{3}} = \sqrt{\frac{49}{3}} = \frac{7}{3}\sqrt{3}$

$\angle ADE = 180 - 90 - \angle = \angle ABC = \angle$

$\triangle ADE \sim \triangle ABC$ по 2-м углам

$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} = k$ $\quad \angle CEB = 90 - 30 = 60^\circ$

$2R\ (\triangle CEB) = \frac{BC}{\sin 60}$ $\quad 2R = \frac{2\sqrt{\frac{7}{3}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 4 \cdot \sqrt{\frac{7}{9}} = \frac{4}{3}\sqrt{7}$

$\angle DEB\ (90^\circ) + \angle DCB\ (90^\circ) = 180^\circ \Rightarrow DEBC$ вписанный. Тогда $\triangle DEC$ и $\triangle CEB$ имеют одинаковые R описанных окружностей (лежат на одной и той же окружности). Тогда $2R = \frac{4}{3}\sqrt{7} = \frac{DC}{\sin 30}$

$DC = \frac{2}{3}\sqrt{7}$, тогда $AD = \frac{1}{3}\sqrt{7}$ и $\frac{AD}{AC} = \frac{\frac{1}{3}\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{1}{3}$

$k = \frac{AD}{AB} = \frac{\frac{1}{3}\sqrt{7}}{\frac{7}{3}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{21}}{21}$ $\quad k^2 = \frac{S_{\triangle AED}}{S_{\triangle ABC}}$

$S_{\triangle ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{2 \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{\frac{7}{3}}}{2} = \sqrt{\frac{49}{3}} = \frac{7}{3}\sqrt{3}$

$S_{\triangle AED} = k^2 \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{21}{21^2} \cdot \frac{7}{3}\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{9}$

№6

$$\begin{cases} |2x| + |y| + |4 - 2x - y| > 4 \\ x^2 - 2x - 4y + y^2 \le 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |2x| + |y| + |4 - 2x - y| - 4 > 0 \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 \le 5 \end{cases}$$

Второе ~~уравнение~~ неравенство ограничивает окружность радиуса $\sqrt{5}$ с центром в $(1;2)$ и всё пространство внутри неё. Надо понять, какая часть из данного круга подходит для 1-го уравнения.

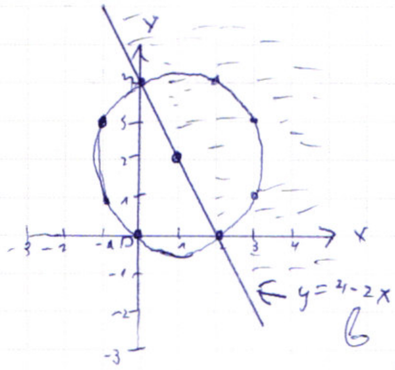
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



№6 продолжение

Окружность проходит через точки с координатами $(2;0)$; $(0;0)$, $(3;1)$, $(3;3)$, $(2;4)$, $(0;4)$, $(-1;1)$, $(-1;3)$

Это проверяется подстановкой координат на место x и y в уравнение окружности.

$|2x|+|y|+|4-2x-y|-4>0$ Есть 8 случаев:

1) $2x\ge0$, $y\ge0$ $2x+y\le4$

$2x+y-4+4-2x-y>0$

$0 \not> 0$

координат точек нет.

2) $2x\ge0$ $y\ge0$ $2x+y>4$

$2x+y-4-4+2x+y>0$

$2x+y-4>0$

Это все точки, выше прямой $y=4-2x$ (заштрихована ≡)

Также $y=4-2x$ проходит через $(1;2)$

3) $2x\ge0$, $y<0$, $2x+y\le4$

$2x-y-4+4-2x-y>0$

$-2y>0$

$y<0$

~~все точки, ниже оси ординат~~

все точки, левее оси ординат

4) $2x\ge0$ $y<0$ $2x+y>4$

$2x-y-4-4+2x+y>0$

$2x-4>0$

$x>2$

Все точки правее прямой $x=2$

5) $2x<0$ $y\ge0$ $2x+y\le4$

$-2x+y-4+4-2x-y>0$

$-4x>0$

$x<0$

все точки, ниже оси абсцисс

6) $2x<0$ $y\ge0$ $2x+y>4$

$-2x+y-4-4+2x+y>0$

$2y-8>0$ ~~неверно~~

~~координат точек нет~~

~~8) $2x<0$ $y<0$ $2x+y>4$~~

~~$-2x-y-4-4+2x+y>0$~~

$y>4$

все точки, выше прямой $y=4$

7) $2x<0$ $y<0$ $2x+y\le4$

$-2x-y-4+4-2x-y>0$

$-2x-y>0$

$2x+y<0$

все точки, ниже прямой $y=-2x$

8) $2x<0$, $y<0$, $2x+y>4$

$-2x-y-4-4+2x+y>0$

$-8>0$ неверно

нужных точек нет

В итоге этим неравенством ограничена вся координатная плоскость, кроме Δ, образованного ~~прям~~ осями OX и OY и пряили $y=4-2x$. Этот треугольник с вершинами $(0;0)$, $(0;4)$, $(2;0)$ вписан в окружность, является прямоугольным. Получается системой уравнений ограничена часть плоскости внутри ~~окружности~~ окружности ~~(без границ)~~ + её границы, но лежащая вне треугольника с указанными выше вершинами. Площадь окружности πr^2, площадь этого $\Delta = \frac{4\cdot 2}{2} = 4$. Тогда S искомой фигуры $= \pi\cdot 5 - 4 \approx 11{,}7$

№7

Заметим, что $f(1\cdot 1) = f(1)+f(1) = 2f(1)$. Тогда $f(1)=0$. Так как $f(p)=p$, то f для всех простых >0. Тогда и для всех составных натуральных чисел >0, поскольку любое составное число можно представить в виде произведения 2-х или более простых, то можно взять сначала все числа с 2-мя простыми (а их $f>0$, т.к. сумма 2-х чисел >0, это число >0), потом с 3-мя простыми (число с 2-мя простыми $\cdot$ какое-то p), ~~...~~, их f поэтому же будет >0 и т.д. У любого натурального числа конечное кол-во множителей, так что у числа с n простыми будет $f =$ какое-то составное число из $n-1$ множителя, а числа его $f>0$ (доказано уже ранее) $\cdot$ простое число, а его $f>0$ по условию), тогда и f нашего числа >0. Ещё заметим, что общее кол-во пар чисел (x, y), подходящих ~~по условию~~ $(1\le y\le 18$, ~~...~~ $1\le x\le 18)$ $= 18^2$. Посмотрим на такие числа a и b, что $a=\frac{x}{y}$ $b=\frac{y}{x}$ (x и y - какие-то из подходящих ~~под...~~: $1\le y\le 18$ и $1\le x\le 18$). Тогда $f(ab) = f(1) = 0$, но также $f(ab) = f\left(\frac{x}{y}\right) + f\left(\frac{y}{x}\right)$. То есть либо $f\left(\frac{x}{y}\right) = 0 = f\left(\frac{y}{x}\right)$, либо одно из них >0, а другое <0

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7 продолжение

~~В первом случае $x=y$, т.к.~~ Во 2 случае равно 1 из пар нам подходит. Какие дроби подходят под 1 случай? ~~Только~~ ~~перед~~ ~~$x=y$~~ Если $f\left(\frac{x}{y}\right)=0=f\left(\frac{y}{x}\right)$, то $f\left(y\cdot\frac{x}{y}\right)=f(y)+0=f(x)$

Выпишем все f ~~пред~~ для чисел от 1 до 18:

$f(1)=0$ $f(3)=3$ $f(5)=5$ $f(7)=7$ $f(3\cdot3)=6$

$f(2)=2$ $f(\underset{2\cdot2}{4})=2+2=4$ $f(2\cdot3)=5$ $f(2\cdot4)=8$ $f(2\cdot5)=7$

$f(11)=11$ $f(13)=13$ $f(3\cdot5)=8$ $f(17)=17$

$f(2\cdot6)=7$ $f(7\cdot2)=9$ $f(8\cdot2)=8$ $f(\overset{9\cdot2}{\cancel{18}})=8$

$f(y)=f(x)$ или если $y=x$, либо ~~х~~ это 5, 6 или это два из 7, 10, 12, либо 2 из 8, 15, 16, 18.

Тогда всего пар подходящих ~~под 1 случаи~~ нам нужных нам = пар в 1 случае / 2 =

$$\frac{18^2-18\,(y=x)-2\cdot C_3^2-2\cdot C_4^2}{2}=\frac{324-18-\cancel{36}-12}{2}=144$$

$18\cdot18=144+18=324$ $\quad C_4^2=\frac{4\cdot3}{2}$ $\quad 300-12=288$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|}\le 0$$

$$\frac{(x-3)^2-2|x-3|+1}{2x(x-2)+|x|\cdot|x-2|}\le 0$$

$$\frac{(|x-3|-1)^2}{2\cdot x\cdot(x-2)+|x|\cdot|x-2|}\le 0$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}|x-3|-1=0\\ 2\cdot x\cdot(x-2)+|x|\cdot|x-2|\ne 0\end{cases}\\ 2\cdot x\cdot(x-2)+|x|\cdot|x-2|<0\end{array}\right.$$

$\cancel{0}\,\cancel{4}x<0$ (нет $x\ge 2$)

$$\left[\begin{array}{ll}x=4 & 2\cdot 4\cdot 2+4\cdot 2\ne 0 \quad V\\ x=2 & 0+0=0 \quad X\\ 2\cdot x\cdot(x-2)+|x|\cdot|x-2|<0\end{array}\right.$$

$x\ge 2$

$2\cdot x\cdot(x-2)+x\cdot(x-2)<0$

$$\begin{cases}x\cdot(x-2)\cdot 3<0\\ x\ge 2\end{cases}$$

$+\quad 0 \quad - \quad 2 \quad +$ X

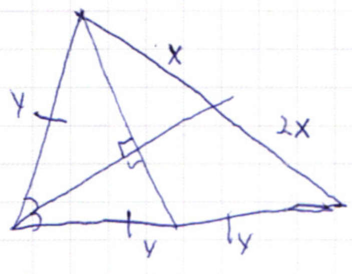
$0\le x\le 2$

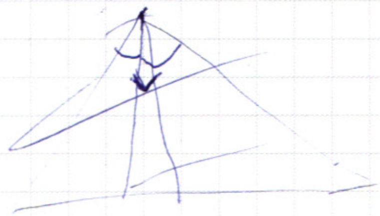
$2\cdot x\cdot(x-2)-x(x-2)<0$

$$\begin{cases}x\cdot(x-2)<0\\ 0\le x\le 2\end{cases}$$

$+\quad 0 \quad - \quad 2 \quad +$

$[0;2)$ и $\{4\}$

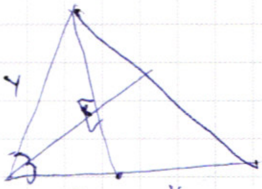




$$\begin{cases}y<2y+3x\\ 2y<y+3x\\ 3x<\cancel{3x}\,y+2y\\ 3x+3y=600\end{cases}$$ ✓

$$\begin{cases}y<3x\\ x<y\\ x+y=200\end{cases}$$

$x=200-y$



$$\begin{cases}y<600-3y\\ 200-y<\cancel{y}\end{cases}$$

$$\begin{cases}y<150\\ \cancel{x}\,y>100\end{cases}$$

48

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy} \\ x+y^2=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-2y)^2=xy \\ x+y^2=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-4xy+4y^2=xy \\ x+y^2=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-5xy+4y^2=0 \\ x+y^2=5 \end{cases}$$

$x=5-y^2$

$$25-10y^2+y^4-25y+5y^3+4y^2=0$$

$$y^4+5y^3-6y^2-25y+25=0$$

$$\begin{array}{l|l} y^4+5y^3-6y^2-25y+25 & y-1 \\ \hline -(y^4-y^3) & y^3+6y^2-25 \\ 6y^3-6y^2 & \\ -(6y^3-6y^2) & \\ 0-25y+25 & \\ -(-25y+25) & \\ 0 & \end{array}$$

$$(y-1)(y^3+6y^2-25)=0$$

$$\begin{array}{l|l} y^3+6y^2+0y-25 & y+5 \\ \hline -(y^3+5y^2) & y^2+y-5 \\ y^2+0y & \\ -(y^2+5y) & \\ -5y-25 & \\ 0 & \end{array}$$

$$(y-1)(y+5)(y^2+y-5)=0$$

$y^2+y-5=0$

$D=1+20=21$

$y=\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$

$x\geq 2y$

$y=1$ $y=-5$

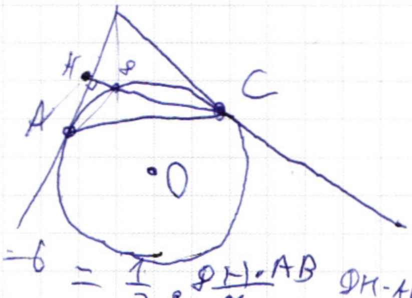
$x=4$ ✓ $x=-20$ ✗

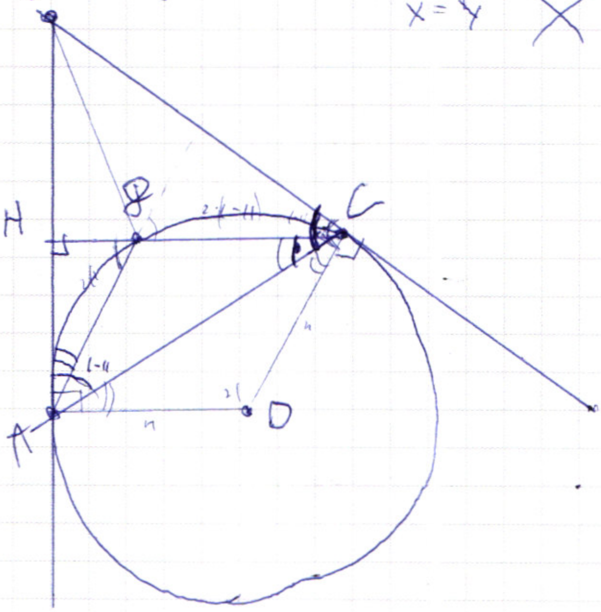
$$x=5-\left(\frac{\sqrt{21}-1}{2}\right)^2=$$

$$=5-\frac{21-2\sqrt{21}+1}{4}=$$

$$=5-\frac{11-\sqrt{21}}{2}=\frac{10-11-\sqrt{21}}{2}=\frac{-1-\sqrt{21}}{2} \quad \Big| \quad \frac{-1+\sqrt{21}}{2}$$

$x=y$ ✗





$S_{ABD}=6=\frac{1}{2}\cdot DH\cdot AB$ $DH\cdot AB=12$

$r=4$

$\frac{AB}{CA}$ $\frac{CH}{AB}=\frac{CH}{BC}=\cos C-1$

$$\frac{DH}{AH}=\frac{AH}{HC}=\frac{AD}{AC}$$

$\sin(-1)=?$ $\frac{DC}{\sin(-1)}=8$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

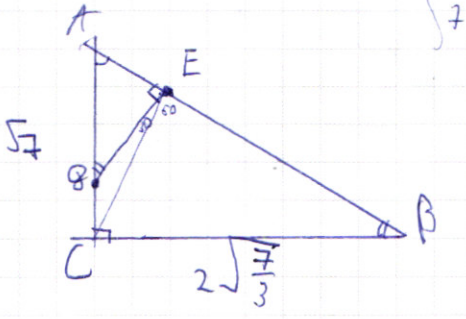
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$\sqrt{7+\frac{28}{3}} = \sqrt{\frac{49}{3}} = 7\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{7}{3}\sqrt{3}$

$\frac{2\sqrt{\frac{7}{3}}}{\sin 60} = \frac{2\sqrt{\frac{7}{3}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 4\cdot\sqrt{\frac{7}{9}} = \frac{4}{3}\sqrt{7} = 2r_{CEB} = 2r_{8EBC}$

$2r_{8EC}$

$\frac{4}{3}\sqrt{7} = \frac{8C}{\sin 30}$

$8C = \frac{2}{3}\sqrt{7}$

$\frac{A8}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{8E}{BC} = k = \frac{\frac{1}{3}\sqrt{7}}{\frac{7}{3}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{21}} = \frac{\sqrt{21}}{21}$ $\quad A8 = \frac{1}{3}\sqrt{7}$ $\quad \frac{A8}{AC} = \frac{1}{3}$

$k^2 = \frac{S_{AF8}}{S_{ABC}} = \frac{S_{AE8}}{\sqrt{\frac{49}{3}}} = \frac{21}{21^2}$ $\quad S_{AE8} = \frac{1}{21}\cdot\frac{7}{3}\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{9}$

$\begin{cases} |2x| + |y| + |4-2x-y| > 4 \\ x^2 - 2x - 4y + y^2 \le 0 \end{cases}$

$(x-1)^2 + (y-2)^2 \le 5$

$|2x| + |y| + |4-2x-y| - 4 > 0$

1) $2x \ge 0 \quad y \ge 0 \quad 2x+y \le 4$

$(0;0)$

2) $2x+y > 4$

$2x+y - 4 > 0$

$y = 4-2x$

3) $2x \ge 0 \quad y \le 0 \quad 2x+y \le 4$

$2x - y + 4 - 2x - y - 4 > 0$

$-2y > 0$

$y < 0$

4) $2x \ge 0 \quad y \le 0 \quad 2x+y \ge 4$

$2x - y - 4 + 2x + y - 4 > 0$

$4x - 8 > 0$

$x > 2$

5) $2x \le 0 \quad y \ge 0 \quad 2x+y \le 4$

$-2x + y + 4 - 2x - y - 4 > 0$

$-4x > 0$

$x < 0$

6) $2x \le 0 \quad y \ge 0 \quad 2x+y \ge 4$

$-2x + y - 4 - 4 + 2x + y > 0$

$2y - 8 > 0$

$y > 4$

7) $2x \le 0 \quad y \le 0 \quad 2x+y \le 4$

$-2x - y - 4 + 4 - 2x - y > 0$

$-4x - 2y > 0$

$-2x - y > 0$

$2x + y < 0$

$y = -2x$

8) $2x \le 0 \quad y \le 0 \quad 2x+y \ge 4$

$-2x - y - 4 - 4 + 2x + y > 0$

$\varnothing$

$3{,}14 \times 5 = 15{,}70$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

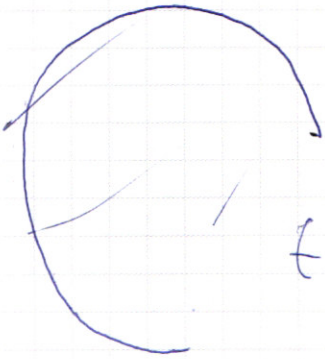
(Нумеровать только чистовики)

$S_{ABD} = 6$

$r = 4$

$f\left(\frac{3}{5}\right) > 0$

$f\left(\frac{5}{3}\right) < 0$



$f\left(\frac{2}{3}\right) = 0$

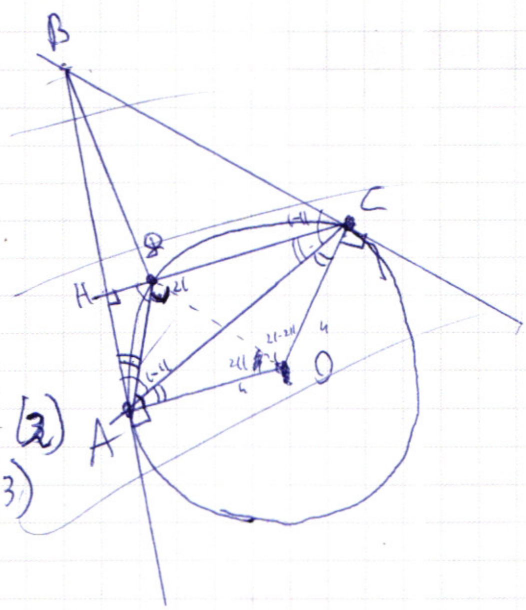
$f\left(\frac{3}{2}\right) = 0$

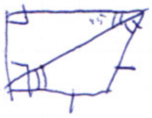
$f\left(2 \cdot \frac{3}{2}\right) = 0 + f(2)$

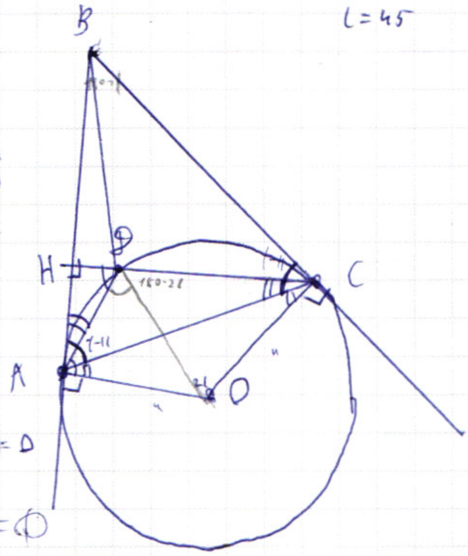
$f(2) = f(3)$

$4l = 180$

$l = 45$







$S_\Delta = p \cdot r$

$S_{ABD} = \frac{AB+BD+AD}{2} \cdot r_1 = AB \cdot HD \cdot \frac{1}{2}$

$S_{ABC} = \frac{AB+BC+AC}{2} \cdot 4$

$\frac{18^2 - 18}{2}$

$\frac{2}{2}$ $\frac{3}{2}$

$\frac{2}{8}$

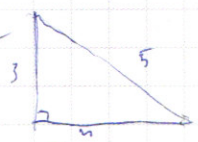
$S = \frac{4R}{abc}$

$\frac{abc}{4R} = S$

$\frac{3}{5}$ $\frac{5}{3}$ $f(1) = 0$

$f\left(\frac{6}{3}\right) + f\left(\frac{3}{6}\right) = 0$

$\frac{AB \cdot BC \cdot AC}{16} = S$



$r = \frac{S}{p} = 2$ $S = 6$

$R = 2{,}5$

60

$f\left(\frac{c}{d}\right) + f\left(\frac{d}{c}\right) = 0$

$\frac{AD}{AC} = \frac{4}{AB} = \frac{4}{BC}$

$\frac{CH}{AC} = \cos l = \sin l = \frac{4H}{AD} = \frac{4H \cdot AB}{4AC}$

$f\left(\frac{c}{d}\right) = 0$

$f\left(\frac{d}{c}\right) = 0$

$\frac{CH}{AB} = \frac{AC \cdot AH}{4AC} = \frac{\sqrt{HD \cdot HC}}{4}$

$\frac{HD}{AH} = \frac{AH}{HC} = \frac{AD}{AC} = \frac{4}{AB}$

$f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1) = 2f(1)$

$f(1) = 0$

$AH = \sqrt{HD \cdot HC}$

$\frac{CH^2}{AB^2} = \frac{HD \cdot CH}{16}$

$f(2) = 2$

$\frac{CH}{AB^2} = \frac{HD}{16}$

$f(3) = 3$ $f(4) = 2+2 = 4$ $f(14) = 9$

$f(5) = 5$ $f(15) = 8$

$CH = \frac{AB^2 \cdot HD}{16} = \frac{AB \cdot 12}{16} = AB \cdot \frac{3}{4}$

$\frac{AB}{CH} = \frac{4}{3}$

$f(6) = 5$ $f(10) = 7$ $f(16) = 8$

$f(7) = 7$ $f(11) = 11$ $f(17) = 17$

$\frac{CH}{AB} = \frac{3}{4}$

$f(8) = 6$ $f(12) = 7$ $f(18) = 8$

$f(9) = 6$ $f(13) = 13$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)