

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 14

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарём

- √ 1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x - 1|}{4x^2 - 12x + |x| \cdot |x - 3|} \leq 0.$$

- √ 2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 300 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

- √ 3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy}, \\ 2y + x^2 = 9. \end{cases}$$

- √ 4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D . Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 15, а радиус окружности равен 6.

- √ 5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED , если известно, что $AC = \sqrt{29}$, $BC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$, а $\angle CED = 45^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x; y)$, удовлетворяющими системе

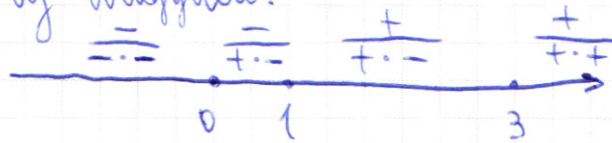
$$\begin{cases} |3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| > 6, \\ x^2 - 2x - 3y + y^2 \leq 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = p$ для любого простого числа p . Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $3 \leq x \leq 19$, $3 \leq y \leq 19$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

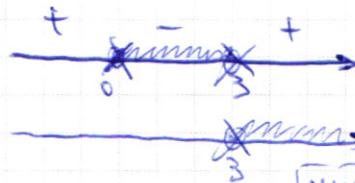
$$\textcircled{1} \frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x-1|}{4x^2 - 12x + |x|(x-3)} \leq 0$$

методом интервалов:
рассмотрим случаи для каждого
из значений:



$$1) x \geq 3 \rightarrow \frac{x^2 - 2x + 5 - 4x + 4}{4x^2 - 12x + x^2 - 3x} \leq 0 \quad \frac{x^2 - 6x + 9}{5x^2 - 15x} \leq 0$$

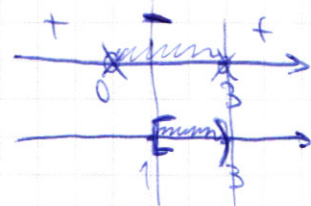
$$\frac{x-3}{x} \leq 0 \quad \begin{matrix} x \neq 0 \\ x \neq 3 \end{matrix}$$



Книжки не
подойдут!

$$2) 1 \leq x < 3 \rightarrow \frac{x^2 - 2x + 5 - 4x + 4}{4x^2 - 12x + 3x - x^2} \leq 0 \quad \frac{x^2 - 6x + 9}{3x^2 - 9x} \leq 0$$

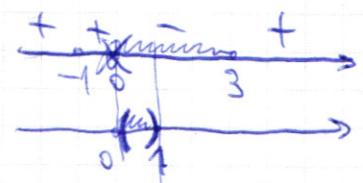
$$\begin{matrix} x \neq 0 \\ x \neq 3 \end{matrix} \quad \frac{x-3}{x} \leq 0$$



$x \in [1; 3)$

$$3) 0 \leq x < 1 \rightarrow \frac{x^2 - 2x + 5 - 4 + 4x}{4x^2 - 12x + 3x - x^2} \leq 0 \rightarrow \frac{(x+1)^2}{x(x-3)} \leq 0$$

$$\begin{matrix} x \neq 0 \\ x \neq 3 \end{matrix}$$



$x \in [0; 1)$

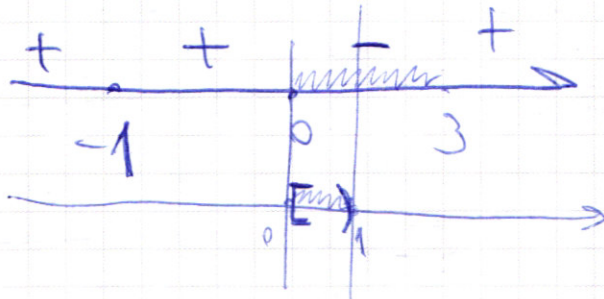
1.2.

3) $0 \leq x < 1$

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4 + 4x}{4x^2 - 12x + 3x - x^2} \leq 0$$

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{3x^2 - 9x} \leq 0$$

$$\frac{(x+1)^2}{x(x-3)} \leq 0$$

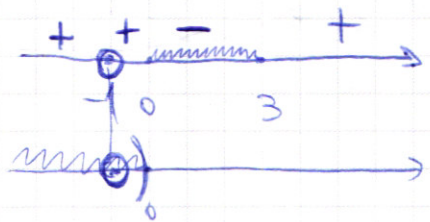


4) $x < 0$

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4 + 4x}{4x^2 - 12x + x^2 - 3x} \leq 0$$

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{5x^2 - 15x} \leq 0$$

$$\frac{(x+1)^2}{x(x-3)} \leq 0$$



Ответ: $x \in [0; 3) \cup \{-1\}$



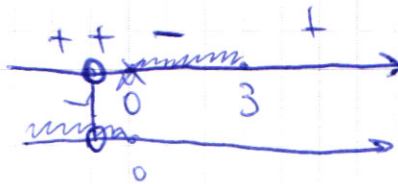
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) неравенство

4) $x < 0$

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4 + 4x}{4x^2 - 12x + x^2 - 3x} \leq 0 \rightarrow \frac{(x+1)^2}{x(x-3)} \leq 0$$

$$x \neq 3 \\ x \neq 0$$

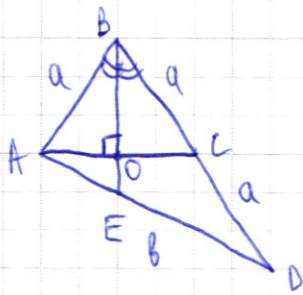


~~_____~~ $x \in \{-1\}$

из пунктов 2, 3, 4 $x \in (0; 3) \cup \{-1\}$

Ответ: $x \in (0; 3) \cup \{-1\}$

2) рассмотрим такой $\triangle ABC$:



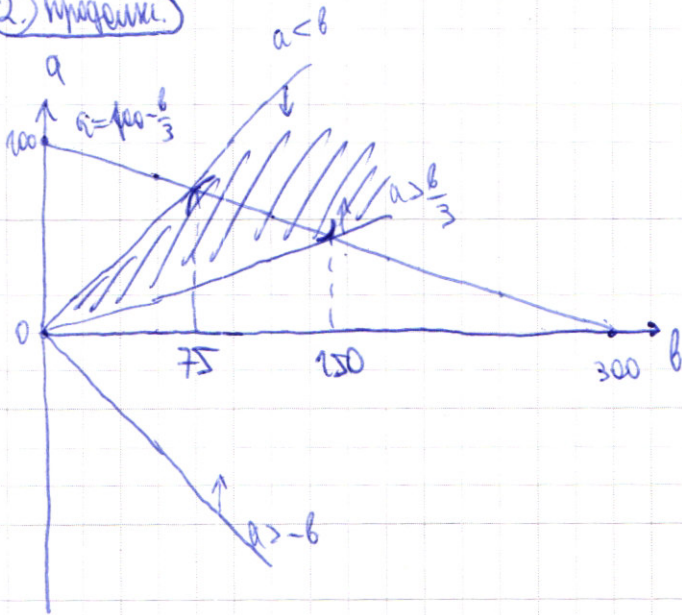
1) $\triangle ABC$ BO биссектриса и высота

2) $AB = BC = CA = a; AD = b$

3) по условию $3a + b = 300 \rightarrow a = 100 - \frac{b}{3}$
по к-ву треугольника $2a + b > a \rightarrow a > -b$
 $a + b > 2a \rightarrow a < b$
 $3a > b \rightarrow a > \frac{b}{3}$

4) по условию из п. 3 построим зависимость a от b

2) Треугольники



3) у треугольника значения

$$b: 75 < b < 150$$

также a и b целые числа,
а если $a = 100 - \frac{b}{3}$, то $b \div 3$

↓
есть 24 варианта для b ,
значит всего 24 варианта
треугольников

$$b = (78, 81, 84, \dots, 147)$$

Ответ: 24

3.

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy} \\ 2y + x^2 = 9 \end{cases}$$

→ 1) $(y - 2x)^2 = xy$

$$y^2 - 4xy + 4x^2 = xy$$

$$y^2 - 5xy + 4x^2 = 0 \quad | : x^2$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 5\left(\frac{y}{x}\right) + 4 = 0 \quad t = \frac{y}{x}$$

$$t^2 - 5t + 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} \frac{y}{x} = 1 \\ \frac{y}{x} = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = 1 \\ t = 4 \end{cases}$$

2) если $y = x$, то

$$x^2 + 2x - 9 = 0$$

$$\begin{aligned} x &= -1 \pm \sqrt{10} \\ y &= -1 \pm \sqrt{10} \end{aligned}$$

при проверке увидим

$$x = -1 + \sqrt{10}; y = -1 + \sqrt{10}$$

не подходит;

увидим $x = -1 - \sqrt{10}; y = -1 - \sqrt{10}$
также

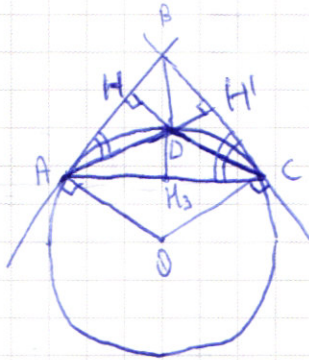
3) если $y = 4x$, то $x^2 + 2x - 9 = 0$

$$\begin{cases} x = -9; y = -36 \rightarrow \text{не подходит} \\ x = 1; y = 4 \rightarrow \text{подходит} \end{cases}$$

Ответ: $x = 1; y = 4$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4) $\frac{AB}{CH} = ?$



1) рисунок симметричен
↓
высоты пересекаются в 1 точке

2) высоты CH и AN' пересекаются
обе в т. D

3) тогда $CD \perp AO$; $AD \perp CO$
↓
 $ADCO$ - параллелограмм

4) $CD = OA = 6$ 5) $S_{\triangle AOD} = \frac{AB \cdot HD}{2} = 15$

6) ~~CH = HD + CD~~ $CH = HD + CD = \frac{30}{AB} + 6 \Rightarrow CH = \frac{30}{AB} + 6$

⇒ по теореме об угле между хордой и касательной $\angle BAC = \angle AED = \angle CAD \Rightarrow CH$ - высота и биссектриса;
 BN_3 - высота и биссектриса; AN' - высота и биссектриса $\Rightarrow \angle ABC$ равноугленный $\Rightarrow HD = DH_3 = \frac{6}{2} = 3$

6) $HC = HD + CD = 3 + 6 = 9$

7) $AN_3 = 2DH_3 = 6 \Rightarrow AB = 12$

10) $\frac{AB}{CH} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$

Ответ: $\frac{4}{3}$

5.



$\frac{AD}{AC} = \frac{1}{5}$
 $S_{AED} = ?$

1) $\triangle DEB$ и $\triangle DCB$ лежат на общем диаметре $AB \Rightarrow DEBC$ - вписанный 4-к

2) $\angle DEC = \angle DBC$; $\angle CAD = \angle BDC = 45^\circ$
 (вписанность) ($\angle C = 90^\circ$)

3) $\frac{AD}{AC} = \frac{AC - CD}{AC} = 1 - \frac{CD}{AC}$

4) из п. 2. $CD = CB = \sqrt{29} \Rightarrow 5) \frac{AD}{AC} = 1 - \frac{\sqrt{29}}{\frac{5}{2}\sqrt{29}} =$

$= 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

5) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{CB}{AC} = \frac{\sqrt{29}}{\frac{5}{2}\sqrt{29}} = \frac{2}{5} \Rightarrow \arctan\left(\frac{2}{5}\right) = \alpha$

6) $S_{AED} = AE \cdot ED \cdot \sin \alpha$ или $\frac{AE}{AD} = \cos \alpha$; $\frac{ED}{AD} = \sin \alpha$

$AE = \cos \alpha \cdot AD$; $ED = \sin \alpha \cdot AD$

7) $S_{AED} = AD^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \left(\frac{3}{2}\sqrt{29}\right)^2 \cdot \sin\left(\arctan\left(\frac{2}{5}\right)\right) \cdot \cos\left(\arctan\left(\frac{2}{5}\right)\right)$

Ответ: $\frac{AD}{AC} = \frac{3}{5}$; $S_{AED} = \frac{9}{4} \cdot 29 \cdot \sin\left(\arctan\left(\frac{2}{5}\right)\right) \cdot \cos\left(\arctan\left(\frac{2}{5}\right)\right)$

3.2

$$\frac{8 \cdot 12}{2} = 8 \cdot 6 = 48$$

$$\begin{array}{r} \times 29 \\ 25 \\ \hline 145 \\ + 58 \\ \hline 725 \end{array} \quad \begin{array}{r} 725 \\ 9 \\ \hline 6525 \end{array}$$

$$\begin{cases} \frac{y}{x} = 1 \\ \frac{y}{x} = 4 \\ 2y + x^2 = 9 \end{cases}$$

$$1) y = x \rightarrow 2x + x^2 - 9 = 0 \\ x^2 + 2x - 9 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = \\ = 4 - 4 \cdot 1 \cdot (-9) = \\ = 40$$

$$\frac{ED}{AE} = \frac{2}{5} \quad \frac{-6525 \pm 4116}{6409} \\ 6409$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{40}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 \cdot 10}}{2} = \\ = \frac{-2 \pm 2\sqrt{10}}{2} = \boxed{-1 \pm \sqrt{10}}$$

$$AE^2 + DE^2 = \frac{9}{4} - 29$$

$$AE \approx 8$$

$$DE \approx 12$$

$$2) y = 4x$$

$$AE^2 + \frac{4}{25}AE^2 = \frac{9}{4} - 29$$

$$\boxed{y = -1 \pm \sqrt{10}}$$

$$x^2 + 8x - 9 = 0$$

$$(x+9)(x-1) = 0$$

$$AE = \sqrt{\frac{9}{4} \cdot 29 - \frac{4}{25} - 1}$$

$$x = -1 + \sqrt{10} \quad y = -1 + \sqrt{10} \cdot x$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x = -9 \rightarrow y = -36 \times \\ x = 1 \rightarrow y = 4 \checkmark \end{array}}$$

$$\times x = -1 - \sqrt{10} \quad y = -1 - \sqrt{10} \cdot x$$

$$\frac{9 \cdot 29}{4} - \frac{4}{25} - 1 = \frac{9 \cdot 29 \cdot 25 - 4 \cdot 4 - 100}{100} =$$

выводка:

$$4 - 2 = \sqrt{4 \cdot 1} \rightarrow 2 = 2 \quad -36 + 18 = \sqrt{36 \cdot 9} =$$

$$8 + 1 = 9$$

$$1 - 18 = 6 \cdot 3 \times$$

$$-1 + \sqrt{10} - 2(-1 + \sqrt{10}) = \sqrt{(-1 + \sqrt{10})(-1 + \sqrt{10})}$$

$$-1 + \sqrt{10} + 2 - 2\sqrt{10} = -1 + \sqrt{10}$$

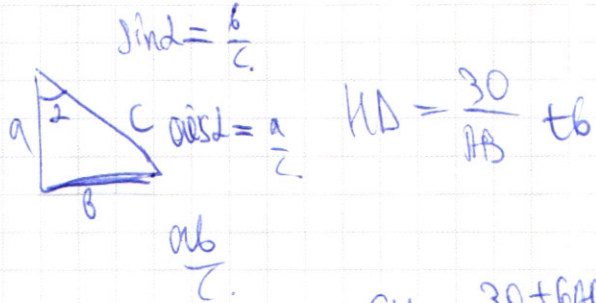
$$\underline{4 - \sqrt{10} = -1 + \sqrt{10} \times}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3.3

$$x = -1 - \sqrt{10}$$

$$y = -1 - \sqrt{10}$$



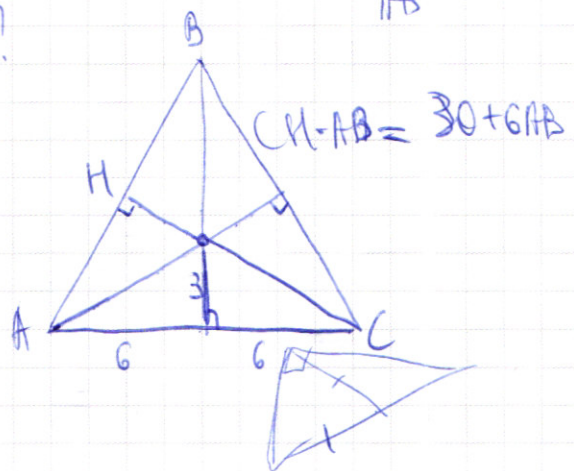
$$h \cdot d = \frac{30}{AB} + 6$$

$$CH = \frac{30 + 6AB}{AB}$$

$$-1 - \sqrt{10} - 2(-1 - \sqrt{10}) = -1 - \sqrt{10} ?$$

$$-1 - \sqrt{10} + 2 + 2\sqrt{10} = -1 - \sqrt{10}$$

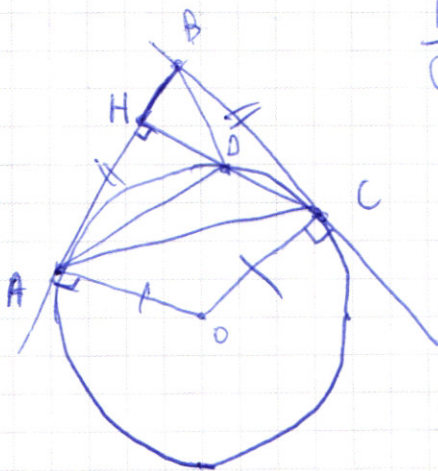
$$1 + \sqrt{10} = -1 - \sqrt{10} \quad \times$$



Ответ: $x = 1; y = 1$

4

$$CH = \frac{30}{AB} + 6$$



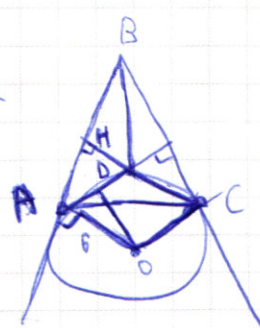
$$\frac{AB}{CH} = ? \quad \text{нум} \quad S_{AHD} = 15; R = 6$$

$$HD^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = 6^2$$

$$\frac{HD \cdot AB}{2} = 15$$

$$CH = CD + DH$$

$CD = ?$



$$x \cdot y = 60$$

$$\frac{x}{y} = ?$$

$$(CH - 6) \cdot AB = 30$$

$$CH \cdot AB - 6AB = 30$$

ADCO - параллелограмм

$$CD = \frac{y}{2} \quad HD = CH - 6$$

$$CH = DH + 6$$

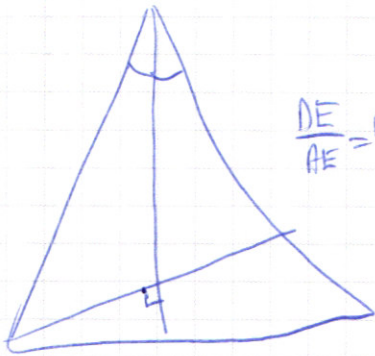
2.

$$\sin 2 \cdot \cos = \frac{AE \cdot ED}{AD^2}$$

$$a + 2a > b$$
$$b + a > 2a$$
$$b + 2a > a$$

$$3a > b$$
$$b > a$$
$$b > -a$$

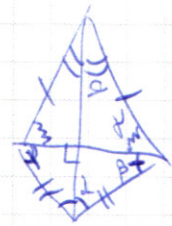
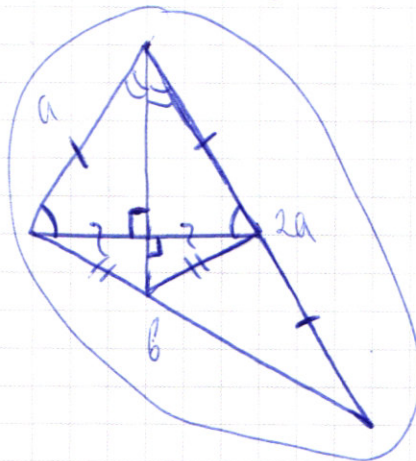
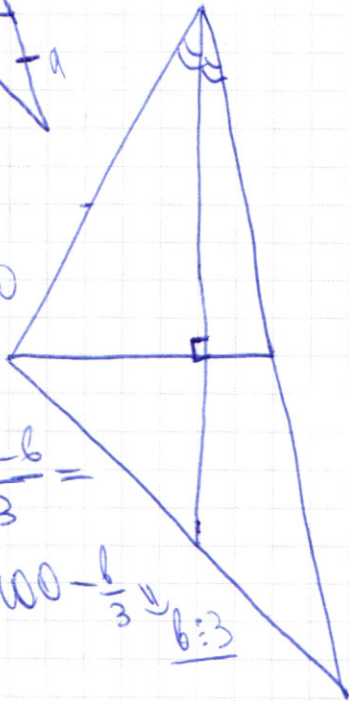
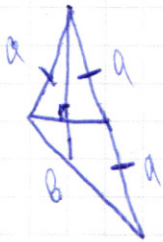
$$a > \frac{b}{3}$$
$$a < b$$
$$a < -b$$



$$\frac{DE}{AE} = \cos \alpha$$



$$a > b$$
$$a < -b$$



$$\angle + \beta = 90^\circ$$
$$\alpha + \gamma = 90^\circ$$

$$b + 2a = 300$$

$$a = \frac{300 - b}{3} =$$

$$= 100 - \frac{b}{3} \Rightarrow b = 3$$

$$b^2 + a^2 = 4a^2$$

$$b^2 = 3a^2$$

$$b = \sqrt{3}a$$

$$b + 2a = 300$$

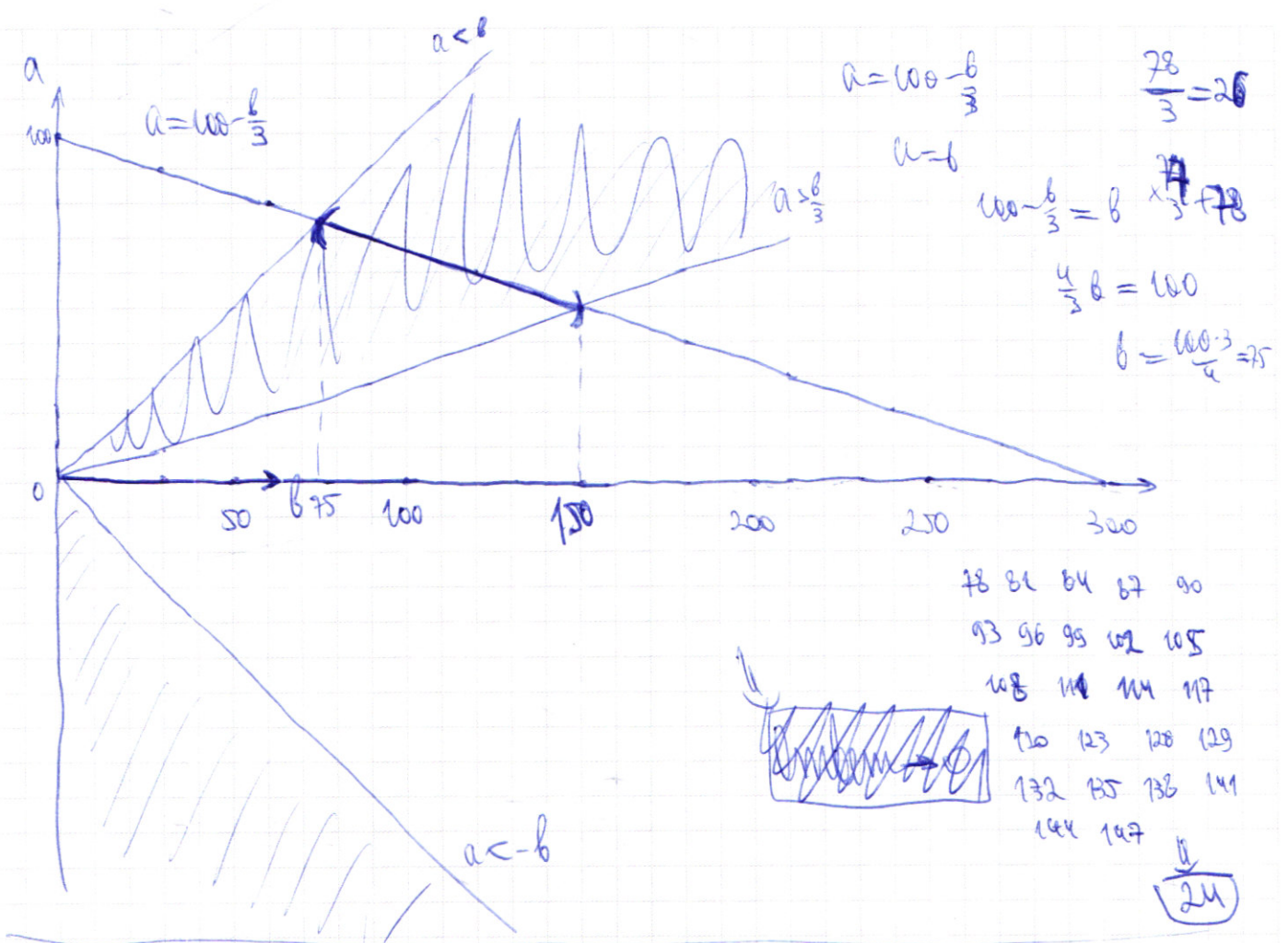
$$\sqrt{3}a + 2a = 300$$

$$(\sqrt{3} + 2)a = 300$$

$$a = \frac{300}{2 + \sqrt{3}}$$

$$a = 100 - \frac{b}{3}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



③

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy} \\ 2y + x^2 = 9 \end{cases}$$

$$(y - 2x)^2 = xy$$

$$y^2 - 4xy + 4x^2 = xy$$

$$y^2 - 5xy + 4x^2 = 0 \quad | : x^2$$

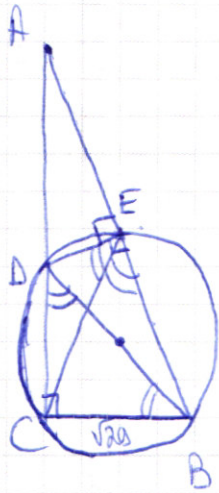
$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 5\frac{y}{x} + 4 = 0$$

$$t^2 - 5t + 4 = 0$$

$$(t - 1)(t - 4) = 0$$

$t = 1 \Rightarrow \frac{y}{x} = 1$
 $t = 4 \Rightarrow \frac{y}{x} = 4$

5.



$$\frac{AD}{AE} = \frac{AC - CD}{AE} = 1 - \frac{CD}{AE} =$$

$$= 1 - \frac{\sqrt{29}}{\frac{5}{2}(\sqrt{29})} = 1 - \frac{2}{5} = \boxed{\frac{3}{5}}$$

$$\frac{AE \cdot ED}{2} = ?$$

$$AD = AC - CD =$$

$$= \frac{\sqrt{29}}{2} \sqrt{29} - \sqrt{29} =$$

$$= \frac{3}{2} \sqrt{29}$$

$$\sqrt{29} \quad 29 + 29 = D^2$$

$$58 = D^2 \rightarrow D = \sqrt{58}$$

$$EB^2 + ED^2 = 58$$

$$EA^2 + ED^2 = \frac{9}{4} \cdot 29$$

$$\frac{9}{4} \cdot 29$$

$$25 \cdot 29 + 29 = (EA + EB)^2$$

$$EA^2 + EB^2 + 2EA \cdot EB = 58 + \frac{9}{4} \cdot 29$$

$$EA^2 + 2EA \cdot EB + EB^2 = 29(25 + 1)$$

$$2ED^2 - 2 \cdot EA \cdot EB = 29(2 + \frac{9}{4} - 25 - 1)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

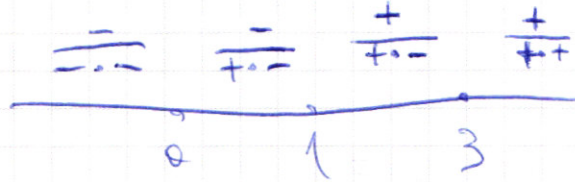
1.

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x-1|}{4x^2 - 12x + |x| \cdot (x-3)} \leq 0$$

уравн-е:
 ~~$x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$~~

$x \geq 0$

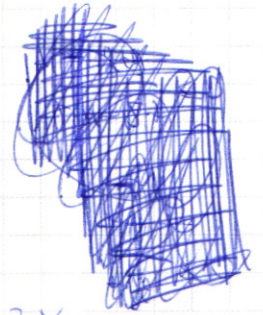
$x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$



1) $x \geq 3$

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4x + 4}{4x^2 - 12x + x^2 - 3x} \leq 0$$

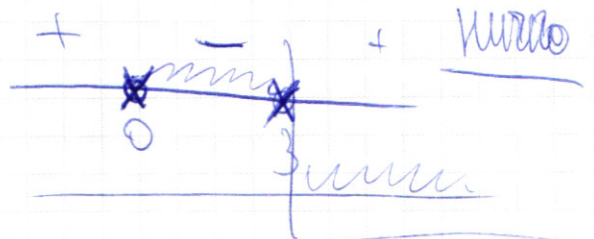
$$\frac{x^2 - 6x + 9}{5x^2 - 15x} \leq 0$$



$$\frac{(x-3)(x-3)}{(5x)(x-3)} \leq 0 \quad \boxed{x \neq 3}$$

$x^2 - 3x$

$$\frac{x-3}{x} \leq 0$$



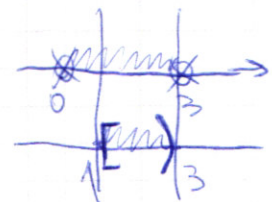
2) $1 \leq x < 3$

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4x + 4}{4x^2 - 12x + 3x - x^2} \leq 0$$

$$\frac{x^2 - 6x + 9}{3x^2 - 9x} \leq 0$$

$\boxed{x \neq 3} \quad \boxed{x \neq 0}$

$$\frac{(x-3)^2}{x(x-3)} \leq 0$$



4.2

$$\frac{AB}{CH} = ?$$

$$\begin{array}{r} 20736 \\ - 14400 \\ \hline 6336 \end{array}$$

$$89 = 72$$

$$HD = CH - 6$$

$$HD^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = 6^2$$

$$HD \cdot AB = 30 \rightarrow HD = \frac{30}{AB}$$

$$\left(\frac{30}{AB}\right)^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = 6^2$$

$$\begin{array}{r} 144 \quad 4 \cdot 3 \cdot \sqrt{11} = \\ \times 144 \\ \hline 576 \\ + 576 \\ \hline 1152 \\ + 144 \\ \hline 1300 \end{array} = 12 \cdot \sqrt{11}$$

$$\begin{array}{r} + 768 \\ + 768 \\ \hline 1536 \\ + 1536 \\ \hline 3072 \end{array}$$

$$6080 = 6400$$

$$\frac{900}{AB^2} + \frac{AB^2}{4} = 36$$

$$444 = 12^2 = 20736 = (2^2 \cdot 3)^2 = 2^4 \cdot 3^2$$

$$\begin{array}{r} \times 3600 \\ \hline 14400 \end{array}$$

$$\frac{900 \cdot 4 + AB^2 \cdot AB^2}{4AB^2} = 36$$

~~2^3 \cdot 3^2~~

$$f = \frac{2^4 \cdot 3^2 \pm (2^3 \cdot 3 \cdot \sqrt{11})}{2} =$$

$$= \frac{2^3 \cdot 3^2 \pm 2^2 \cdot 3 \cdot \sqrt{11}}{2} \quad AB^2 \neq$$

$$900 \cdot 4 + AB^4 = 36 \cdot 4AB^2 \quad 6^2 \cdot 2^2$$

$$AB^4 - (6 \cdot 2)^2 AB^2 + (30 \cdot 2)^2 = 0$$

$$6336 = 2 \cdot 3168 =$$

$$t^2 - 12^2 t + 60^2 = 0$$

$$= 2 \cdot 2 \cdot 1584 =$$

$$t^2 - 144t + 3600 = 0$$

$$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 792 =$$

$$\sqrt{6336} =$$

$$\sqrt{6336} =$$

$$f = 6^2 \cdot 2^2 =$$

$$= (144)^2 - 4 \cdot 3600 =$$

$$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 396 =$$

$$= 2^3 \cdot 3 \cdot \sqrt{11}$$

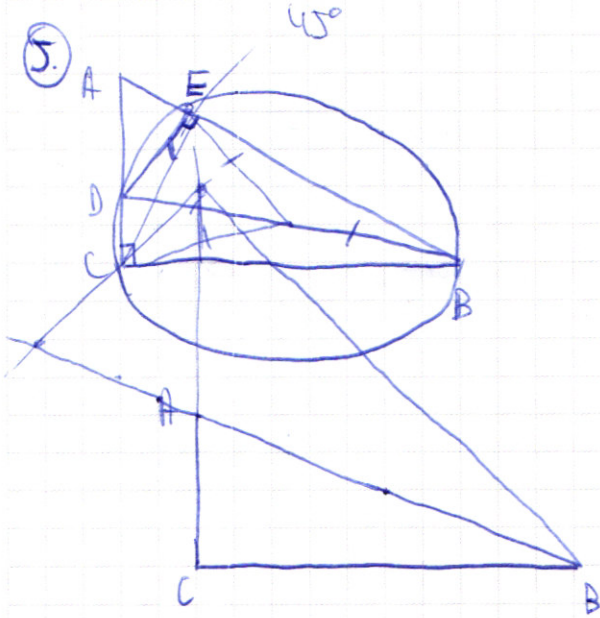
$$\begin{array}{r} 3168 \mid 2 \\ \hline 2 \quad 11 \quad 14 \quad 16 \\ - 20 \quad 14 \quad 16 \\ \hline 16 \end{array}$$

$$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 198 =$$

$$\begin{array}{r} 792 \mid 2 \\ \hline 6 \quad 19 \quad 12 \\ - 12 \quad 15 \quad 16 \\ \hline 12 \end{array}$$

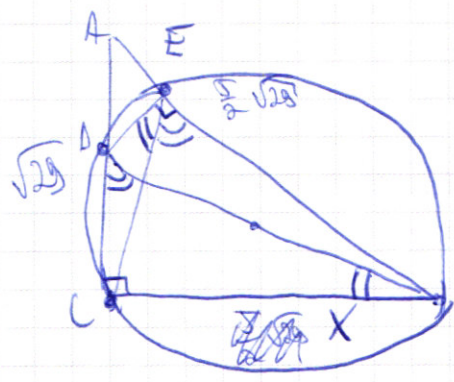
$$= 2^6 \cdot 99 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 11$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$\frac{AD}{AC} = ?$ и $S_{AED} = ?$ нум
 $AC = \sqrt{29}$
 $BC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$
 $\angle CED = 45^\circ$

$1 - \frac{\sqrt{21}}{4}$



$\frac{AD}{AC} = \frac{AC - CD}{AC} =$

$= 1 - \frac{CD}{AC} =$

$= 1 - \frac{\sqrt{29} \cdot \frac{\sqrt{21}}{4}}{\sqrt{29}} =$

$= 1 - \frac{\sqrt{21}}{4}$

$x^2 + 29 = \left(\frac{5}{2}\sqrt{29}\right)^2$

$x^2 + 29 = \frac{25}{4} \cdot 29$

$x^2 = 29\left(\frac{25}{4} - 1\right)$

$x^2 = 29\left(\frac{21}{4}\right)$

$x = \sqrt{29} \cdot \frac{\sqrt{21}}{2} = CD$