МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 15

ШИФР ________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\left(\frac{(x-5)^2+4}{|x-5|}-4\right)(|x-4|+|x-6|-2) \leqslant 0.$$

2. [3 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+\sqrt{x^2-25y^2}=50, \\ 5y+\sqrt{x^2-25y^2}=1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Биссектрисы внутреннего и внешнего угла A треугольника ABC пересекают прямую BC в точках M и N соответственно. Окружность, описанная вокруг треугольника AMN, касается стороны AB в точке A. Найдите радиус окружности, угол ACB и площадь треугольника ABN, если известно, что $AB=3$, $BM=1$.

4. [5 баллов] Вписанная окружность остроугольного треугольника ABC касается сторон AC и AB в точках E и D. Точка Y – основание перпендикуляра, опущенного из точки E на AB, а X – вторая точка пересечения EY со вписанной окружностью треугольника ABC. Найдите радиус этой окружности, если площадь треугольника AXD равна 12, а $5AD = 6EY$.

5. [5 баллов] На доске выписано $10n$ последовательных натуральных чисел ($n \in \mathbb{N}$). Из них выбираются три попарно различных числа, среди которых ровно одно кратно 2 и ровно одно кратно 5. Известно, что можно составить ровно 5 112 таких троек. Чему равно n?

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} 2y+3x \geqslant |2y-3x|, \\ y \leqslant -2x+16, \\ x^2-12y+y^2+16 \geqslant 0 \end{cases}$$

7. [5 баллов] Найдите количество шестизначных чисел, обладающих следующим свойством: сумма остатков от деления числа на некоторые две последовательные степени числа десять равна 1234.

Задача 7.

Число 1234 представимо в виде суммы как $\overline{abcd} + \overline{bcd}$, ~~и~~ непредставимо никакой другой суммой двух чисел, в которой количество знаков первого числа на 1 больше, чем у второго, значит, некоторые степени числа 10 - это 10^3 и 10^4.

$1234 = a + 2b + 2c + 2d$.

Получить нечетное число в разряде десятков невозможно без добавления единицы из предыдущего разряда, значит, ~~[illegible]~~ $d > 5$.

~~[illegible]~~

$d = 7$.		$d = 7$
$c = 1$	или	$c = 1$
$b = 1$		$b = 6$
$a = 1$.		$a = 0$.

Итак, ~~[illegible]~~ свойством, указанным в задаче, обладают числа, последние 4 цифры которых являются указанными выше. Первые 2 цифры у таких чисел могут быть любыми, ~~[illegible]~~ вариантов выбрать их для каждого набора - $9 \cdot 10 = 90$ вариантов.

Итого чисел - $90 \cdot 2 = 180$.

Ответ: 180.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(x-5y)(x+5y)$ $\quad x \quad 29+20 \quad 29-20$

$AC^2 = AB^2 - (BM+MC)^2$

$x^2-198x+4901=0$

$39204 - 19604 = 19600$

$AC^2 = 9-(MC+1)^2$ $\quad 198 \cdot 198 = 1584, 1782, 198, 39204$

$(5y+49-5y)$ $\quad D = 198^2 - 4901 \cdot 4$

$29 \pm \sqrt{49 \cdot 9}$, 140

$\sqrt{49} \cdot \sqrt{9}$

$(10y+49)$ $\quad x^2 - 99 \cdot 2x + 4900 - 1 = 0$

$29 \pm 7 \cdot 3$

$x^2 - 99 \cdot 2x + 70^2 - 1$ $\quad 70 \cdot 70 = 4900$

$29+21=50$

$$\left(\frac{(x-5)^2+4}{|x-5|} - 4\right)(|x-4|+|x-6|-2) \leq 0$$

$169 \quad 29$

$39204 - 19604 = 19600 = 140^2$

$4901 \cdot 4 = 19604$

$3 - MC - 1$

$49 \cdot 49 = 441, 196, 2401, 2500$

$xy \leq 0$ если $(2-MC)($

$x \leq 0 \quad y \geq 0$

$x_{1,2} = \frac{198 \pm 140}{2} = 169, 29$

$9 - MC + 1 \quad 9 + MC + 1$

$|x-5| = 2$

$(10-MC)(10+MC)$ $\quad 169 + 50 = 219$

$x \geq 0 \quad y \leq 0$ $\quad 4901$

$x-5=2 \quad x-5=-2$

$\frac{(x-5)^2+4}{|x-5|} - 4 \leq 0$ $\quad \frac{198+140}{2} = 169$ $\quad \left(\frac{50-x}{7}\right)^2 = 2x-49$

$(4-MC)(4+MC)$ $\quad 2(99+70)$

$\frac{(x-5)^2+4}{|x-5|} \leq 4$ $\quad 16 - MC^2 = AC^2$ $\quad \frac{x^2-10x+25+4}{|x-5|} \leq 4$ $\quad (50-x)^2 = 49(2x-49)$

$\frac{2(169)}{2}$ $\quad 2500 - 100x + x^2 =$

$x^2 - 10x + 29 \leq 4 \cdot |x-5| =$

$x^2 - 100x + 2500 = 98x - 49^2$ $\quad \frac{198-140}{2} = 29$

$x^2 - 100x + 2500 = 98x - 2401$

$x^2 - 198x + 4901 = 0$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

Задача 5.

Из $10n$ чисел $5n$ чисел кратны 2, $2n$ — кратны 5.

Чисел, не кратных ни 2, ни 5 в наборе $10n-5n-2n+n=$
$=4n$. (не $3n$, так как числа, кратные 10, мы считаем дважды)
Одна тройка состоит либо из чисел, одно из которых $\vdots 2$, другое — $\vdots 5$, а третье не делится ни на то, ни на другое, либо из чисел, одно из которых $\vdots 10$, а два других $\not\vdots 2$ и $\not\vdots 5$.

Вариантов выбрать 2 числа, 1 из которых $\vdots 2$, но $\not\vdots 5$, а другое $\vdots 5$, но $\not\vdots 2$: $(5n-n)\cdot(2n-n)=4n^2$.

Вариантов выбрать число, $\not\vdots 2$ и $\not\vdots 5$: $4n$.
Итого вариантов выбрать тройку чисел, в которой 1 число $\vdots 2$, другое — $\vdots 5$, а третье $\not\vdots 2$ и $\not\vdots 5$ — $4n^2\cdot 4n=$
$=16n^3$.

Вариантов выбрать тройку чисел, в котором 1 число $\vdots 10$, а два других $\not\vdots 2$ и $\not\vdots 5$, $n\cdot C_{4n}^2$, так как вариантов выбрать число $\vdots 10$ n, а два числа, $\not\vdots 2$ и $\not\vdots 5$, C_{4n}^2.
Итого троек:

$$16n^3+n\cdot\frac{4n!}{2!(4n-2)!}=16n^3+\frac{n\cdot 4n!}{2!(4n-2)!}=16n^3+\frac{n\cdot(4n-1)\cdot 4n}{2!}=$$

$$=16n^3+\frac{4n^2\cdot(4n-1)}{2}=16n^3+2n^2\cdot(4n-1)=16n^3+8n^3-2n^2=$$

$$=24n^3-2n^2=2n^2(12n-1)=5112.$$

$5112=2^3\cdot 3^2\cdot 71.$

$2\cdot 2^2\cdot 3^2\cdot 71=5112$

$2\cdot 6^2(12\cdot 6-1)=5112. \Rightarrow n=6.$

Ответ: 6.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

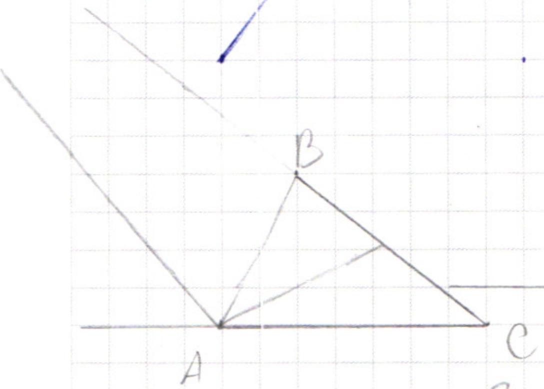
(заполняется секретарём)

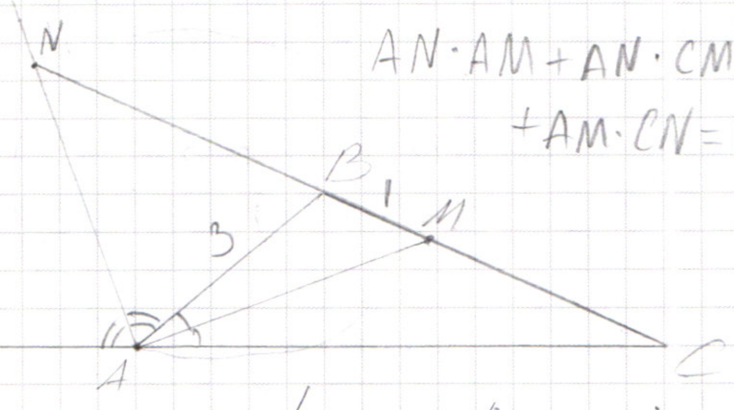
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{(AM-CM)}{AN+CN} = \frac{AN-CN}{AM+CM} = CN\cdot MC$$

$AN\cdot AM + AN\cdot CM +$

$+ AM\cdot CN = 0$





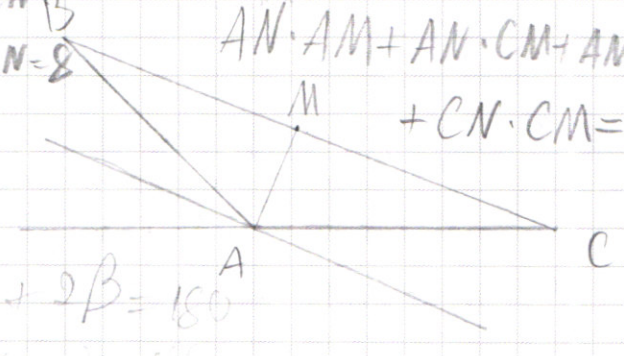
$(AN+CN)(AM+CM)$

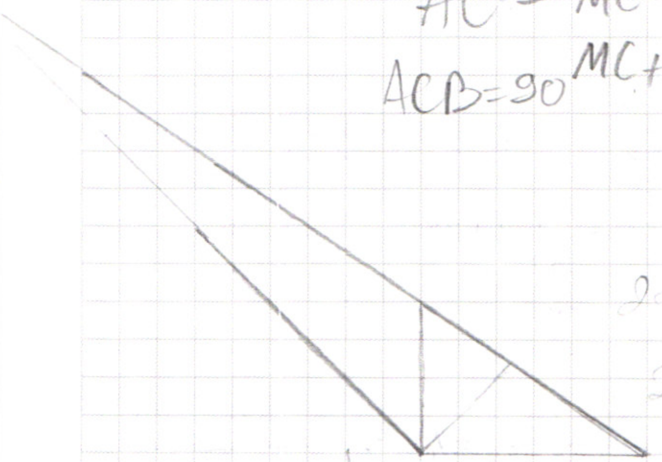
$AN\cdot AM + AN\cdot CM + AM\cdot CN +$

$+ CN\cdot CM = CN\cdot CM$

$AC^2 = MC\cdot CN$

$ACB = 90$ $MC+CN=8$



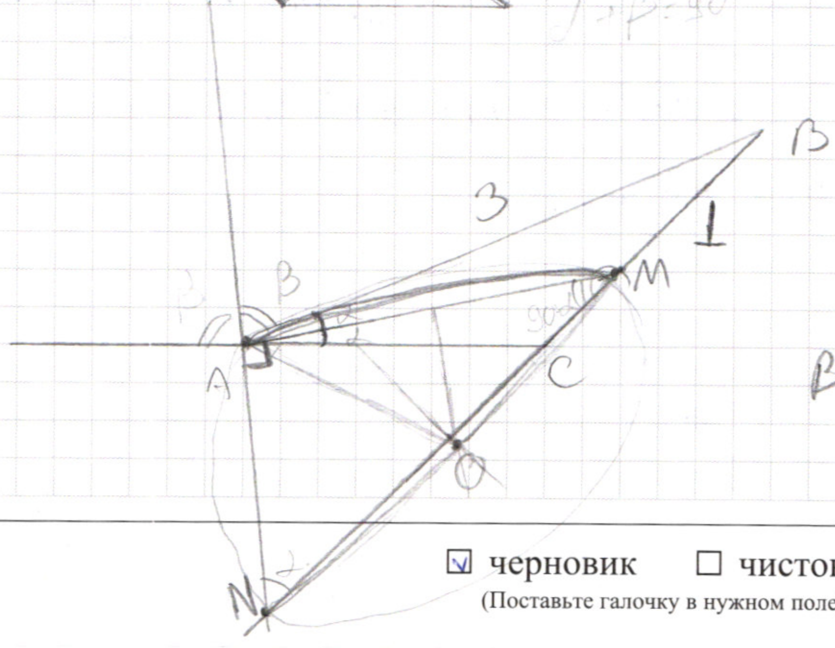


$2\alpha + 2\beta = 180$

$\alpha + \beta = 90$

$BM\cdot BN = AB^2 \Rightarrow BN = 9$

$MN = 8$



$\alpha + 90 - \alpha + x = 180$

$90 + x = 180$

$x = 90$

$BM\cdot BN = 3$

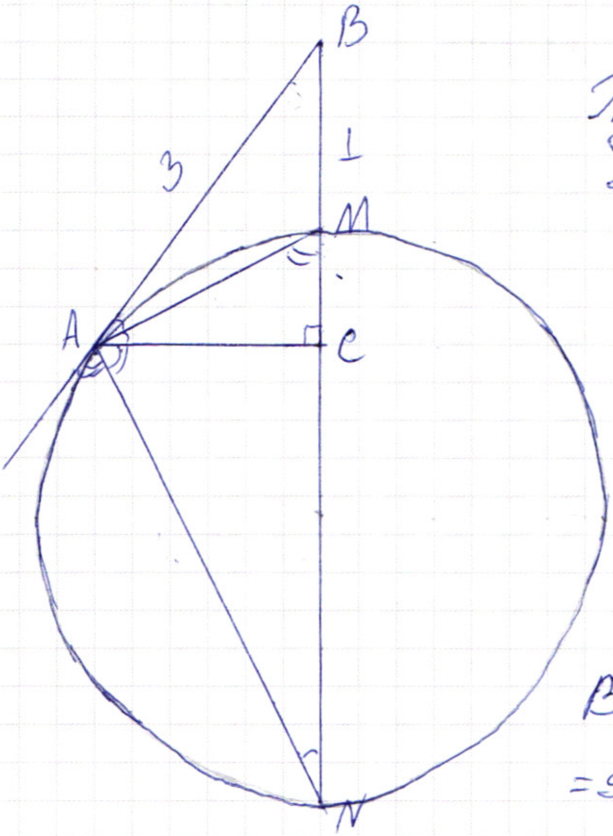
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

Задача 3.



Пусть $\angle BAM = \alpha$, $\angle CAN = \beta$.

$2\alpha + 2\beta = 180° \Rightarrow \alpha + \beta = 90° \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle NAM = 90°$.

$\angle AMN$ опирается на ту же дугу, что и угол, равный углу CAN, $\Rightarrow$

$\angle AMN = \beta$.

$\angle ANM$ опирается на ту же дугу, что и $\angle BAM \Rightarrow \angle ANM = \alpha$.

В $\triangle AMC$ $\angle MAC = \alpha$, $\angle AMC = \beta \Rightarrow \angle ACM = 90°$.

Степень точки B равна BA^2, а также $BM \cdot BN$.

$BA^2 = BM \cdot BN$

$3^2 = 1 \cdot BN \Rightarrow BN = 9$, $MN = 9 - 1 = 8$.

$\angle NAM = 90°$, опирается на дугу $MN \Rightarrow \smile MN = 180° \Rightarrow$ хорда MN – диаметр.

$MN = 8 \Rightarrow R = \frac{8}{2} = 4$.

~~[illegible]~~

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 2.

$$\begin{cases} x+\sqrt{x^2-25y^2}=50 \\ 5y+\sqrt{x^2-25y^2}=1. \end{cases}$$

$$\sqrt{x^2-25y^2}=50-x=1-5y$$

$$50-x=1-5y \Rightarrow x=5y+49,\ y=\frac{x-49}{5}.$$

$$x+\sqrt{x^2-25\left(\frac{x-49}{5}\right)^2}=50$$

$$\sqrt{x^2-(x-49)^2}=50-x$$

$$x^2-x^2+98x-2401=(50-x)^2$$

$$98x-2401=2500-100x+x^2$$

$$x^2-198x+4901=0.$$

$$D=198^2-4\cdot4901=39204-19604=19600=140^2$$

$$x_{1,2}=\frac{198\pm140}{2}=\left[\begin{array}{l}x_1=169\\x_2=29\end{array}\right.$$

Если $x=169$, то $\sqrt{x^2-25y^2}=50-169=-119$, а корень равняться отрицательному числу не может $\Rightarrow x=29$.

$$y=\frac{29-49}{5}=\frac{-20}{5}=-4$$

Ответ: $(29;-4)$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x+\sqrt{x^2-25y^2}=50 \\ 5y+\sqrt{x^2-25y^2}=1. \end{cases}$$

$x+a=50$

$5y+a=1$

$x=29$

$x-5y=49$

$\sqrt{x^2-25y^2}=50-x$

$5y=1+x-50$

$y=\frac{x-49}{5}$

$50-x=1-5y$

$5y+49=29$

$5y=29-49$

$25\left(\frac{x-49}{5}\right)^2$

$x=169$

$x=29$

$50-1+5y=x$

$\left(\frac{50-x}{7}\right)^2=2x-49$

$2\cdot 5y\cdot 49$

$2x-10y=98$

$169+a=50$

$5y+49=x$

$\sqrt{x^2-25y^2}=50-169=$

$5y=-20$

$y=\frac{-20}{5}$

$2(x-5y)=98$

$\sqrt{(5y+49)^2-25y^2}+5y=1.$

$x-5y=49$

$\frac{\cancel{25}(x-49)^2}{\cancel{25}}$

$\sqrt{\cancel{25y^2}+490y+49^2-\cancel{25y^2}}+5y=1.$

$\sqrt{490y+49^2}+5y=1$

$x=29$
$y=-4$

$x^2-98x+49^2$

$\cancel{x^2}-\cancel{x^2}+98x-49^2$

$\sqrt{49(10y+49)}+5y=1$

$98x-49^2$

$7\sqrt{10y+49}+5y=1.$

$\sqrt{49(2x-49)}$

$\sqrt{2x-49}=\sqrt{10y+49}$

$7\sqrt{2x-49}+x=50$

$2x-49=10y+49$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$9-AC^2=MC^2+2MC+1$.

$(3-(MC+1))(3+(MC+1))$

$2-MC \quad (2-MC)(4+MC)=8-MC^2=AC^2$.

1200   1099   214 | 12 $AM^2=8$

34   099   12 | 1 $2\sqrt{2}$

10   9.10   94   123456789 $AC^2+MC^2=(2\sqrt{2})^2$

1000   90 1117   213   10 1117   117   12   0   0617   617

234   $2\cdot n^2=2\cdot 6^2$ 100000   10000

10000   1000   6 $1^2+1^2=$ 10^3 10^4

$n=6$ 1111   1222 $2^2+2^2=8$

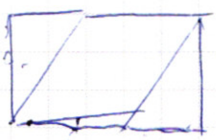
1200   34 $2\cdot 36$ 1200   34   1000   100   11 $2(2^2)$

1234 $2^3\cdot 3^2\cdot 71$

11112   5112 | 2 $\cancel{2^3 \cdot 8}$

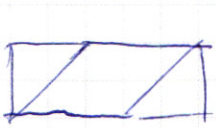
$24n^3-2n^2=5112$ 2556 | 2

$2n^2(12n-1)=5112$ 1117   117   1234   1278 | 2



639 | 3

1107   107   14   2556 | 2   1278   213 | 3   BC



$2\cdot 2^2$ 71 | 71

$800(239)=5112$ $2\cdot 71$

71   9   639

12   24   36   48   60 $AB^2-AC^2=BC^2$

1   3   5   7   9

$9-AC^2=(1+MC)^2$

$1^2+2MC+MC^2=9-AC^2$

☑ черновик   ☐ чистовик   Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле)   (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$CN \cdot MC = AM^2 - MC^2$

$9 =$

$AM^2 = CN \cdot MC + MC^2$

$CN + MC = 8$

$AM^2 = MC(CN + MC)$

$CN \cdot MC = AC^2$

$\cancel{180} - \alpha - \cancel{180} + \beta = \angle ABC$

$\frac{CN}{AC} = \frac{AC}{MC} \Rightarrow AC^2 = CN \cdot MC$

$AC \cdot CN \cdot \frac{1}{2} + AC \cdot CB \cdot \frac{1}{2}$

$\beta - \alpha = \angle ABC$

$AC^2 = AN^2 - CN^2$

$\frac{CN}{AC} = \frac{AN}{AM} = \frac{AC}{MC}$

$AC^2 + MC^2 = AM^2$

$MC = \frac{AC^2}{CN}$

$AM^2 = 8 \cdot MC$

$+2\beta = 180°$

$AC^2 = AM^2 - MC^2$

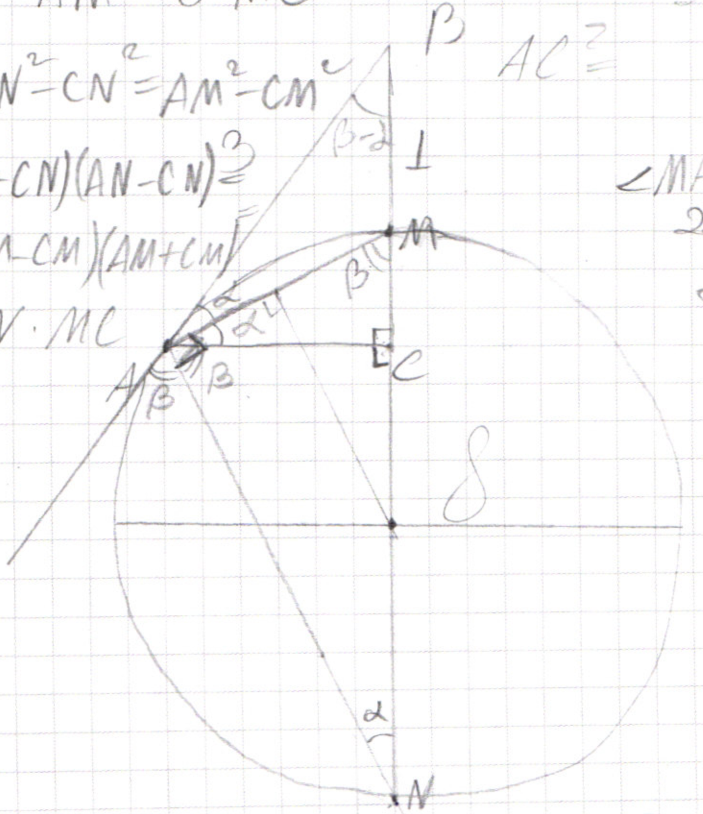
$AC^2 =$

$AN^2 - CN^2 = AM^2 - CM^2$

$(AN + CN)(AN - CN) =$

$= (AM - CM)(AM + CM) =$

$= CN \cdot MC$



$\frac{AM}{MC} = \frac{MN}{AM} \Rightarrow \frac{AC \cdot CN}{2} + \frac{AC \cdot CB}{2}$

$AM^2 = NM \cdot MC$

$\angle MAN = 90°$, т.к.

$2\alpha + 2\beta = 180° \Rightarrow$

$\alpha + \beta = 90° = \angle MAN$

$\frac{AC(CN + CB)}{2}$

$MC =$ $CN + MC = NM$

$MN = 8$ $MC(CN + MC) =$

$=$

$AB^2 = BM \cdot BN = 1 \cdot 9$

$BN = 9 \Rightarrow MN = 8$

4

$AN^2 = AC^2 + CN^2$

$AM^2 = AC^2 + MC^2$

$90 + \cancel{\alpha} + \beta - \cancel{\alpha} + \alpha = 180$

$90 + \beta + \alpha = 180$

$AM^2 = CN \cdot MC + MC^2$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

5n 4n чисел,
не кратных ни 2, ни 5

$10n - 5n - 2n$ $2k$ $5d$

5n чисел кратных 2

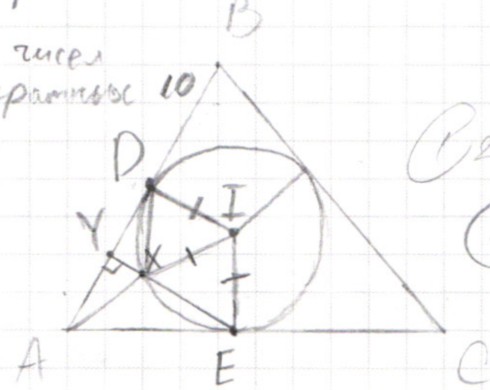
3n + n

10n

2n чисел кратных 5

$\vdots 2$ $\vdots 5$ 5n−1 2n−1

n чисел кратных 10



1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

2n 12 13 14 15 16 17 18 19 20

4 4 4 4 6

4n

$C_4^2 = \frac{4!}{2!\,2!}$

$\frac{3\cdot 4}{1\cdot 2} = 6$

$S_{AXD} = 12$

$S_{ADE} = EY \cdot AD \cdot \frac{1}{2}$

$5AD = 6EY$

$16n^3 + (2n^2 \cdot (4n-1)) = 5112$

C_4 22 тройки

$S_{AXD} = AD \cdot XY \cdot \frac{1}{2} = 12$

$16n^3 + 8n^3 - 2n^2 = 5112$ $n=1$

$AD \cdot XY = 24.$

C

$5n \cdot 2n$ $24n^3 - 2n^2 =$

$5n - n$ $2n - n$ $= 5112$

$AD = \frac{6EY}{5}$

$\frac{6EY \cdot XY}{5} = 24$

$4n \cdot n$ n

$16n^3 + \frac{\overset{2}{4}n^2 \cdot (4n-1)}{2}$

$4n^2 \cdot 4n$

$6EY \cdot XY = 120$

$16n^3 + n \cdot C_{4n}^2$

$16n^3 + n \cdot \frac{4n!}{2!\,(4n-2)!}$

$16n^3 + \frac{n \cdot \cancel{4n!} (4n-1) \cdot 4n}{2!\,\cancel{(4n-2)!}} = 5112$

$16n^3 + n \cdot (4n-1) \cdot 4n$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)