МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 13

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|}\leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 600 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases}x-2y=\sqrt{xy},\\ x+y^2=5.\end{cases}$$

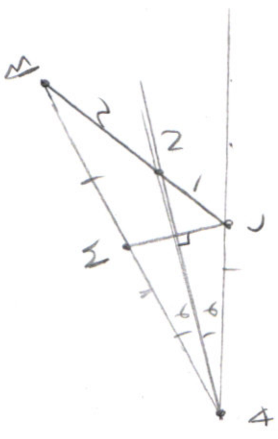
4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB:CH$, если площадь треугольника ABD равна 6, а радиус окружности равен 4.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE\perp AB$. Найдите отношение $AD:AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{7}$, $BC=2\sqrt{\frac{7}{3}}$, а $\angle CED=30^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases}|2x|+|y|+|4-2x-y|>4,\\ x^2-2x-4y+y^2\leqslant 0.\end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 18$, $1\leqslant y\leqslant 18$ и $f(x/y)<0$.



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №1

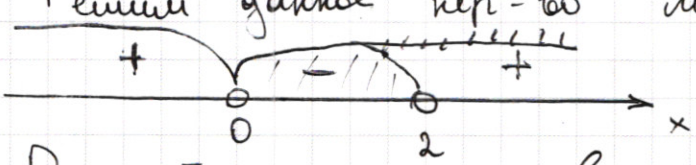
$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x||x-2|} \leq 0$$

1) Пусть $x<0$, тогда нер-во имеет вид:

$$\frac{x^2-6x+10+2x-6}{2x^2-4x+x^2-2x} \leq 0$$

$$\frac{x^2-4x+4}{3x^2-6x} = \frac{(x-2)^2}{3x(x-2)} \leq 0$$

Решим данное нер-во методом интервалов:

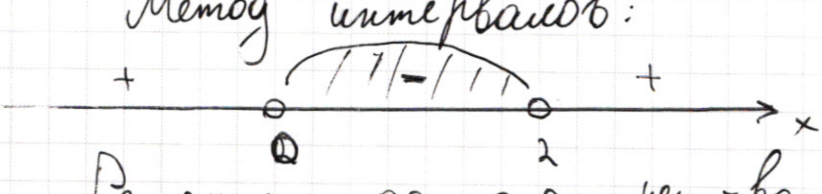


Решени~~ем~~ данного нер-ва при $x<0$ ~~являются~~ нет

2) Пусть $0 \leq x < 2$, тогда нер-во имеет вид:

$$\frac{x^2-6x+10+2x-6}{2x^2-4x-x^2+2x} = \frac{(x-2)^2}{x^2-2x} = \frac{(x-2)^2}{x(x-2)} \leq 0$$

Метод интервалов:



Решением данного нер-ва при $0 \leq x < 2$ являются $x \in (0;2)$.

3) Пусть $2 \leq x < 3$, тогда нер-во имеет вид:

$$\frac{x^2-6x+10+2x-6}{2x^2-4x+x^2-2x} = \frac{(x-2)^2}{3x(x-2)} \leq 0$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

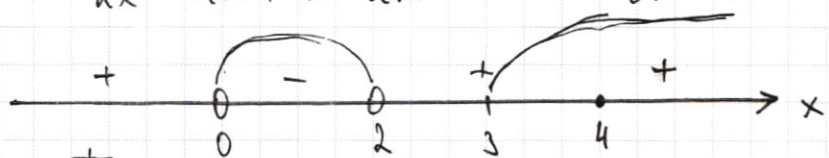
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Метод интервалов:

Пересечений множеств нет $\Rightarrow$ решений при $2 \le x < 3$ тоже нет

4) Пусть $x \ge 3$, тогда нер-во имеет вид:

$$\frac{x^2-6x+10-2x+6}{2x^2-4x+x^2-2x} = \frac{x^2-8x+16}{3x^2-6x} = \frac{(x-4)^2}{3x(x-2)} \le 0$$



Пересечений нет $\Rightarrow$ решений при $x \ge 3$ тоже нет.

5) Тогда решением данного нер-ва есть множество $x \in (0;2)$

Ответ: $x \in (0;2)$.

Задача №4.

Чертёж (рис.1). Пусть $\angle OBC = \alpha$. Тогда $\angle ABO = \alpha$, $\angle ACH = \alpha$, $\angle OCA = \angle OAC = \alpha$. $OA \perp AB$ (касат. к окр.), $CH \perp AB$ (высота в тр-ке). Тогда отсюда следует, что $\triangle OBA \sim \triangle AHC$ (по 2-м углам). Из подобия следует:

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

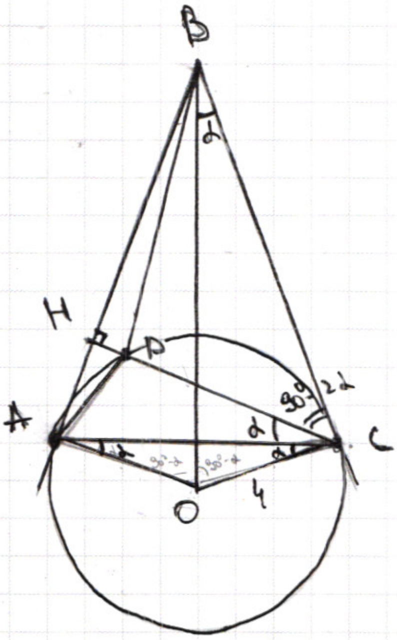


рис.1

$$\frac{OA}{AB} = \frac{4}{AB} = \frac{AH}{CH}$$

$$\frac{CH}{AB} = \frac{AH}{4} \quad (1)$$

По теореме о секущих к окр-ти можно записать:

$$AH^2 = HD \cdot CH \quad (2)$$

Площадь тр-ка ABD:

$$\frac{1}{2} HD \cdot AB = 6 \iff HD = \frac{12}{AB} \quad (3)$$

Подставим (3) в (2)

$$AH^2 = \frac{12}{AB} \cdot CH \quad (4)$$

Подставим (1) в (4):

$$16 \frac{CH^2}{AB^2} = 12 \frac{CH}{AB}$$

$$\frac{CH}{AB} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} \iff \frac{AB}{CH} = \frac{4}{3}$$

Ответ: $\frac{AB}{CH} = \frac{4}{3}$.

Задача №5.

1) По теореме Пифагора найдём AB:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 7 + 4 \cdot \frac{7}{3} = \frac{49}{3}$$

$$AB = \frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$$

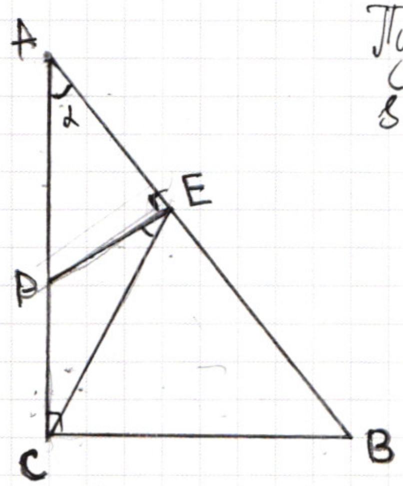
☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



~~Пусть $\angle CAB = \alpha$. Тогда $\sin\alpha$:~~

$$\cancel{\sin\alpha = \frac{BC}{AB} = 2\cdot\sqrt{\frac{7}{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{7\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}}$$

~~Также для $\triangle ADE$:~~

$$\cancel{\sin\alpha = \frac{DE}{AD} = \frac{2\sqrt{7}}{7}}$$

Пусть $\angle CAB = \alpha$. Тогда $\cos\alpha$:

$$\cos\alpha = \frac{AC}{AB} = \sqrt{7}\cdot\frac{3}{7\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{3}{7}}$$

Также для $\triangle ADE$:

$$\cos\alpha = \frac{AE}{AD} = \sqrt{\frac{3}{7}}$$

По теореме синусов для $\triangle ACE$:

$$\frac{AE}{\sin(180^\circ - 120^\circ - \alpha)} = \frac{AC}{\sin 120^\circ}.$$

$$AE = AC\,\frac{\sin(120^\circ+\alpha)}{\sin 60^\circ} = AC\,\frac{\sin 60^\circ\cos\alpha + \cos 60^\circ \sin\alpha}{\sin 60^\circ} =$$

$$= AC\cdot(\cos\alpha + ctg 60^\circ\cdot\sin\alpha) = AC\cdot\left(\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\sin\alpha\right).$$

Из $\triangle ABC$:

$$\sin\alpha = \frac{BC}{AB} = 2\cdot\sqrt{\frac{7}{3}}\cdot\frac{3}{7\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$$

Тогда:

$$AE = AC\cdot\left(\sqrt{\frac{3}{7}} + \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{2\sqrt{7}}{7}\right) = AC\cdot\left(\frac{3\sqrt{3}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{7}}\right) =$$

$$= AC\cdot\frac{5}{3}\sqrt{\frac{3}{7}}.$$

Подставим получившееся в выражение для косинуса:

$$\cos\alpha = \frac{AE}{AD} = \frac{AC}{AD}\cdot\frac{5}{3}\sqrt{\frac{3}{7}} = \sqrt{\frac{3}{7}} \iff \frac{AE}{AD} = \frac{3}{5}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) Площадь $\triangle$ ADE есть:

$\frac{1}{2} AE \cdot DE = S_\triangle$

$AE = AD \cos\alpha = AD\sqrt{\frac{3}{7}}$

$DE = AD \sin\alpha = AD \cdot \frac{2\sqrt{7}}{7}$

Тогда площадь тр-ка:

$S_\triangle = \frac{1}{2} AD^2 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{7} = \frac{\sqrt{3}}{7} AD^2$

$AD = \frac{5}{3} AC$

$S_\triangle = \frac{\sqrt{3}}{7} \cdot \frac{25}{9} AC^2 = \frac{\sqrt{3} \cdot 25}{\cancel{7} \cdot 9} \cancel{7} = \frac{25\sqrt{3}}{9}$.

Ответ: $\frac{AD}{AC} = \frac{3}{5}$; $S_\triangle = \frac{25\sqrt{3}}{9}$.

Задача №6

$$\begin{cases} |2x| + |y| + |4-2x-y| > 4 \\ x^2 - 2x - 4y + y^2 \le 0 \end{cases}$$

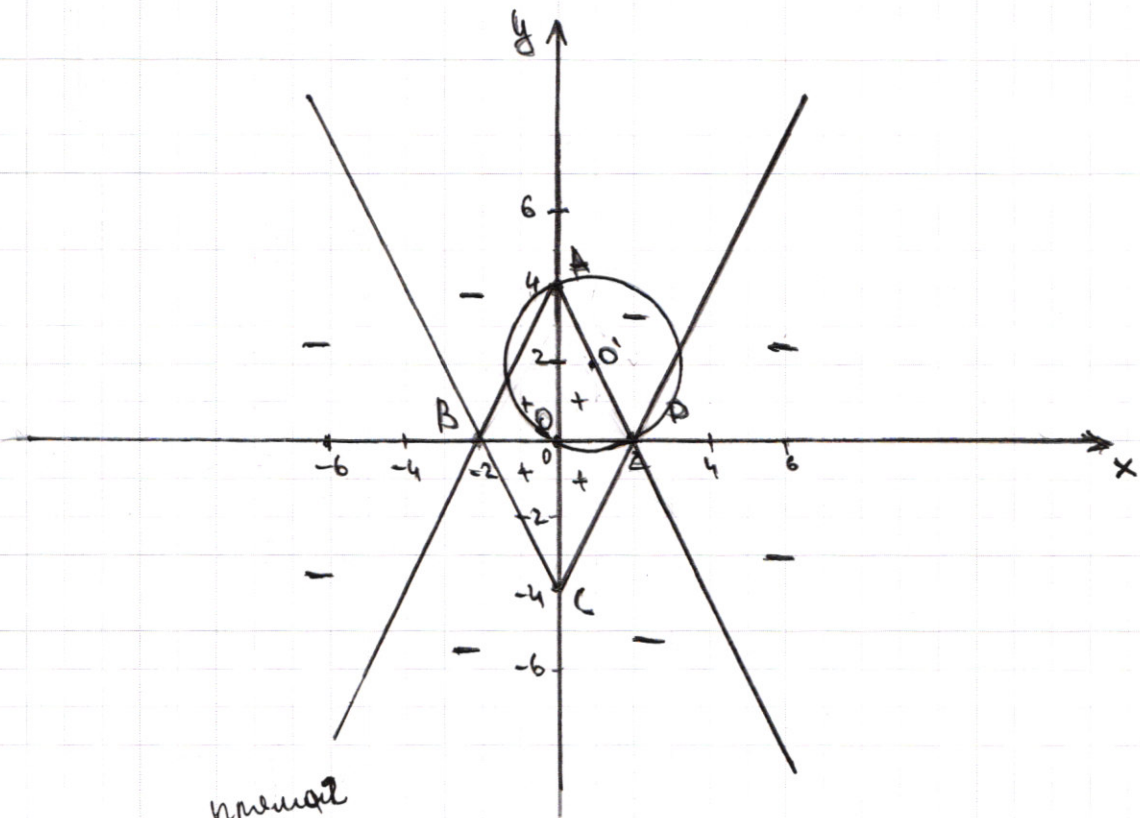
1) Проанализируем 1е выражение:

$|4-2x-y| > 4 - |2x| - |y|$

Построим прямую $4-2x-y=0$, затем $4-|2x|-y=0$, и затем $4-|2x|-|y|=0$. Данные графики функции делят плость на 5 "областей ~~полуплоскостей~~"

Расставим знаки в областях соответствующие знакам ответов, получившимися при подстановке некиих x и y из этой области.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



~~Уравнение~~ прямая $|4-2x-y|=0$ совпадает с прямой $4-2x-y=0$. Но эта прямая ($|4-2x-y|=0$) делит плоскость на 2 полуплоскости, знаки ответов в которых всегда "+", т.к. всё ур-ие заключено в модуль. Тогда ~~на~~ области решений, в которых стоит знак "−" (для $4-|2x|-|y|=0$) нам подходят, т.к. положительное число больше отриц. Также нас устраивают решения из области ромба ABCD, но не все, кроме площади тр-ка AOD и т. $(0;0)$. Также нас не устраивают ~~...~~ решения принадлежащие самому ур-ку $4-|2x|-|y|$ (~~Вз~~ при

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Этих значениях ~~у~~ возникает равенство, а по условию строго больше должно быть).

2) Проанализируем 2-е выражение:

$$x^2-2x-4y+y^2\leq 0$$

$$x^2-2x+1+y^2-4y+4\leq 5$$

$$(x-1)^2+(y-2)^2\leq 5.$$

Перед нами функция круга ~~(точка его~~ радиуса $\sqrt{5}$ $(\approx 2,3)$ с центром в точке $(1;2)$. Всё решение, что внутри круга, удовлетворяют нер-ву.

~~Круга~~ Точки O, D и A лежат на круге, это можно легко проверить с помощью теоремы Пифагора.

3) Тогда искомая площадь фигуры есть площадь круга минус площадь тр-ка AOD (т.к. решения в этой области не удовлетворяют 1-му нер-ву):

$$S=\pi\cdot(\sqrt{5})^2-\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2=5\pi-4.$$

Ответ: $S=5\pi-4$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

☐ черновик ☐ чистовик

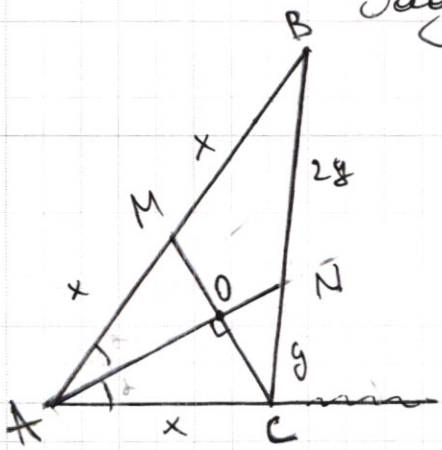
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 5г



Дано: $AC + AB + BC = 600$.
AN - биссектриса, CM - медиана.

Решение:

1) ~~AC = AM~~

$\triangle AOC = \triangle AOM$ (по 2-м углам и стороне AO) $\Leftrightarrow AM = AC$.

2) $AM = BM \Leftarrow CM$ - медиана

3) По св-ву биссектрисы:

$$\frac{CN}{NB} = \frac{AC}{AB} = \frac{AC}{AM+MB} = \frac{1}{2}.$$

4) Тогда пусть $AC = x$, а $CN = y$.

Периметр тр-ка:

$$AB + BC + AC = 600$$

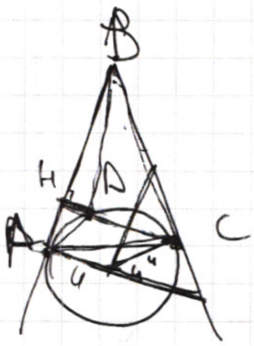
$$3x + 3y = 600$$

$$x + y = 200 \quad (1)$$

Тогда таких пар равно столько, сколько пар x и y удовлетворяющих равенству и $x \geq 1$, $y \geq 1$. Этих пар равно 199.

Примером для такого тр-ка является тр-ик со сторонами 2, 1, 597.

Ответ: 199 тр-ков.



$\frac{1}{2} HD \cdot AB = 6$

$HD \cdot \cancel{AB}\, CH = AH^2$

$BH^2 + CH^2 = AB^2$

$BH + AH = AB$

$HD = \frac{12}{AB}$

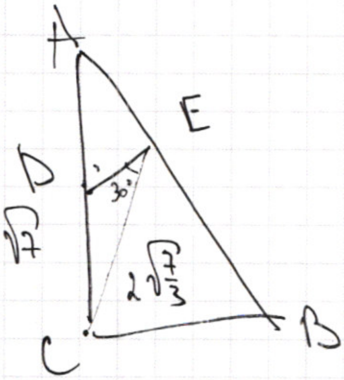
$\frac{12\, CH}{AB} = AH^2$

$CH^2 = \cancel{AB - BH}\ AH\,(AB + BH)$

$CH^2 = AH\,(2AB - AH)$

$CH^2 = 2AB\,AH - AH^2$

$CH^2 = \sqrt{12}\,\sqrt{ABCH} - \frac{12\,CH}{AB}$



$\sqrt{7 + 4 \cdot \frac{7}{3}} = \sqrt{\frac{49}{3}} = \frac{7}{\sqrt{3}}$

$\frac{\sqrt{7} \cdot \sqrt{3}}{} = \sqrt{\frac{3}{7}}$

$|4 - (2x + y)| > 4 - (|2x| + |y|)$

$(x + y)$ $\quad 4 - |2x|$ $\quad 4 - |2x| + |y| = 0$

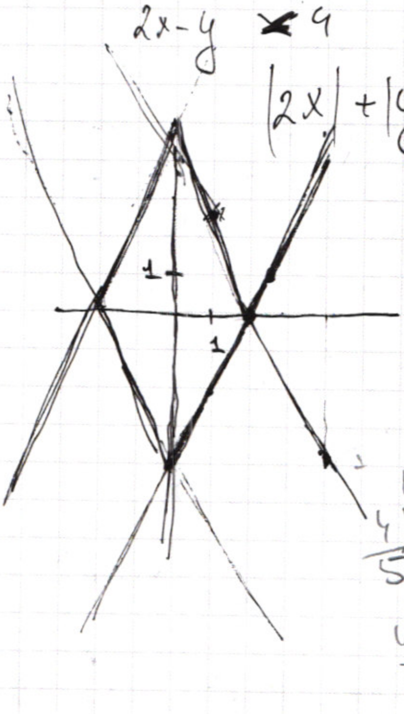
$2x - y \ \cancel{<}\ 4$

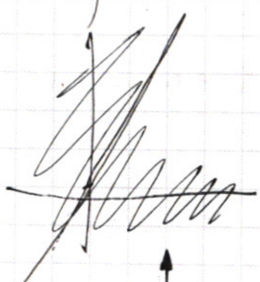
$|2x| + |y| > 4$

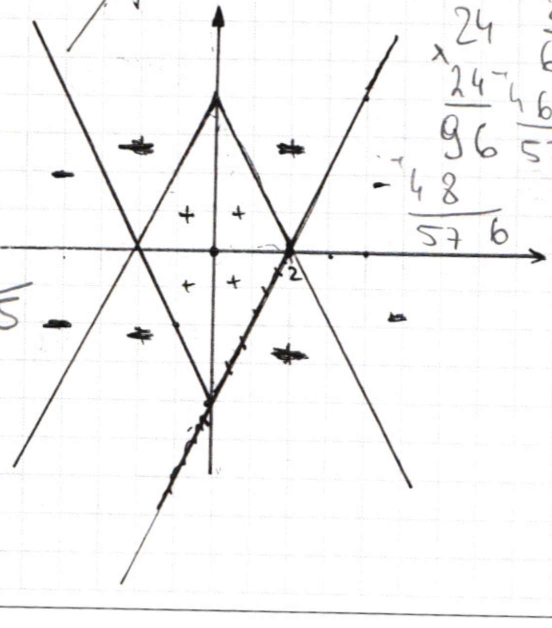
$4 - 2x + y = 0$

$|4 - 2x + y|$

$\times\,\frac{21}{21}$, 21, 42, 441







$\times\,\frac{23}{23}$, 69, 46, 529

$\times\,\frac{24}{24}$, 96, 48, 576

$\times\,\frac{225}{225}$, 1125, 450, 450, 50625

44, 44, 484

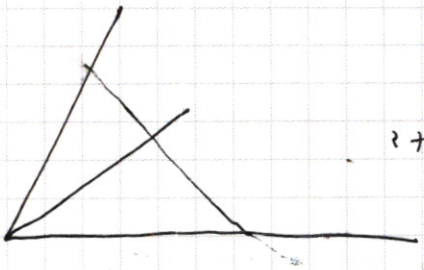
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

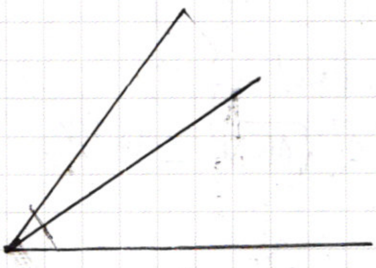
ШИФР

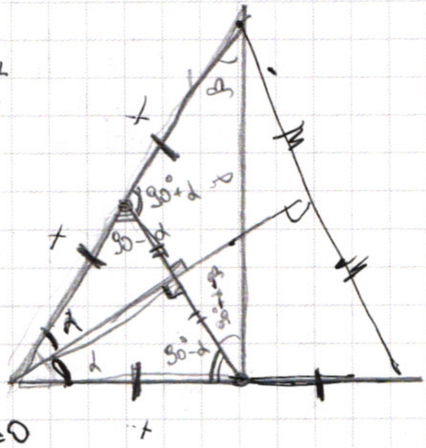
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$3x+y=600$ $6x>600$ $x>100$





$xy \geq 0$

$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy} \\ x+y^2=5 \end{cases}$

$x=5-y^2$

$x-2y\geq 0$

$x \geq 2y$

$x \geq 0$

$-5 \quad x-\sqrt{xy}-2y$

$-6 \quad 2x+y^2-2y-\sqrt{xy}-5=0$

$x\geq 0 \quad (y-1)^2+2x-\sqrt{xy}-6=0$

$36-31 \quad 5-y^2-2y=\sqrt{5y-y^3}$

$-7 \quad 5y-y^3-2y^2=y\sqrt{(5y-y^3)}$

$y\geq 0 \quad 5y-y^3-y\sqrt{5y-y^3)}-2y^2=0$

$0<x\leq 5$

$xy=x^2-4xy-4y^2$ $\quad y^2=5-x$

$5xy=x^2-4y^2$

$5xy=x^2-20+4x$ $\quad x=5-y^2$

$25y-5y^3=25-10y^2+y^4-4y^2$

$25y-5y^3=25-14y^2-3y^4$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)