

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 13

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 6x + 10 - 2|x - 3|}{2x^2 - 4x + |x| \cdot |x - 2|} \leq 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 600 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.
3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy}, \\ x + y^2 = 5. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D . Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 6, а радиус окружности равен 4.
5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED , если известно, что $AC = \sqrt{7}$, $BC = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$, а $\angle CED = 30^\circ$.
6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x; y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |2x| + |y| + |4 - 2x - y| > 4, \\ x^2 - 2x - 4y + y^2 \leq 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = p$ для любого простого числа p . Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leq x \leq 18$, $1 \leq y \leq 18$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1 $\frac{x^2 - 6x + 10 - 2|x-3|}{2x^2 - 4x + |x| \cdot |x-2|} \leq 0$ Раскроем модули на интервалах

0	2	3	x
$\frac{x^2 - 6x + 10 + 2x - 6}{2x^2 - 4x + x^2 - 2x} \leq 0$	$\frac{x^2 - 6x + 10 + 2x - 6}{2x^2 - 4x - x^2 + 2x} \leq 0$	$\frac{x^2 - 6x + 10 + 2x - 6}{2x^2 - 4x + x^2 - 2x} \leq 0$	$\frac{x^2 - 6x + 10 - 2x + 6}{2x^2 - 4x + x^2 - 2x} \leq 0$
$\frac{x^2 - 4x + 4}{3x^2 - 6x} \leq 0$	$\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 2x} \leq 0$	$\frac{x^2 - 4x + 4}{3x^2 - 6x} \leq 0$	$\frac{x^2 - 8x + 16}{3x^2 - 6x} \leq 0$
$\frac{(x-2)^2}{3x(x-2)} \leq 0$	$\frac{(x-2)^2}{x(x-2)} \leq 0$	$\frac{(x-2)^2}{3x(x-2)} \leq 0$	$\frac{(x-4)^2}{3x(x-2)} \leq 0$
$\frac{x-2}{3x} \leq 0$	$\frac{x-2}{x} \leq 0$	$\frac{x-2}{3x} \leq 0$	$\frac{(x-4)^2}{3x(x-2)} \leq 0$
$\frac{x-2}{3x} \leq 0$	$x-2 \leq 0$	$x-2 \geq 0$	$x-2 \geq 0$
$x \leq 0$	$x \geq 0$	нет решений в данном инт.	нет решений в данном инт.
нет решений в данном интервале	$x \in (0; 2)$		

Ответ: $x \in (0; 2)$

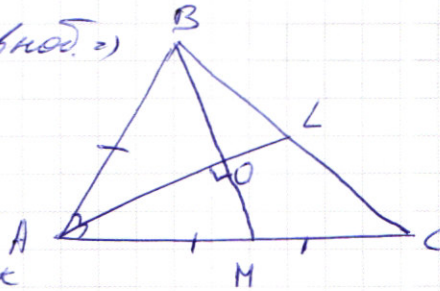
N2

Рано:
P=600
a, b, c ∈ Z
AL - бисс
BM - мед.
AL ⊥ BM

AD - бисс и выс. ⇒ ΔMAB - равноб. ⇒

⇒ AB = AM ⇒

⇒ AB = x, AC = 2x, BC = y



Чтобы данный треугольник существовал, должно выполняться неравенство треугольника. (a + b > c), чтобы треугольник не стал отрезком, a + b > c

$$\begin{cases} 2x + x > y \\ x + y > 2x \\ 3x + y = 600 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x > y \\ y > 0x \\ 3x + y = 600 \end{cases}$$

Рассмотрим минимальное значение y (y ≥ x)

$$3x + y = 3x + x = 4x = 600 \Rightarrow x = 150$$

и максимальное (y ≥ 3x)

$$3x + y = 3x + 3x = 6x = 600 \Rightarrow x = 100$$

При таких значениях x треугольник будет вырожденным, а значения подходят все целые значения x от 101 до 149.

Таким значением будет 49, а значит и таких треугольников тоже.

Ответ: 49.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 $\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy} \\ x+y^2+5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y=\sqrt{xy} \\ x=5-y^2 \end{cases} \Rightarrow (5-y^2-2y)^2=xy \Rightarrow$

$\Rightarrow y^4+2y^3+5y^2+2y^3+4y^2-10y+5y^2-10y+25=xy \Rightarrow$

$\Rightarrow y^4+5y^3-6y^2-25y+25=0 \Rightarrow (y-1)(y^3+6y^2-25)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (y-1)(y+5)(y^2+y-5)=0 \Rightarrow$

$y=1$	$x=5-1=4$
$y=-5$	$x=5-25=-20$
$y=\frac{-1+\sqrt{21}}{2}$	$x=5-\frac{(\sqrt{21}-1)^2}{4} = 5-\frac{21+2\sqrt{21}-1}{4} = 5-\frac{20+2\sqrt{21}}{4} = 5-\frac{5+\sqrt{21}}{2} = \frac{5-\sqrt{21}-1}{2} = \frac{4-\sqrt{21}}{2}$
$y=\frac{-1-\sqrt{21}}{2}$	$x=5-\frac{(\sqrt{21}-1)^2}{4} = 5-\frac{21-2\sqrt{21}-1}{4} = 5-\frac{20-2\sqrt{21}}{4} = 5-\frac{5-\sqrt{21}}{2} = \frac{5+\sqrt{21}-1}{2} = \frac{4+\sqrt{21}}{2}$

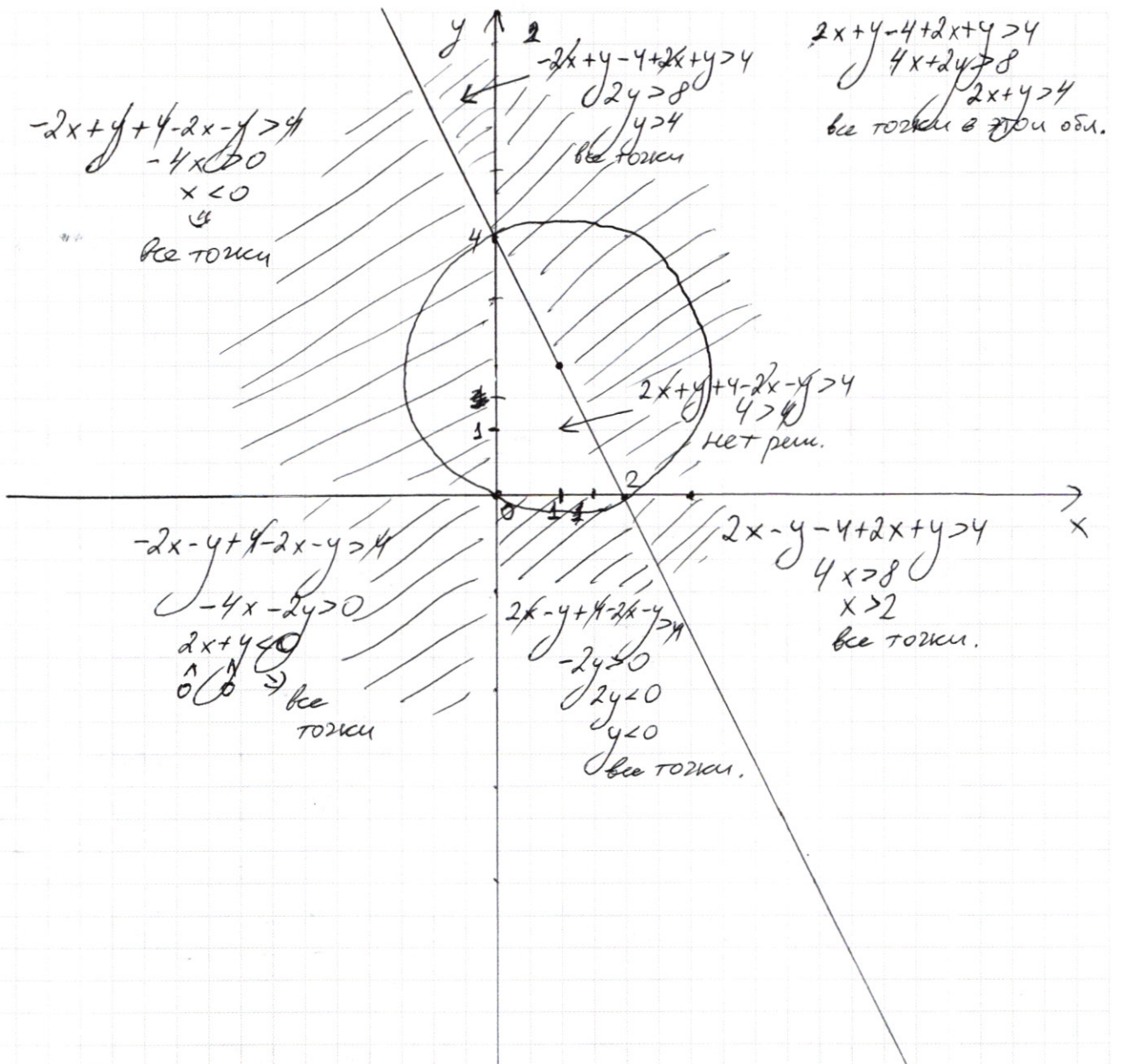
Ответ: $(1; 4), (-5; -20), \left(\frac{\sqrt{21}-1}{2}; \frac{\sqrt{21}-1}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{21}+1}{2}; -\frac{\sqrt{21}+1}{2}\right)$

№6 $\begin{cases} |2x|+|y|+|4-2x-y|>4 \\ x^2-2x-4y+y^2\leq 0 \end{cases}$

Нижнее неравенство
- окружность радиуса 5
с центром в $(1; 2)$.

Чтобы найти ~~также~~ площадь фигуры, нужно найти общие части этой окружности и верхнего уравнения. Рассмотрим его решения на интервалах графика и раскроем там модуль.

Чтобы раскрыть модуль $|4-2x-y|$ построим график функции $4-2x-y=0 \Rightarrow y=4-2x$



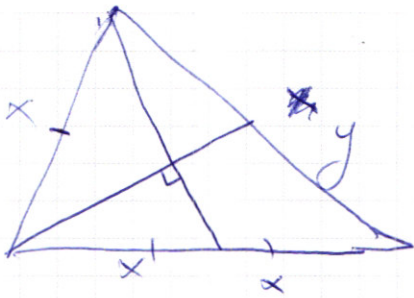
По графику видно, что площадь фигуры, образованной этими точками равна площади окружности без незаштрих. треугольника.

$$S_{\text{окр}} = \pi R^2 = 3,14 \cdot 1,5^2 = 3,14 \cdot 2,25 = 7,065 \approx 7,1$$

$$S_{\text{тр.}} = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{4 \cdot 2}{2} = 4$$

$$S_{\text{рис}} = S_{\text{окр}} - S_{\text{тр.}} = 7,1 - 4 = 3,1$$

Ответ: 3,1

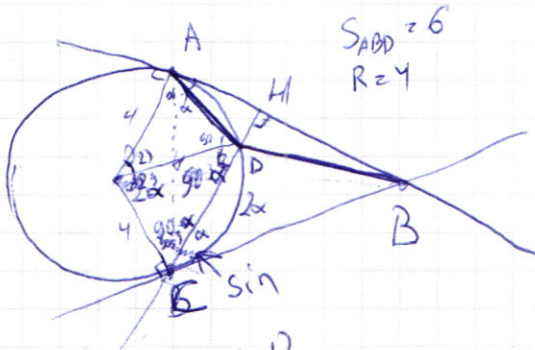


$$3x + y = 600 : 3 \quad x, y \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x + y \geq 2x \\ y > x \\ 3x \geq y \end{cases}$$

~~$$3x > y > x$$~~

$$\begin{matrix} 6x = 600 & 4x = 600 \\ x = 100 & x = 150 \\ y = 300 & y = 150 \end{matrix}$$



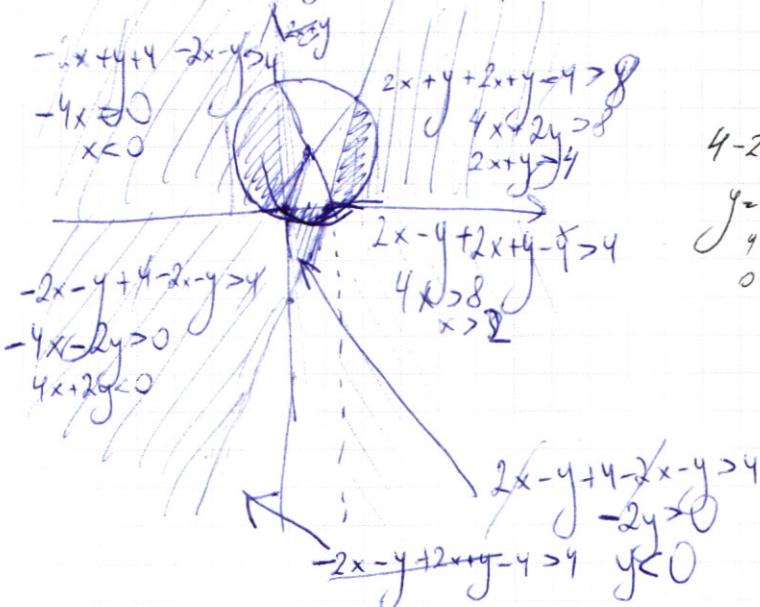
4-6-0

$$\frac{BC \cdot DH}{CD + \frac{BC}{2}} = \frac{BC}{CD} + \frac{BC^2}{12}$$

$$\frac{f(x/y)}{2} = f(x \cdot \frac{1}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y})$$

$$f(p^2) = 2f(p) \Rightarrow \underline{p^2 = 2p}$$

$$f(p) = p \quad f(p^2) = 2p$$



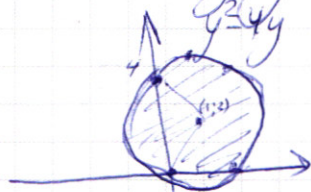
$\sin \alpha = ?$

$$y < 300 \quad 153 \quad 156 \quad 159 \dots 192 \quad 195 \quad 198 \quad 201 \quad 294 \quad 297 \quad 300$$

$$y : 3 = \frac{297}{3} = 99$$

~~$$f(p^2) = 2f(p) = p^2 = 2p$$~~

$$x^2 - 2x + 4y + y^2 \leq 0$$



$$S = \pi R^2 = \boxed{3/4 \cdot 5}$$

$$1 - 2 - 8 + 4 = -5$$

$$|2x + y| + |4 - 2x - y| \leq 4$$

$$\begin{cases} 4 - 2x - y = 0 \\ y = 4 - 2x \end{cases}$$

$$\frac{3/4}{15/70}$$

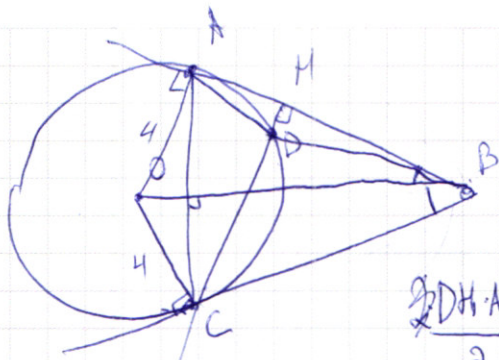
158	234
156	232
159	238
162	243
165	246
168	249
171	252
174	255
177	258
180	261
183	264
186	267
189	270
192	273
195	276
198	279
201	282
204	285
207	288
210	291
213	294
216	297
219	300
222	303
225	306
228	309
231	312
234	315

$$y^2 - 4y - 1 \leq 0$$

$$D = 16 + 4 = 20$$

$$y = \frac{4 \pm \sqrt{20}}{2} = 2 \pm \sqrt{5}$$

$$y = \frac{4 - 2\sqrt{5}}{2} = 2 - \sqrt{5}$$



$$\frac{AB}{CH} = ? = \frac{BC}{AH} = \frac{12}{CH \cdot DH}$$

$$S_{\triangle ABC} = 6$$

$$R = 4$$

$$\sqrt{|2x| + |y| + |4 - 2x - y|} > 4$$

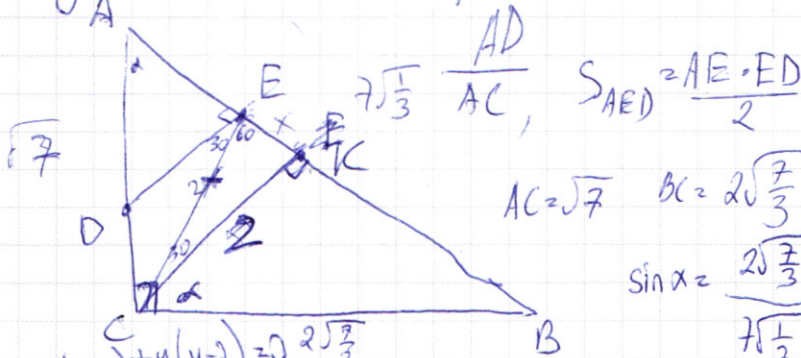
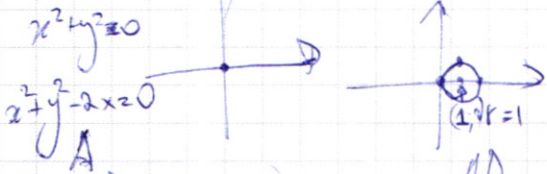
$$x^2 - 2x - 4y + y^2 \leq 0$$

$$x^2 - 2x + y^2 - 4y = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y \leq 0$$

$$\frac{2DH \cdot AB}{2} = 6 \quad DH \cdot AB = 12$$

$$DH \cdot BC = 12$$



$$AC = \sqrt{7} \quad BC = 2\sqrt{\frac{7}{3}} \quad AB = \sqrt{7 + \frac{28}{3}} = \sqrt{7 + 9\frac{1}{3}} = \sqrt{16\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{49}{3}} = 7\sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$\sin \alpha = \frac{2\sqrt{\frac{7}{3}}}{7\sqrt{\frac{1}{3}}} = \frac{\sqrt{\frac{28}{3}}}{\sqrt{\frac{49}{3}}} = \sqrt{\frac{28 \cdot 3}{49 \cdot 3}} = \sqrt{\frac{4}{7}}$$

$$x(x-2) + y(y-2) = 0 \quad 2\sqrt{\frac{7}{3}}$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$$

$$y^2 - 2y = 1 - 2x$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{4 - 4(1-2x)} = \sqrt{4 + 8x} = 2\sqrt{1+2x}$$

$$\frac{x \cdot 2\sqrt{1+2x}}{2} = \sqrt{1+2x}$$

$$\frac{DE}{AD} = \sqrt{\frac{4}{7}}$$

$$x^2 + y^2 - x - y = 0$$

$$r = 0,5$$

$$\sqrt{y^2 - 5} = y = \sqrt{y^2 - 5}$$

$$x = 2\sqrt{4} = 2$$

$$-2y - y^2 = \sqrt{5y - y^3}$$

$$(y^2 + 2y)^2 = y^4 + 4y^3 + 4y^2 = 5y - y^3$$

$$y^4 + 3y^3 + 4y^2 + 5y = 0$$

$$y^3 + 3y^2 + 4y + 5 = 0$$

$$-27 + 27 - 12 + 5 = 0$$

$$y = 0$$

$$y^3 + 3y^2 + 4y + 5 = 0$$

$$-8 + 12 - 8 + 5 = 1$$

$$-1000 + 300 - 40 + 5$$

$$-2y - y^2 + 5 = \sqrt{5y - y^3}$$

$$(y^2 + 2y - 5)^2 = 5y - y^3$$

$$y^4 + 5y^3 + 4y^2 - 5y + 5 = 0$$

$$y = 0$$

$$y^3 + 5y^2 + 4y - 5 = 0$$

$$-8 + 20 - 8 - 5 = 20 - 21 = -1$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1
$$\frac{x^2 - 6x + 10 - 2|x-3|}{2x^2 - 4x + |x| \cdot |x-2|} \leq 0$$

Number line analysis with critical points at 0, 2, and 3.

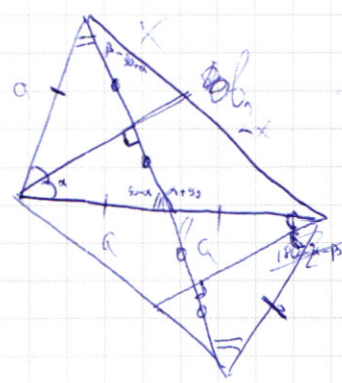
For $x < 0$: $\frac{1-6+10-4}{2-4+1} = \frac{1}{-1} = -1 < 0$

For $0 < x < 2$: $\frac{x^2 - 6x + 10 + 2x - 6}{2x^2 - 4x - x^2 + 2x} \leq 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 2x} \leq 0 \Rightarrow \frac{(x-2)^2}{x(x-2)} \leq 0 \Rightarrow \frac{x-2}{x} \leq 0$. Solution: $x \in (0; 2)$.

For $2 < x < 3$: $\frac{x^2 - 6x + 10 + 2x - 6}{2x^2 - 4x - x^2 + 2x} \leq 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 2x} \leq 0$. Same as above.

For $x > 3$: $\frac{x^2 - 6x + 10 - 2x + 6}{2x^2 - 4x + x^2 - 2x} \leq 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 8x + 16}{3x^2 - 6x} \leq 0 \Rightarrow \frac{(x-4)^2}{3x(x-2)} \leq 0$. Solution: $x = 4$.

2 $P = 600, a, b, c \in \mathbb{Z}$



$180 - \alpha - \beta = 180 - \alpha - 90 - \beta + 90 - \alpha$

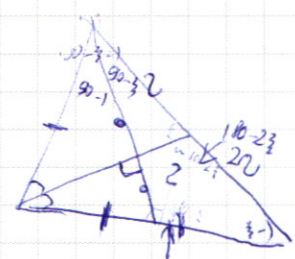
$3a + x = 600 \Rightarrow x \leq 3a$

$x = 600 - 3a < 3(200 - a)$

$600 - 3a < 600 - 3a$

$600 < 6a \Rightarrow a > 100$

$a < 200$



3
$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy} \\ x + y^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 4xy + 4y^2 = xy \\ x = 5 - y^2 \end{cases}$$

$(5 - y^2)^2 - 4y(5 - y^2) = y(5 - y^2)$

$25 - 10y^2 + y^4 - 20y + 4y^3 = 5y - y^3$

$y^4 + 5y^3 - 6y^2 - 25y + 25 = 0$

$y^4 + 5y^3 - 5y^2 - y^2 - 25y + 25 = 0$

$y^2(y^2 + 5y - 5) - (y^2 + 25) = 0$

$y^2 + 5y - 5 = 0 \Rightarrow y = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 20}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{45}}{2}$

$x = 5 - y^2$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)