МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 13 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство
$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|} \leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 600 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy}, \\ x+y^2=5. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB:CH$, если площадь треугольника ABD равна 6, а радиус окружности равен 4.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD:AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{7}$, $BC=2\sqrt{\frac{7}{3}}$, а $\angle CED=30^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе
$$\begin{cases} |2x|+|y|+|4-2x-y|>4, \\ x^2-2x-4y+y^2 \leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 18$, $1 \leqslant y \leqslant 18$ и $f(x/y)<0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy} \\ x+y^2=5 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $x-2y\geq 0$ $(\sqrt{yx}\geq 0)$. Тогда $x\geq 2y$.

Возведём в квадрат 1-ое ур-ние:

$x^2-4xy+4y^2=xy \Rightarrow x^2-5xy+4y^2=0$.

$(x-4y)(x-y)=0$. Тогда: $x_1=4y$, $x_2=y$.

$x\geq 2y$. $4y\geq 2y \Rightarrow 2y\geq 0 \Rightarrow y\geq 0$. $x=4y$ только тогда, когда $y\geq 0$. $y\geq 2y \Rightarrow -y\geq 0 \Rightarrow y\leq 0$. $x=y$ только тогда, когда $y\leq 0$. Начнём решать систему:

1) $x=4y$, $y\geq 0$: $\begin{cases} 4y-2y=\sqrt{4y^2} \\ 4y+y^2=5 \end{cases}$ $\Rightarrow 2y=2y$ - верно. $(y\geq 0)$. $y^2+4y-5=0$.

$(y-1)(y+5)=0 \Rightarrow y_1=1$, $y_2=-5$ - не подходит по условию $(y\geq 0)$. Получили корни: $x=4$; $y=1$.

2) $x=y$, $y\leq 0$: $\begin{cases} y-2y=\sqrt{y^2} \\ y+y^2=5 \end{cases}$ $\Rightarrow -y=-y$ - верно. $(y\leq 0)$. $y^2+y-5=0$.

$y^2+y-5=0$. $D=(1)^2-4\cdot(-5)\cdot 1=21$. $y_1=\frac{-1+\sqrt{21}}{2}$, $y_2=\frac{-1-\sqrt{21}}{2}$. $\frac{-1+\sqrt{21}}{2}=\frac{-\sqrt{1}+\sqrt{21}}{2} \Rightarrow y_1>0$ - не подходит по условию $(y\leq 0)$. Тогда получили корни: $x=\frac{-1-\sqrt{21}}{2}$; $y=\frac{-1-\sqrt{21}}{2}$.

Ответ: $(x=4;\ y=1)$; $\left(x=\frac{-1-\sqrt{21}}{2};\ y=\frac{-1-\sqrt{21}}{2}\right)$.

№1.

$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|}\leq 0$. Посмотрим на ~~знаменатель~~ числитель:

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№1 (продолжение).

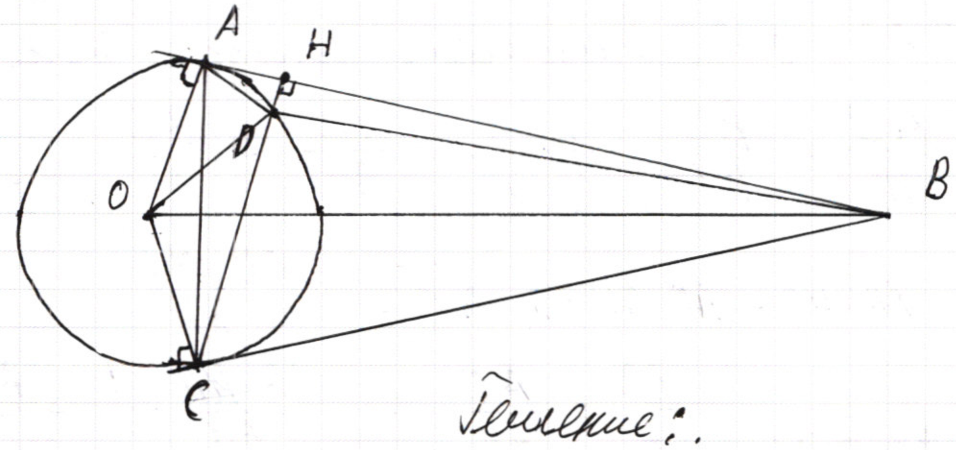
$x^2-6x+10-2|x-3| = (x^2-6x+9)-2|x-3|+1 =$
$= (x-3)^2-2|x-3|+1$. Т.к. $(x-3)^2 \ge 0$, то можем заменить скобку на $|x-3|^2 \ge 0$. Тогда:
$(x-3)^2-2|x-3|+1 = |x-3|^2-2|x-3|+1 = (|x-3|-1)^2 \ge 0$.
Мы получили, что ~~знаменатель~~ числитель больше либо равен 0. Если он больше 0, то знаменатель меньше 0. Если он равен 0, то знаменатель не важен (но знаменатель неравен 0 никогда). $(|x-3|-1)^2 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow |x-3|-1=0 \Rightarrow |x-3|=1 \Rightarrow x_1=4,\ x_2=2$. Т.к. $(x-3)^2=1 \Rightarrow (x-3-1)(x-3+1)=0$
$\Rightarrow x_1=4,\ x_2=2$. Посмотрим на знаменатель:
$2x^2-4x+|x|\cdot|x-2| = 2x(x-2)+|x|\cdot|x-2| < 0$.
$x>2$: $2x\underbrace{(x-2)}_{>0}+|x|\cdot\underbrace{|x-2|}_{>0}<0$ — не подходит.
Значит, при $x=4$ выполняется (числитель равен 0).
$x=2$: $2\cdot 2\cdot(2-2)+|2|\cdot|2-2|=0<0$ — не подходит.
Значит, при $x=2$ не выполняется (числитель равен 0, но знаменатель равен 0).
$0<x<2$ $\quad 2x(x-2)+x\cdot(2-x)<0$.
$x(2x-4+2-x) = x(x-2)<0$.
Из метода интервалов: $+ \quad 0 \quad - \quad 2 \quad + \quad x$.
Получается, $x\in(0;2)$ — подходит.
$x<0$: $2\cdot x\cdot(x-2)+x(x-2)<0$.
$x(2x-4+x-2) = 3x(x-2)<0$. — при $x\in(0;2) \Rightarrow$
$\Rightarrow$ не подходит ($x<0$). Ответ: $x\in(0;2), \{4\}$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4.



Решение:.

Пусть $\angle HAD = x$. Тогда $\angle ACH = x$. (опираются на $\smile AD$).
Т.к. A – точка касания, то $\angle OAB = 90^\circ$. $\angle ADC$ – внешний для ΔADH. Тогда $\angle ADC = 90^\circ + x$ ($\angle AHD = 90^\circ$, т.к. CH – выс.; $\angle HAD = x$). В ΔADC: $\angle ACD = \angle ACH = x$; $\angle ADC = 90^\circ + x$, тогда $\angle CAD = 90^\circ - 2x$. $\angle OAH = 90^\circ = \angle OAB$, $\angle HAD = x$, $\angle CAD = 90^\circ - 2x \Rightarrow \angle OAC = x$.
ΔAOC – равнобедр ($AO = OC$ – радиусы). Тогда: $\angle OCA = \angle OAC = x$. AOCB – вписанный, т.к. $\angle OAB + \angle OCB = 180^\circ$ ($\angle OAB = \angle OCB = 90^\circ$, т. C и т. A – т. кас.)
Из вписанности: $\angle OCA = \angle ABO = x$. Заметим, что $\Delta AHD \sim \Delta BAO$ ($\angle HAD = \angle OAB = x$; $\angle OAB = \angle AHD = 90^\circ$) по двум углам. Также $\Delta AOD \sim \Delta ABC$ ($AO = OD$ – радиусы; $AB = BC$ – касательные; $\angle AOD = 2\angle ACD$ – центр. и впис. $= 2x$; $\angle ABC = 180^\circ - \angle AOC = 2x$ – из вписанности, $\angle AOC = 180^\circ - \angle OAC - \angle OCA = 180^\circ - 2x$) по двум сторонам и углу между ними.
Запишем отношения: $\frac{AB}{AH} = \frac{AO}{HD} = \frac{BO}{AD}$;

№4 (продолжение).

Из вписанности: $\angle ABO = \angle ACO = x$.

$\triangle BAO \sim \triangle AHD$, т.к. $\angle ABO = \angle HAD = x$;

$\angle AHD = \angle OAB = 90^\circ$.

$\triangle BAO \sim \triangle CHA$, т.к. $\angle ABO = \angle ACH = x$; $\angle CHA = \angle OAB = 90^\circ$. Запишем отношения:

1) $\frac{AB}{AH} = \frac{AO}{HD} = \frac{BO}{DH}$; 2) $\frac{AB}{CH} = \frac{AO}{AH} = \frac{BO}{AC}$.

Из 1: $AB \cdot HD = AO \cdot AH \Rightarrow AO = \frac{AB \cdot HD}{AH}$.

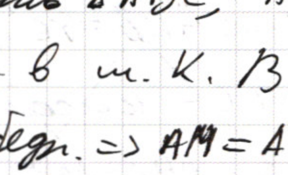
Подставим во 2-е: $\frac{AB}{CH} = \frac{AO}{AH} = \frac{AB \cdot HD}{AH} \cdot \frac{1}{AH} = \frac{AB \cdot HD}{AH^2}$.

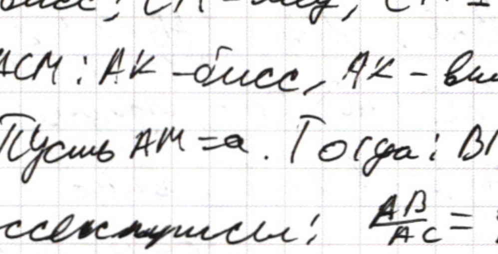
$\frac{AO}{AH} = \frac{AB \cdot HD}{AH^2}$. По условию: $AO = 4$ (радиус окружн.), площадь $\triangle ABD = 6$. Тогда: $\frac{AB \cdot HD}{2} = 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow AB \cdot HD = 12$. $\frac{4}{AH} = \frac{12}{AH^2} \Rightarrow 4AH = 12 \Rightarrow AH = 3$.

Тогда: $\frac{AB}{CH} = \frac{AO}{AH} = \frac{4}{3}$. Ответ: $\frac{4}{3}$.

№2.





Пусть есть $\triangle ABC$, AL – бисс; CM – мед; $CM \perp AL$.

$CM \cap AL$ в т. K. В $\triangle ACM$: AK – бисс, AK – выс. $\Rightarrow \triangle AMC$ – равнобедр. $\Rightarrow AM = AC$. Пусть $AM = a$. Тогда: $BM = a$; $AC = a$.

По заполному св-ву биссектрисы: $\frac{AB}{AC} = \frac{BL}{LC} = 2$.

Тогда пусть $LC = b$, тогда $BL = 2b$. Из нер-ва $\triangle$:

$AB + AC > BC \Rightarrow 3a > 3b \Rightarrow a > b$. $P = 600 \Rightarrow 3a + 3b = 600 \Rightarrow a + b = 200$.

$a, b \in N \Rightarrow a$ может быть от 101 до 199. $199 - 101 + 1 = 99$. Ответ: 99 пцвет.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 2 (продолжение)

Из нер-ва треугольника следует, что: $AC + AB > BC \Rightarrow a + 2a > 3b \Rightarrow a > b$. Периметр равен 600 $\Rightarrow AC + AB + BC = 600 \Rightarrow 3a + 3b = 600 \Rightarrow$ $\Rightarrow a + b = 200$, $\Rightarrow$ ~~выразим~~ $a = 200 - b$.

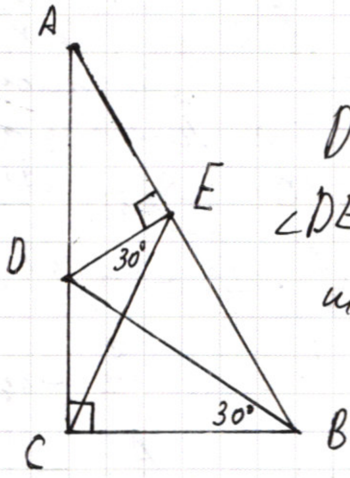
$a > b \Rightarrow 200 - b > b \Rightarrow b < 100 \Rightarrow a > 100$.

Т.к. $a, b \in N$, то $\min b = 1 \Rightarrow \max a = 199$.

Тогда $100 < a < 200 \Rightarrow 101 \leq a \leq 199$. $(199 - 101 + 1 =$ $= 99$. 99 различных треугольников. (разные стороны)

Ответ: 99

№ 5.



Решение:

$DE \perp AB \Rightarrow \angle AED = 90° \Rightarrow \angle DEB = 90°$. $\angle DEB + \angle DCB = 180°$ ($\angle DCB = \angle ACB = 90°$, т.к. $\triangle ABC$ - прямоуг., AB - гипот.).

Тогда $DEBC$ — вписанный. Из вписанности: $\angle DEC = \angle DBC = 30°$. $\triangle DCB$ - прямоуг ($\angle DCB = 90°$), $\angle DBC = 30° \Rightarrow$ $\Rightarrow DC = \frac{DB}{2} \Rightarrow DB = 2 \cdot DC$ (напротив $\angle = 30°$ лежит катет, в 2 раза меньший гипотенузы). Пусть $DC = x$.

По т. Пифагора: $DC^2 + BC^2 = DB^2 \Rightarrow x^2 + \left(2\sqrt{\frac{7}{3}}\right)^2 = (2x)^2$.

$3x^2 = 4 \cdot \frac{7}{3} \Rightarrow x^2 = \frac{28}{9} = \frac{4}{9} \cdot 7 \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{7}}{3}$ ($x > 0$, т.к. это сторона). $DC = x = \frac{2\sqrt{7}}{3}$. Найдём AD:

№5 (продолжение)

$AD = AC - DC = \sqrt{7} - \frac{2\sqrt{7}}{3} = \sqrt{7}\cdot 1 - \sqrt{7}\cdot\frac{2}{3} = \sqrt{7}\cdot\left(1-\frac{2}{3}\right) = \sqrt{7}\cdot\frac{1}{3} = \frac{\sqrt{7}}{3}$. Заметим интересный факт в $\triangle ABC$. По т. Пифагора: $AC^2+BC^2=AB^2 \Rightarrow AB^2 = (\sqrt{7})^2 + \left(2\sqrt{\frac{7}{3}}\right)^2 = 7 + \frac{28}{3} = \frac{49}{3} \Rightarrow AB = \frac{7}{\sqrt{3}}$.

$\frac{AC\cdot BC}{2} = \frac{\sqrt{7}\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{7}{\sqrt{3}}$. В этом треугольнике численное значение длины гипотенузы равно численному значению площади этого треугольника. ~~[illegible]~~

Можно записать так: (x, y – катеты, z – гипотенуза). В $\triangle ABC$: $x^2+y^2=z^2$, $\frac{xy}{2}=z$.

$\triangle ACB \sim \triangle AED$ ($\angle CAB$ – общий, $\angle ACB = \angle AED = 90°$).

Пусть они подобны с коэф. k. Тогда: $(kx)^2+(ky)^2 = (kz)^2$, $\frac{kx\cdot ky}{2} = k^2\cdot\frac{xy}{2} = k^2\cdot z$. Площадь увеличилась в k^2 раз. ($S_\triangle$ – площадь $\triangle$). В $\triangle ABC$: $S_{ABC} = \frac{\sqrt{7}\cdot 2\cdot\sqrt{\frac{7}{3}}}{2} = \frac{7}{\sqrt{3}}$, $k = \frac{AD}{AB} = \frac{\frac{\sqrt{7}}{3}}{\frac{7}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{7}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{7} = \sqrt{\frac{3}{7}}$ – коэф. подобия. Тогда: $S_{AED} = k^2\cdot S_{ABC} = \frac{3}{7}\cdot S_{ABC} = \frac{3}{7}\cdot\frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$. Отношение: $\frac{AD}{AC} = \frac{\frac{\sqrt{7}}{3}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{1}{3}$. ~~Ответ: $\frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$; $S_{AED} = \sqrt{3}$.~~

Пояснение: S_{ABC} – площадь $\triangle ABC$, S_{AED} – площадь $\triangle AED$ это было указано ранее.

Ответ: $\frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$; $S_{AED} = \sqrt{3}$.

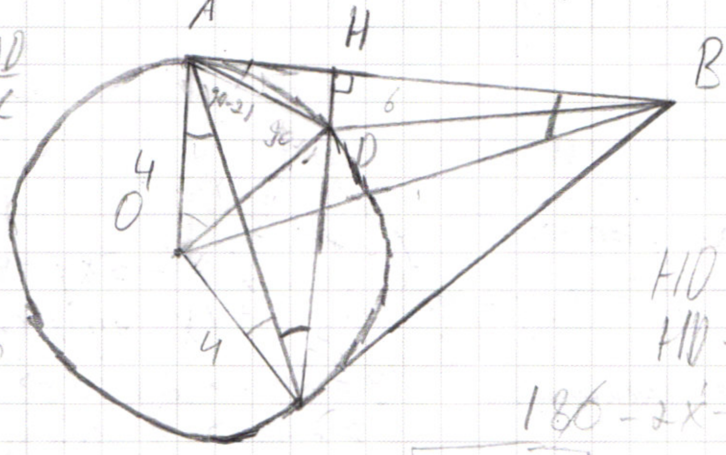
№6.

$x^2 - 2x - 4y + y^2 \le 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 \le 5 \Rightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 \le (\sqrt{5})^2 \Rightarrow$ это окружность с центром в $(1;2)$ и радиусом $\sqrt{5}$.

$\triangle AHD \sim \triangle CHA$

$\frac{AH}{CH} = \frac{HD}{AH} = \frac{AD}{AC}$

$HD \cdot CH = AH^2$



$\frac{AB}{CH} = ?$

$HD \cdot AB = 12(6 \cdot 2)$

$HD \cdot CB = 12 \; (CB = AB)$

$\triangle BAO \sim \triangle AC$

$\frac{AB}{CH} = \frac{AO}{AH}$

$180 - 2x - 2y = 180 - 90 - y$

$CD = \sqrt{CH^2 + HB^2}$

$90 + y = 2x + 2y$

$90 = 2x + y$

$2x^2 - 4x + |x| \cdot |x-2| < 0. \quad (\neq 0).$

$2x(x-2) + |x| \cdot |x-2| < 0.$

$\frac{CH \cdot AB}{2} = S_{ABC}$

$x > 2: \quad 2x(x-2) > 0. \quad |x||x-2| > 0. \quad X.$

$x = 2: \quad = 0 \quad X.$

$0 < x < 2: \quad 2x(2-x) + x(2-x) < 0. \; 3x(2-x) < 0$

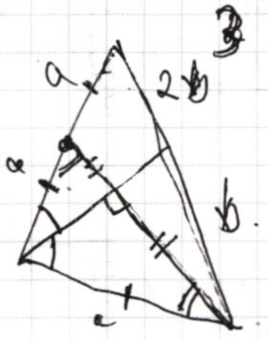
$x = 0: \quad = 0 \quad X$

$x < 0: \quad 2x(x-2) + |x| \cdot |x-2| < 0. \quad X.$

$x(2-x) < 0.$

$- \; 0 \; + \; 2 \; -$

$x \in (0; 2).$



3

$2a + a + 2b + b = 600.$

$3a > 3b \Rightarrow a > b.$

$a + b = 200.$

$101 \to 199$

$199 - 101 + 1 = 99.$

$f(ab) = f(a) + f(b) \qquad a, b > 0. \; -$ рац. - нат.

$f(p) = p$ (p - прост.) $\quad p > 0$ - прост.

$1 \le x \le 18, \quad 1 \le y \le 18, \quad f(x \cdot \frac{1}{y}) < 0$

$f(x \cdot \frac{1}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) < 0.$

$\frac{AB}{CH} = \frac{AO}{AH} = \frac{AO}{\sqrt{CH \cdot DH}} = \frac{4}{\sqrt{CH \cdot DH}}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy} \\ x+y^2=5 \end{cases}$ $x-2y\geq 0 \Rightarrow x\geq 2y$. № 3.

$x^2-4xy+4y^2=xy \Rightarrow x^2-5xy+4y^2=0$.
$(x-4y)(x-y)=0$.

$x_1=4y,\ x_2=y$. ~~неподходит~~ $4y\geq 2y \Rightarrow 2y\geq 0 \Rightarrow y\geq 0$.
$y\geq 2y \Rightarrow y\leq 0$.

Если $y\geq 0$, то: $x=4y$. $4y-2y=\sqrt{4y\cdot y} \Rightarrow 2y=2y$ – верно.

Если $4y+y^2=5 \Rightarrow y^2+4y-5=0 \Rightarrow y_1=1,\ y_2=-5$. $=$ $y=1.\ x=4$.
не подх.

Если $y\leq 0$, то: $x=y$. $y-2y=\sqrt{y^2} \Rightarrow -y=-y$ – верно.

$y+y^2=5 \Rightarrow y^2+y-5=0$. $D=1^2-4\cdot(-5)\cdot 1=21$.

$y_1=\frac{-1+\sqrt{21}}{2}>0$ – не подх. $y_2=\frac{-1-\sqrt{21}}{2}$ – подх.

$y=\frac{-1-\sqrt{21}}{2},\ x=\frac{-1-\sqrt{21}}{2}$. $\frac{-1-\sqrt{21}}{2}+\left(-\frac{1-\sqrt{21}}{2}\right)^2=5$

$=\frac{-1-\sqrt{21}}{2}+\frac{21+1+2\sqrt{21}}{4}=$ ~~$\frac{1-\sqrt{21}+2\sqrt{21}+22}{2}$~~ $=\frac{21+\sqrt{21}}{2}$.

$=\frac{-1-\sqrt{21}+11+\sqrt{21}}{2}=\frac{10}{2}=5$. $\frac{1+\sqrt{21}}{2}=\frac{1+\sqrt{21}}{2}$.

Ответ: $(4;1)$; $\left(\frac{-1-\sqrt{21}}{2};\frac{-1-\sqrt{21}}{2}\right)$.

$x^2-2x+1+y^2-4y+4\leq 5$
$(x-1)^2+(y-2)^2\leq 5$. – окр. $(1;2)$, $r=\sqrt{5}$!

$|2x|+|y|+|4-2x-y|>4$.

$x^2-6x+9-2|x-3|+1\geq 0$
$(x-3)^2-2|x-3|+1\geq 0$
$(|x-3|-1)^2\geq 0$.

$2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|\leq 0$.
$2x(x-2)+|x|\cdot|x-2|\leq 0$

$x>2$: $2x(x-2)>0 \Rightarrow |x||x-2|>0$. x.

$x=2$: $0+0\leq 0$

$0<x<2$:

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$|2x|+|y|+|4-2x-y|>4.$

Пусть $4-2x-y\geq 0$: $|2x|+|y|+4-2x-y>4$

$|2x|+|y|>2x+y.$

$|2x|>2x.$

$x>0$: $2x>2x$ ✗. $0>0$

$x=0$. $0>0$ ✗.

$x<0$; $-2x>2x$

$-2x>0$

$-x>0$

$x<0$ – верно.

$|y|>y$

уко:

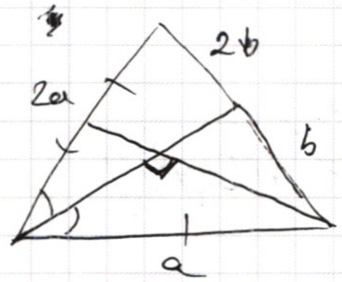
$|a|+|b|>a+b$

$a^2+b^2+2|ab|>a^2+2ab+b^2.$

$|ab|>ab$

Если $ab\geq 0$. ✗.

$ab<0.$



$a>b$. $3(a+b)=600$

$a+b=200.$

$(x+y)^2=\frac{7}{9}+\frac{2}{3}\sqrt{7}.$

$x^2+y^2=\frac{7}{9}$

$xy=\frac{\sqrt{7}}{3}$

$x^2+y^2=\frac{\cancel{7}}{\sqrt{3}}$

$x+y=\sqrt{\frac{7+6\sqrt{7}}{9}}$

$x^2+y^2=\frac{xy}{2}.$

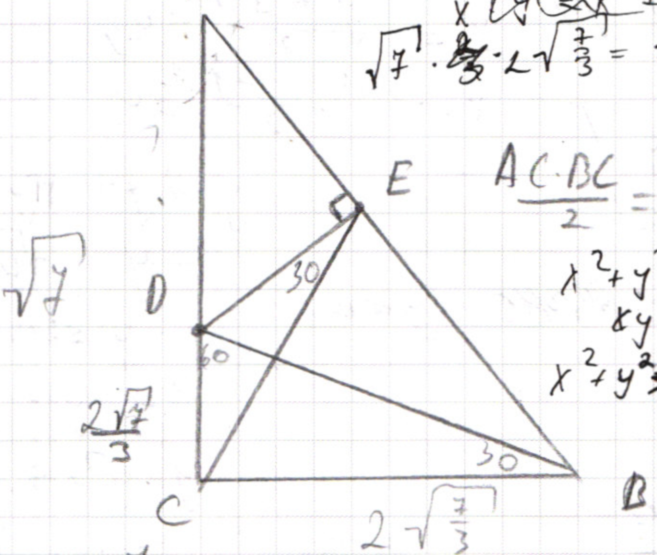
$xy=$

$x^2+y^2=x^2+y^2$

$\sqrt{7}\cdot 2\sqrt{\frac{7}{3}}=\frac{2\cdot 7}{\sqrt{3}}=\frac{14}{\sqrt{3}}.$

$\frac{AD}{AC}$ – ?

$S_{\triangle AED}$ – ?



$\frac{AC\cdot BC}{2}=AB$

$x^2+y^2=2^2$

$xy=2.$

x^2+y^2

$AC=\sqrt{7}$

$BC=2\sqrt{\frac{7}{3}}$

$\angle CED=30^\circ$

$7+4\cdot\frac{7}{3}=7+\frac{28}{3}=$

$=\frac{49}{3}\Rightarrow AB=\frac{7}{\sqrt{3}}$

$x^2+4\cdot\frac{7}{3}=4x^2$

$3x^2=\frac{28}{3}$

$x^2=\frac{28}{9}\Rightarrow x=\frac{2\sqrt{7}}{3}$

$\frac{\sqrt{7}-2\frac{\sqrt{7}}{3}}{\sqrt{7}}=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

$S_{AED}=AD=\sqrt{7}\cdot\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{\sqrt{7}}{3}.$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$$\frac{x^2-6x+10\ \cancel{9}-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|}=\frac{(x^2-6x+9)-2|x-3|+1}{2x(x-2)+|x|\cdot|x-2|}\le 0.$$

$$\frac{(x-3)^2-2|x-3|+1}{2x(x-2)+|x|\cdot|x-2|}\le 0. \quad \frac{(|x-3|-1)^2}{}$$

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy} \\ x+y^2=5 \end{cases}. \quad x=5-y^2 \quad \cancel{5-y^2-2y=\sqrt{(5-y^2)y}}$$

$$x^2-4xy+4y^2=xy$$

$$x^2-5xy+4y^2=0.$$

$$D=(-5y)^2-4\cdot 4y^2=9y^2=(3y)^2 \text{ или } (-3y)^2.$$

Пусть $y\ge 0$. Тогда: $x_1=\frac{5y+3y}{2}=4y$

$x_2=\frac{5y-3y}{2}=y.$

$4y-2y=\sqrt{4y\cdot y}$

$2y=\sqrt{4y^2}$

$2y=2y$ - верно. $(y\ge 0)$

$4y+y^2=5$

$y^2+4y-5=0.$

$(y-1)(y+5)=0$

$y_1=1$ $\quad y_2=-5.$ не подходит.

$y-2y=\sqrt{y^2}$

$-y=\sqrt{y^2}$

$-y\le 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -y=y \Rightarrow y=0.$

$y+y^2=5.$ $0+0=5$ ✗.

$y\le 0.$

$x_1\ \frac{5y-3y}{2}=\cancel{3}y.$

$x_2\ \frac{5y+3y}{2}=4y.$

$x=4y.$

$4y-2y=\sqrt{4y\cdot y}$

$2y=-2y \Rightarrow y=0.$ $\quad y_1=\frac{-1+\sqrt{21}}{2}$

$y_2=\frac{-1-\sqrt{21}}{2}.$

$y-2y=\sqrt{y^2}$

$-y=-y$ - верно

$y+y^2=5$

$y^2+y-5=0.$

$\frac{7}{\sqrt{3}}$ $\quad x^2+y^2=(\sqrt{7})^2+\left(2\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\right)^2=7+\frac{\cancel{4}\cdot 7}{3}=\frac{49}{3}.$

$\frac{xy}{2}=\frac{\cancel{14}}{\sqrt{3}}. \quad (x-y)^2=\frac{49}{3}-\frac{14}{\sqrt{3}}=$

$x^2+y^2=z^2 \qquad (kx)^2+(ky)^2=(kz)^2=k^2z^2.$

$\frac{xy}{2}=z. \qquad \frac{kx\cdot ky}{2}=k^2z$

$f(1\cdot 6)=f(1)+f(6)=f(1)+f(1)$

$f(2\cdot 3)=f(2)+f(3)=5.$

$f(1)=f(1)+f(1)\Rightarrow 2f(1)=f(1)\Rightarrow f(1)=0.$

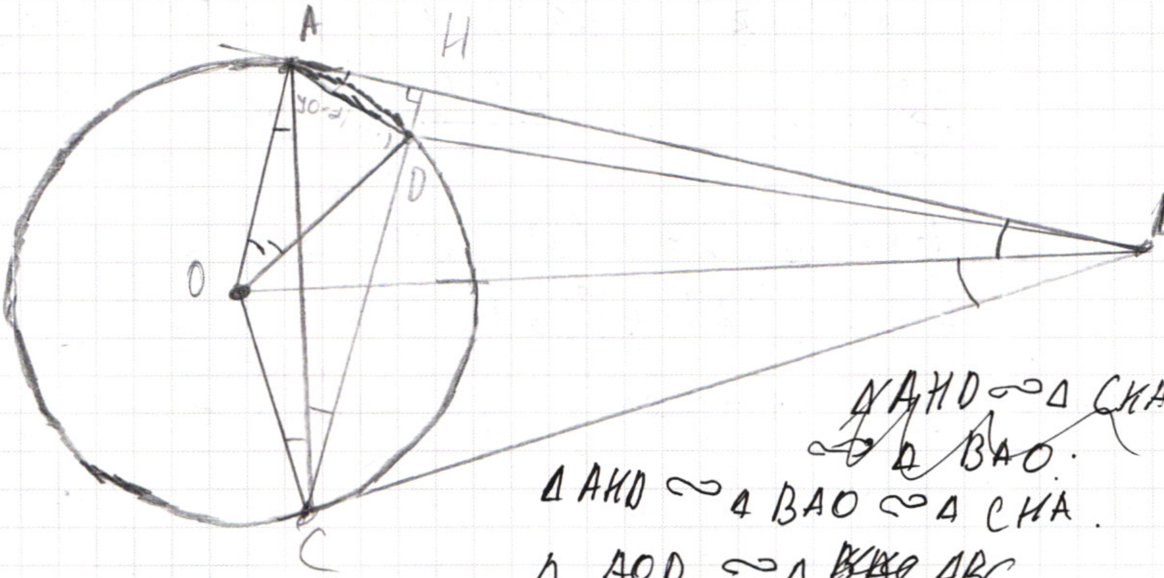
☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



~~$\Delta AHD \sim \Delta CHA \sim \Delta BAO.$~~

$\Delta AHD \sim \Delta BAO \sim \Delta CHA.$

$\Delta AOD \sim \Delta ABC$

~~$\frac{AO}{AB} = \frac{OD}{AC} = \frac{AD}{BC}$~~ ~~$\frac{AO}{AB} = \frac{AD}{BC} \Rightarrow AO = AD.$~~

$\frac{AO}{AB} = \frac{OD}{BC} = \frac{AD}{BC}.$

$\frac{AH}{AB} = \frac{HD}{AO} = \frac{AD}{BO}.$ ~~$\frac{AH}{CH} = \frac{HA}{AH} = \frac{AD}{CH}.$~~

$\frac{AB}{CH} = \frac{AO}{AH} = \frac{BO}{AC}$ $\frac{AB}{CH} = \frac{AO}{AH}$, $AO \cdot AH = AB \cdot HD \Rightarrow AO = \frac{AB \cdot HD}{AH}$

$\frac{AB}{CH} = \frac{AB \cdot HD}{AH} \cdot \frac{1}{AH} = \frac{AB \cdot HD}{AH^2} = \frac{12}{AH^2} = \frac{\cancel{AO}}{AH} \Rightarrow \frac{4}{AH}$

$12 = 4AH \Rightarrow AH = 3.$

$\frac{AB}{CH} = \frac{4}{3} = \frac{4}{3}.$

☑ черновик ☐ чистовик

Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)