



МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 13

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 6x + 10 - 2|x - 3|}{2x^2 - 4x + |x| \cdot |x - 2|} \leq 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 600 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy}, \\ x + y^2 = 5. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром  $O$  касается прямых  $AB$  и  $BC$  в точках  $A$  и  $C$  соответственно. Высота  $CH$  треугольника  $ABC$  пересекает эту окружность в точках  $S$  и  $D$ . Найдите отношение  $AB : CH$ , если площадь треугольника  $ABD$  равна 6, а радиус окружности равен 4.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике  $ABC$  на катете  $AC$  и гипотенузе  $AB$  отмечены точки  $D$  и  $E$  соответственно, такие что  $DE \perp AB$ . Найдите отношение  $AD : AC$  и площадь треугольника  $AED$ , если известно, что  $AC = \sqrt{7}$ ,  $BC = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$ , а  $\angle CED = 30^\circ$ .

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами  $(x; y)$ , удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |2x| + |y| + |4 - 2x - y| > 4, \\ x^2 - 2x - 4y + y^2 \leq 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция  $f$  определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел  $a$  и  $b$  из этого множества выполнено равенство  $f(ab) = f(a) + f(b)$ , и при этом  $f(p) = p$  для любого простого числа  $p$ . Найдите количество пар натуральных чисел  $(x; y)$  таких, что  $1 \leq x \leq 18$ ,  $1 \leq y \leq 18$  и  $f(x/y) < 0$ .

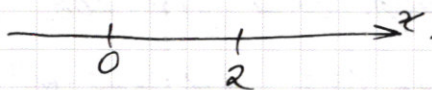


## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

$$\frac{x^2 - 6x + 10 - 2|x-3|}{2x^2 - 4x + |x| \cdot |x-2|} \leq 0 \rightarrow \frac{|x-3|^2 - 2|x-3| + 1}{2x(x-2) + |x| \cdot |x-2|} \leq 0 \rightarrow \frac{(|x-3|-1)^2}{2x(x-2) + |x| \cdot |x-2|} \leq 0$$

$(|x-3|-1)^2 \geq 0$  при любом  $x$ ; все дроби  $\leq 0 \Rightarrow$  знамен.  $< 0$ .  
(он не может быть равен 0)  
 $2x(x-2) + |x| \cdot |x-2| < 0$

 Раскроем модуль:

1)  $x < 0$ .

Попр-е применим вид:  $2x(x-2) + (-x) \cdot (-(x-2)) < 0$

$$3x(x-2) < 0$$

$$x(x-2) < 0 \Leftrightarrow x \in (0; 2)$$

2)  $0 \leq x < 2$

Попр-е применим вид:  $2x(x-2) + x \cdot (-(x-2)) < 0$

$$x(x-2) < 0 \Leftrightarrow x \in (0; 2)$$

3)  $x \geq 2$

Попр-е применим вид:  $2x(x-2) + x \cdot (x-2) < 0$

$$3x(x-2) < 0$$

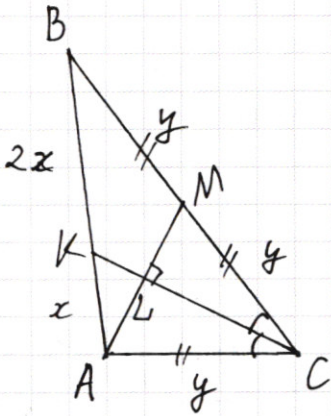
$$x(x-2) < 0 \Leftrightarrow x \in (0; 2)$$

Получаем, что  $x \in (0; 2)$

Ответ:  $(0; 2)$



№ 2



Пусть в  $\triangle ABC$  мед.  $AM \perp$  высоте  $CK$ .

Тогда в  $\triangle AMC$   $CL$  ( $L = AM \cap KC$ ) - высота и  
 вис.  $\Rightarrow \triangle AMC - ML \Rightarrow AC = MC = \frac{BC}{2}$

Тогда  $\frac{AK}{KB} = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{2}$ . Пусть  $AK = x$ ,

$AC = y$ . Тогда  $BC = 2y$  и  $BK = 2x$ , т.е.

$AB = 3x$ . Получаем, что  $3y + 3x = 600$ , т.е.  $y + x = 200$ , и

$y \in \mathbb{N}$ , т.к. стороны целочисленные  $\Rightarrow x \in \mathbb{Z}$  тоже, т.к.  $y+x \in \mathbb{Z}$

А значит,  $x \in \mathbb{N}$ . Если сумма натур. чисел  $y+x=200$ ,

возникает 199 вариантов, где  $x$  от 1 до 199, а  $y = 200 - x$

Получается, что стороны  $AB$  можно однозначно выстраи-

вать по трем сторонам:  $AC = y = 200 - x = 200 - \frac{AB}{3}$

$BC = 2 \cdot AC = 400 - \frac{2AB}{3}$ , поэтому пересекающихся

наборов сторон не будет

Ответ: 199.

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 3

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy} \\ x + y^2 = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 5 - y^2 \\ 5 - y^2 - 2y = \sqrt{5y - y^3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 5 - y^2 \\ 5 - y^2 - 2y \geq 0 \\ (5 - y^2 - 2y)^2 = 5y - y^3 \end{cases}$$

Решим последнее уравнение:  $(y^2 + 2y - 5)^2 = 5y - y^3$

$$y^4 + 4y^2 + 25 + 4y^3 - 10y^2 - 20y = 5y - y^3$$

$$y^4 + 5y^3 - 6y^2 - 25y + 25 = 0$$

Заметим, что  $y = 1$  корень уравнения  $\Rightarrow$  множим в левой ч.  $\hat{=} y - 1$

$$\begin{array}{r} -y^4 + 5y^3 - 6y^2 - 25y + 25 \quad | \quad y - 1 \\ \underline{y^4 - y^3} \phantom{- 6y^2 - 25y + 25} \\ -6y^3 - 6y^2 - 25y + 25 \\ \underline{-6y^3 - 6y^2} \phantom{- 25y + 25} \\ -25y + 25 \\ \underline{-25y + 25} \\ 0 \end{array}$$

$(y - 1) \cdot (y^3 + 6y^2 - 25) = 0$ . Корни многоч.  $y^3 + 6y^2 - 25$  найдем

$$-5 \Rightarrow y^3 + 6y^2 - 25 \hat{=} y + 5$$

$$\begin{array}{r} -y^3 + 6y^2 - 25 \quad | \quad y + 5 \\ \underline{y^3 + 5y^2} \phantom{- 25} \\ y^2 - 25 \\ \underline{-y^2 - 25} \\ 0 \end{array}$$

$$(y - 1)(y + 5)(y^2 + y - 5) = 0$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ y = -5 \\ y^2 + y - 5 = 0 \Rightarrow (D = 21) y = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2} \end{cases}$$

Решим неравенство  $5 - y^2 - 2y \geq 0 \Leftrightarrow y^2 + 2y - 5 \leq 0$

$$\frac{D}{4} = 6, \text{ корни } y^2 + 2y - 5: -1 \pm \sqrt{6}$$



№3 (продолжение)

$$f \quad - \quad + \quad y \quad ; \quad y \in [-1-\sqrt{6}; -1+\sqrt{6}]$$

$$y = 1 \text{ не подходит, т.к. } -1-\sqrt{6} < 0 < 1 \Rightarrow -1+\sqrt{4} < -1+\sqrt{6}$$

$$y = -5 \text{ не подходит, т.к. } -5 < -1-4\sqrt{1} < -1-\sqrt{16} < -1-\sqrt{6}$$

$$y = \frac{-1+\sqrt{21}}{2} \text{ не подходит, т.к. } -\frac{1+\sqrt{21}}{2} > \frac{-1+\sqrt{16}}{2} = 1,5 = -1+\sqrt{6,25} > -1+\sqrt{6}$$

$$y = \frac{-1-\sqrt{21}}{2} \text{ подходит.}$$

$$-\frac{1-\sqrt{21}}{2} > -1-\sqrt{6}$$

$$-1-\sqrt{21} > -2-2\sqrt{6}$$

$$2+2\sqrt{6} > 1+\sqrt{21}$$

$$1+\sqrt{24} > \sqrt{21}$$

$$\frac{-1-\sqrt{21}}{2} < 0 \Rightarrow -1+\sqrt{7} < -1+\sqrt{6}$$

$$y = 1, \Rightarrow x = 5 - y^2 = 4$$

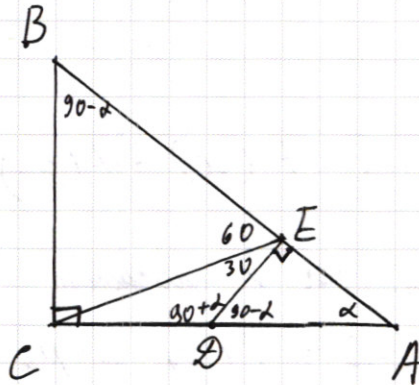
$$y = \frac{-1-\sqrt{21}}{2} \Rightarrow x = 5 - y^2 = 5 - \left(\frac{\sqrt{21}+1}{2}\right)^2 = 5 - \frac{22+2\sqrt{21}}{4} =$$
$$= 5 - 5,5 - \frac{\sqrt{21}}{2} = \frac{-\sqrt{21}-1}{2}$$

$$\text{Ответ: } (4; 1); \left(\frac{-1-\sqrt{21}}{2}; \frac{-1-\sqrt{21}}{2}\right)$$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5



Пусть  $\angle A = \alpha$

$$\angle BEC = 90^\circ - \angle CED = 60^\circ$$

По т. син  $\triangle BEC$

$$\frac{BC}{\sin 60} = \frac{CE}{\sin 90 - \alpha}$$

По т. син  $\triangle CED$

$$\frac{CD}{\sin 30} = \frac{CE}{\sin 90 + \alpha}$$

$\sin 90 + \alpha = \sin 90 - \alpha$  (как следует из теоремы углов)  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{BC}{\sin 60} = \frac{CD}{\sin 30} \quad ; \quad CD = \frac{BC \cdot \sin 30}{\sin 60} = \frac{2\sqrt{7} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} =$$

$$= \frac{2}{3} \sqrt{7} \quad \text{Тогда} \quad AD = AC - CD = \frac{\sqrt{7}}{3}, \text{ и}$$

$$\frac{AD}{AC} = \frac{\frac{\sqrt{7}}{3}}{\sqrt{7}} = \frac{1}{3}$$

По т. Пифагора  $AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = \sqrt{4 \cdot \frac{7}{3} + 7} =$

$$= \frac{5 \cdot 7}{3} = \frac{35}{3}$$

$\triangle ADE \sim \triangle ABC$  по 2 углам ( $\angle A$  - общий;  $\angle C = \angle E = 90^\circ$ )  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AD}{AB}\right)^2 = \left(\frac{\frac{\sqrt{7}}{3}}{\frac{35}{3}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{7}}{35}\right)^2 = \frac{1}{25 \cdot 7} =$$

$$= \frac{1}{175} \quad S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{\sqrt{7} \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{7}{3}}}{2} = \frac{7 \cdot \sqrt{3}}{3}$$

$$S_{ADE} = S_{ABC} \cdot \frac{1}{175} = \frac{\sqrt{3}}{5 \cdot 25} = \frac{\sqrt{3}}{125} \quad \text{Ответ: } \frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}; S_{ADE} = \frac{\sqrt{3}}{125}$$



Пусть  $b, k$  - натур. раз. числа, ~~где  $b \neq 0$~~   $b \neq 0$ .

$$f(k) = f(1 \cdot k) = f(1) + f(k) ; \Rightarrow f(1) = 0.$$

$$0 = f(1) = f\left(\frac{b}{b}\right) = f(b) + f\left(\frac{1}{b}\right)$$

Тогда  $f(b) = -f\left(\frac{1}{b}\right)$

т.е.  $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y)$

Пусть  $n$  - натур. число, разлаг. на  $k$  простых  
множ.  $p_1 \dots p_k$ . Тогда  $f(n) = f(p_1 \dots p_k) =$   
 $= f(p_1) + \dots + f(p_k) = p_1 + p_2 + \dots + p_k$

А значит,  $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$ , когда сумма простых  
множ.  $x$  меньше суммы простых множ.  $y$ .

~~Множ.  $x$  и  $y$  разлагаются на простые множ.  $p_i$  и  $q_j$~~

$x$	$y$
1	любое
2	3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 3... 18 (сумма простых множ. любого чис, 72, 7 чис 2)
3	4... 18

Запишем число <sup>от 1 до 18</sup> и сумму его простых дел.:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
0	2	3	4	5	5	7	6	6	7	11	7	13	9	8	8	17	8

т.е. для чисел  $x$  и  $y$  составл. единственным образом из  
натур. чисел с разной суммой простых делителей. ( $x$  -  
число с меньшей суммой;  $y$  - с большей)

~~Амало  $y$  нас 1 число с суммой 0; 1 - с 2;~~

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 7 (продолжение)

Серия простых дел.

Кол-во чисел с такой цифрой

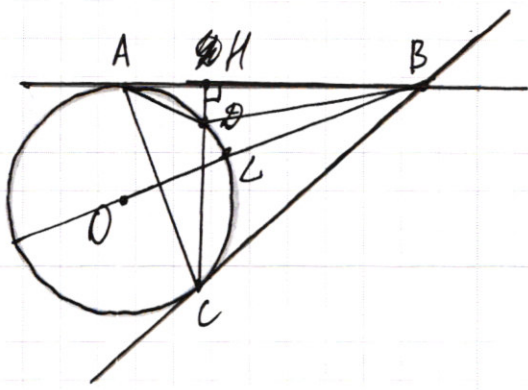
0	1
2	1
3	1
4	1
5	2
6	2
7	3
8	3
9	1
11	1
13	1
17	1

Распределение: каждое число может стоять в паре с  
каждым, ниже его (табл не было повторений) Итого

$$\begin{aligned} \text{вар-тов: } & 1 \cdot 17 + 1 \cdot 16 + 1 \cdot 15 + 1 \cdot 14 + 2 \cdot 12 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 7 + \\ & + 3 \cdot 4 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 17 + 16 + 15 + 14 + 24 + 20 + 21 + 12 + 3 + 2 + 1 = \\ & = 145 \end{aligned}$$

Ответ: 145





№ 4

$OB \perp BC \Rightarrow \angle OBC = 90^\circ$

$$\frac{AB \cdot BH}{2} = 6$$

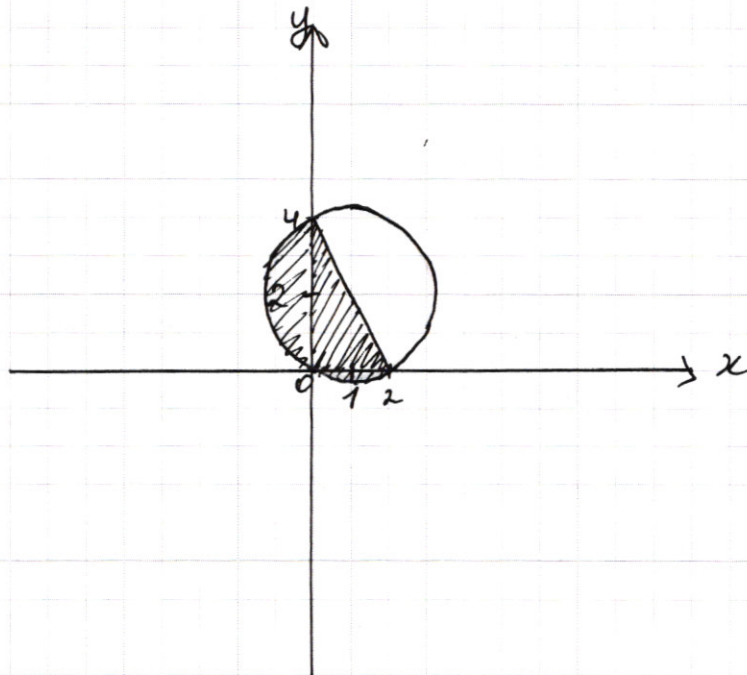
$$AB^2 = BL \cdot (BL + 8)$$

№ 6

$$\begin{cases} |2x| + |y| + |4 - 2x - y| > 4 & (1) \\ x^2 - 2x - 4y + y^2 \leq 0 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \quad x^2 - 2x - 4y + y^2 \leq 0$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 5 \quad - \text{у-к-а явл. ~~окружностью~~ <sup>круг</sup> с центром (1; 2) и R = \sqrt{5}}$$



$$(1) \quad |2x| + |y| + |4 - 2x - y| > 4$$

$$|4 - 2x - y| > 4 - |2x| - |y|$$

$$\left[ \begin{array}{l} 4 - 2x - y > 4 - |2x| - |y| \\ 4 - 2x - y < |2x| + |y| - 4 \end{array} \right.$$

№6 (продолжение)

$$\left\{ \begin{array}{l} x > 0, y > 0 \\ \begin{cases} 4 - 2x - y > 4 - 2x - y \\ 4 - 2x - y > 2x + y - 4 \end{cases} \\ x > 0, y < 0 \\ \begin{cases} 4 - 2x - y > 4 - 2x + y \\ 4 - 2x - y > 2x - y - 4 \end{cases} \\ x < 0, y > 0 \\ \begin{cases} 4 - 2x - y > 4 + 2x - y \\ 4 - 2x - y < -2x + y - 4 \end{cases} \\ x < 0, y < 0 \\ \begin{cases} 4 - 2x - y > 4 + 2x + y \\ 4 - 2x - y < -2x - y - 4 \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x > 0, y > 0 \\ \begin{cases} \emptyset \\ y < 4 - 2x \end{cases} \\ x > 0, y < 0 \\ \begin{cases} y < 0 \\ x < 2 \end{cases} \\ x < 0, y > 0 \\ \begin{cases} x < 0 \\ y < 4 \end{cases} \\ x < 0, y < 0 \\ \begin{cases} y < -2x \\ \emptyset \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x > 0, y > 0 \\ y < 4 - 2x \\ x > 0, y < 0 \\ x < 0, y > 0 \\ x < 0, y < 0 \\ y < -2x - \text{не проходит через III квадрант} \end{array} \right.$$

Получили в ответе полуокружность с  $R = \sqrt{5}$  ;

$$S = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi \cdot 5}{2} = 2,5\pi$$

Ответ:  $2,5\pi$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(4 - 2x - y)^2 > (4 - |2x| - |y|)^2$$

$$4^2 + 4x^2 + y^2 - 16x - 8y + 4xy > 4^2 + 4x^2 + y^2 - 8|2x| - 8|y| + 2|2x||y|$$

$$-16x - 8y + 4xy > -16|x| - 8|y| + 4 \cdot |xy|$$

$$-16x \geq -16|x|$$

$$-8y \geq -8|y|$$

$$4xy \leq 4|xy|$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{|4-2x-y|}{2|x|+|y|} > 4 \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 5 \end{array} \right.$$

$$f(ab) = f(a) + f(b)$$

$$f(b)$$

$$f(ab) = f(a) + f(b)$$

$$f(p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n) = f(p_1) + f(p_2) + \dots + f(p_n) = p_1 + p_2 + \dots + p_n$$

$$f(k) = f(1) + f(k)$$

$$f(1) = 0.$$

$$f\left(\frac{p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n}{k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_t}\right) = p_1 + p_2 + \dots + p_n - f\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$f\left(\frac{1}{k}\right) =$$

$$f\left(\frac{bk}{bk}\right) = f(b) + f(k) + \left\{ f\left(\frac{1}{b}\right) + f\left(\frac{1}{k}\right) \right\}$$

~~f(~~

$$f\left(\frac{b}{bk}\right) = f(b) + f(k) + f\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$f(b) + f\left(\frac{1}{b}\right) = 0.$$

$$f(b) = -f\left(\frac{1}{b}\right)$$

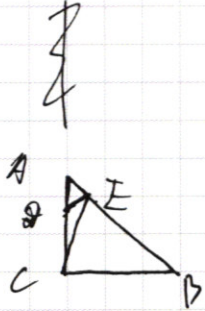
$$f\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k}$$

$$2 \cdot f(0) = 0$$

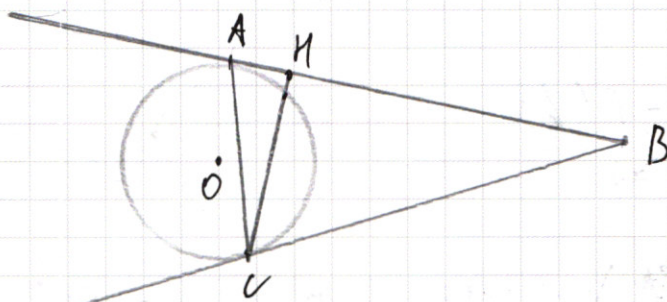
$$f(0) = 0.$$



### ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

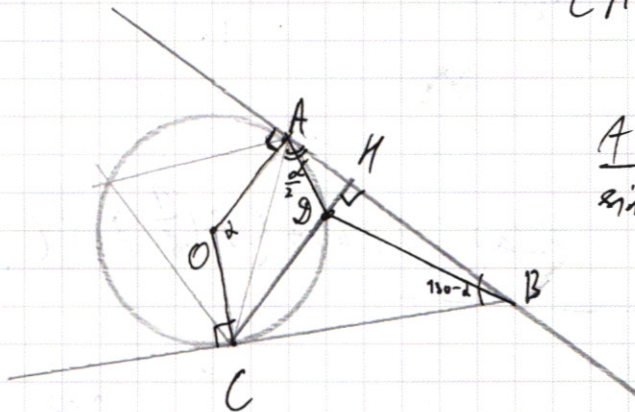


$$\begin{aligned} \frac{-1 - \sqrt{21}}{2} &> -1 - \sqrt{6} \\ -1 - \sqrt{21} &> -2 - 2\sqrt{6} \\ 2 + 2\sqrt{6} &> 1 + \sqrt{21} \\ 1 + \sqrt{24} &> \sqrt{21} \end{aligned}$$



$$AB^2 = 16.$$

$$\frac{AB}{CH} = \frac{BC}{CA} = \frac{1}{\sin \angle ABC}$$



$$\frac{AC}{\sin \angle CAB} = 16.$$

$$AB \cdot CH = 12$$

$$AB^2 = (\sqrt{AB^2 + AO^2 - 4})(\sqrt{AB^2 + AO^2 - 4})$$

$$AC^2 = 2AB^2 - AB^2 \cdot \cos 2\alpha$$

$$AC^2 = 2OA^2 - OA^2 \cdot \cos 2\alpha$$

$$AB^2 = AB^2 + AO^2 - 4$$

$$2AB^2 + AB^2 \cdot \cos 2\alpha = 2 \cdot 16 - 16 \cdot \cos 2\alpha$$

$$AB^2 = \frac{16 \cdot (2 - \cos 2\alpha)}{2 + \cos 2\alpha}$$



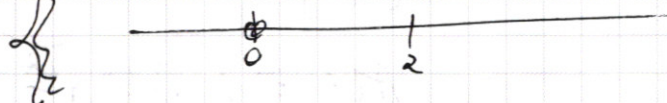
### ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{x^2 - 6x + 10 - 2|x-3|}{2x^2 - 4x + |x| \cdot |x-2|} \leq 0$$

$$\frac{|x-3|^2 - 2|x-3| + 1}{2x(x-2) + |x| \cdot |x-2|} \leq 0$$

$$\frac{(|x-3|-1)^2}{2x(x-2) + |x| \cdot |x-2|} \leq 0$$

$$2x(x-2) + |x| \cdot |x-2| < 0$$



$x < 0$

$$2x(x-2) + (-x)(-x+2) < 0$$

$$3x(x-2) < 0$$

$$x(x-2) < 0$$

$$x \in (0; 2)$$

$0 < x < 2$

$$2x(x-2) + x \cdot (x-2) < 0$$

$$3x(x-2) < 0$$

$$x \in (0; 2)$$

$x \geq 2$

$$2x + x(x-2) < 0$$

$$x(x-1) < 0$$

$$x \in (0; 1) \cup (2; \infty)$$

$$x - 2y = \sqrt{xy}$$

$$x + y^2 = 5$$

$$x - 2y > 0$$

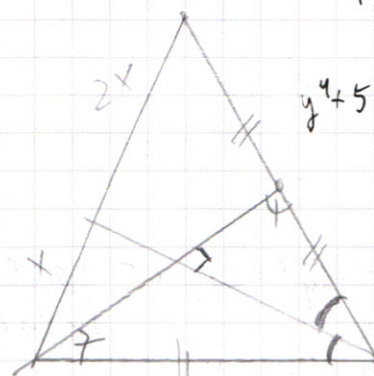
$$xy = x^2 - 4xy + 4y^2$$

$$x + y^2 = 5$$

$$5 - y^2 - 2y = \sqrt{5y - y^3}$$

$$x = 5 - y^2$$

$$y^4 + 4y^2 + 25 - 10y^2 - 20y + 4y^3 = 5y - y^3$$



$$y^4 + 5y^3 - 6y^2 - 25y + 25 = 0$$



$$3y + 3x = 600$$

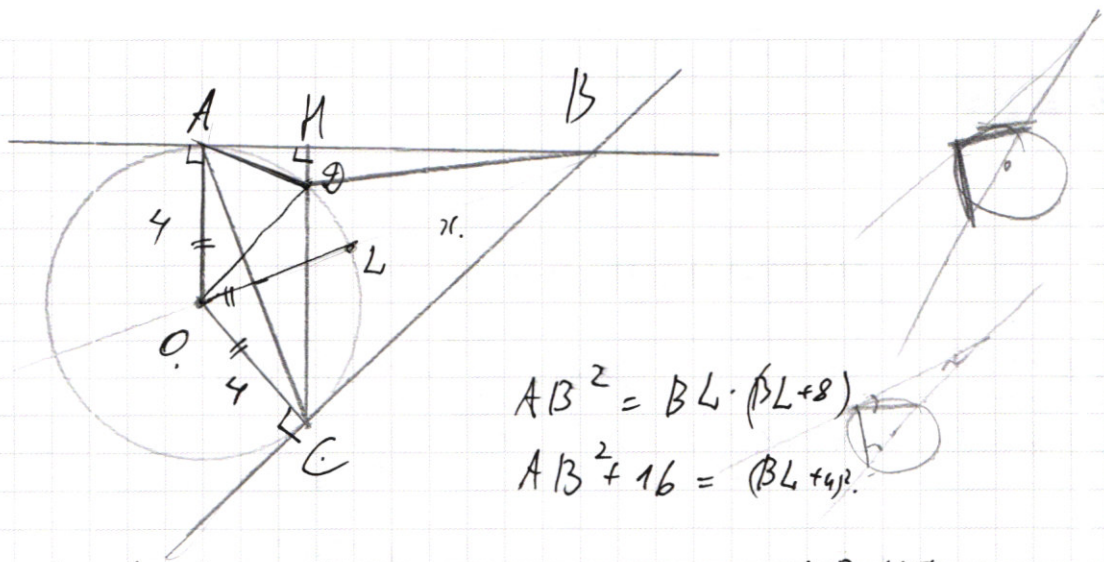
$$y + x = 200$$

$$y = 150$$

$$x = 50$$

$$3x \geq 2y \geq y$$





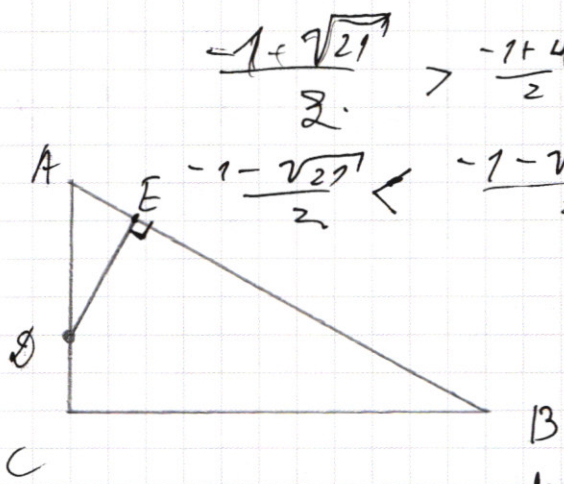
$$AB^2 = BL \cdot (BL + 8)$$

$$AB^2 + 16 = (BL + 4)^2$$

$$\begin{cases} AB^2 = BL^2 + 8BL \\ AB^2 + 16 = BL^2 + 8BL + 16 \end{cases}$$

$$\frac{AB \cdot HD}{2} = 6$$

$$AB^2 = BL(BL + 8)$$



$$\frac{-1 + \sqrt{21}}{2} > \frac{-1 + 4}{2} > 1,5 \approx -1 + \sqrt{6,25} > -1 + \sqrt{6}$$

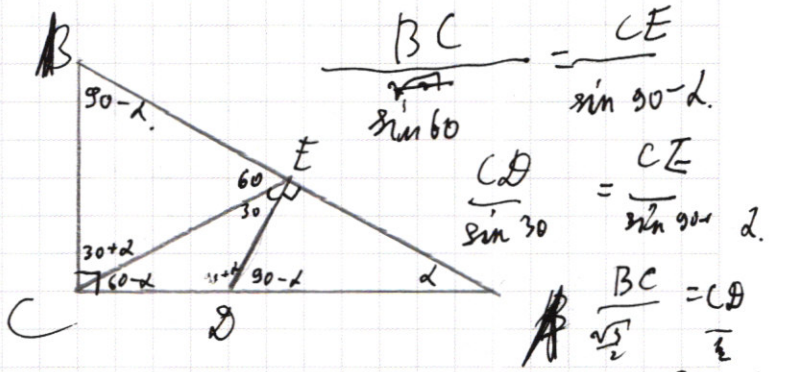
$$\frac{-1 - \sqrt{21}}{2} < \frac{-1 - \sqrt{16}}{2} \leq -2,5 = -1 - \sqrt{2,25}$$

$$AB = \sqrt{4 + \frac{28}{9}} = \frac{7}{3} \cdot \sqrt{9 + 4} = \frac{7}{3} \cdot \sqrt{13}$$

$$AC = \sqrt{\frac{7}{3}}; BC = 2$$

$$AC = \sqrt{7}; BC = \sqrt{\frac{28}{3}} \quad \frac{7,5}{3}$$

$$\begin{array}{r} y^4 + 5y^3 - 6y^2 - 25y + 25 \quad | y-1 \\ y^4 - y^3 \\ \hline 6y^3 - 6y^2 \\ -6y^3 + 6y^2 \\ \hline 0 - 25y + 25 \\ -25y + 25 \\ \hline 0 \end{array}$$



$$(y-1)(y^3 + 6y^2 - 25) = 0$$

$$5 - y^2 - 2y > 0$$

$$(y-1)(y+5)(y^2 + y - 5) = 0$$

$$y^2 + 2y - 5 < 0$$

$$\begin{array}{r} y^3 + 6y^2 - 25 \quad | y+5 \\ y^3 + 5y^2 \\ \hline y^2 - 25 \\ -y^2 + 5y \\ \hline 5y - 25 \\ -5y + 25 \\ \hline 0 \end{array}$$

