

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 15

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\left(\frac{(x-5)^2 + 4}{|x-5|} - 4 \right) (|x-4| + |x-6| - 2) \leq 0.$$

2. [3 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 25y^2} = 50, \\ 5y + \sqrt{x^2 - 25y^2} = 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Биссектрисы внутреннего и внешнего угла A треугольника ABC пересекают прямую BC в точках M и N соответственно. Окружность, описанная вокруг треугольника AMN , касается стороны AB в точке A . Найдите радиус окружности, угол ACB и площадь треугольника ABN , если известно, что $AB = 3$, $BM = 1$.

4. [5 баллов] Вписанная окружность остроугольного треугольника ABC касается сторон AC и AB в точках E и D . Точка Y – основание перпендикуляра, опущенного из точки E на AB , а X – вторая точка пересечения EY со вписанной окружностью треугольника ABC . Найдите радиус этой окружности, если площадь треугольника AXD равна 12, а $5AD = 6EY$.

5. [5 баллов] На доске выписано $10n$ последовательных натуральных чисел ($n \in \mathbb{N}$). Из них выбираются три попарно различных числа, среди которых ровно одно кратно 2 и ровно одно кратно 5. Известно, что можно составить ровно 5 112 таких троек. Чему равно n ?

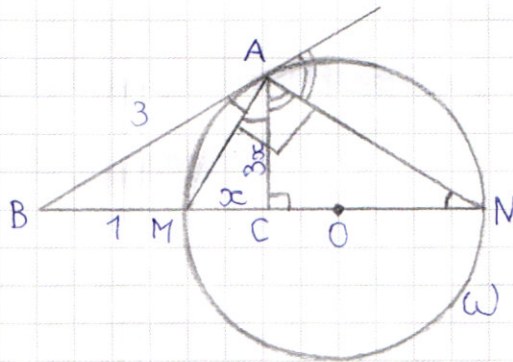
6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x; y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} 2y + 3x \geq |2y - 3x|, \\ y \leq -2x + 16, \\ x^2 - 12y + y^2 + 16 \geq 0 \end{cases}$$

7. [5 баллов] Найдите количество шестизначных чисел, обладающих следующим свойством: сумма остатков от деления числа на некоторые две последовательные степени числа десять равна 1234.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.



Дано:

AM и AN - биссектрисы
внутреннего и внешнего угла
соответственно
A в $\triangle ABC$, $AM \cap BC = M$, $AN \cap BC = N$,
окружность ω с центром O
описана около $\triangle AMN$, AB - ка-
сательная к ω , A - точка
касания, $AB = 3$, $BM = 1$

Найти R_ω , $\angle ACB$, $S_{\triangle ABN}$

Решение:

AM и AN - биссектрисы внутреннего и внешнего
угла A в $\triangle ABC$, зн. $\angle MAN = 90^\circ$, т. е. MN - диаметр ω ,
зн. $MN = 2R_\omega$. Кроме того, AM - биссектриса $\angle BAC$,
 $AM \cap BC = M$, зн. $\angle BAM = \angle CAM$ и по свойству биссектрисы
 $\frac{BM}{CM} = \frac{AB}{AC}$, т. е. $\frac{1}{CM} = \frac{3}{AC}$, зн. $AC = 3CM$.

AB - касательная к ω , A - точка касания, AM -
хорда ω , зн. $\angle BAM = \frac{1}{2} \sphericalangle AM$, но $\angle ANM$ - вписанный угол
окружности ω , т. е. $\angle ANM = \frac{1}{2} \sphericalangle AM = \angle BAM = \angle CAM$.

$\angle ACB$ - внешний угол в $\triangle AMN$, зн. $\angle ACB = \angle CAN + \angle ANC =$
 $= \angle CAN + \angle ANM = \angle CAN + \angle CAM = \angle MAN = 90^\circ$.

Рассм. $\triangle NBA$ и $\triangle ABM$, в них:

1) $\angle B$ - острый

2) $\angle BAM = \angle BNA$,

зн. $\triangle NBA \sim \triangle ABM$ по I признаку, т. е. $\frac{BN}{AB} = \frac{AB}{BM}$, зн.
 $BN = \frac{AB^2}{BM} = \frac{3^2}{1} = 9$, $MN = BN - BM = 9 - 1 = 8$.

$MN = 2R\omega$, зн. $R\omega = \frac{MN}{2} = \frac{8}{2} = 4$.

Пусть $CM = x$, тогда $AC = 3x$.

$\angle ACB = 90^\circ$, т. е. $\triangle ABC$ прямоугольный, AB - гипотенуза,

зн. по т. Пифагора

$$AC^2 + BC^2 = AB^2$$

$$AC^2 + (CM + BM)^2 - AB^2 = 0$$

$$(3x)^2 + (x+1)^2 - 3^2 = 0$$

$$9x^2 + x^2 + 2x + 1 - 9 = 0$$

$$10x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$5x^2 + x - 4 = 0$$

$$D = 1^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-4) = 1 + 80 = 81, 2 \text{ корня}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{81}}{2 \cdot 5}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 9}{10}$$

$$x_1 = \frac{-1+9}{10} \quad x_2 = \frac{-1-9}{10}$$

$$x_1 = \frac{8}{10} \quad x_2 = \frac{-10}{10}$$

$$\underline{x_1 = 0,8} \quad \underline{x_2 = -1}$$

$CM = 0,8$, зн. $AC = 3 \cdot 0,8 = 2,4$.

$\angle ACB = 90^\circ$, зн. AC - высота $\triangle ABN$, т. е. $S_{\triangle ABN} = \frac{1}{2} BN \cdot AC =$
 $= \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 2,4 = 9 \cdot 1,2 = 10,8$

Ответ: $R\omega = 4$, $\angle ACB = 90^\circ$, $S_{\triangle ABN} = 10,8$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1.

$$\left(\frac{(x-5)^2+4}{|x-5|}-4\right)(|x-4|+|x-6|-2) \leq 0$$

Выражение $\left(\frac{(x-5)^2+4}{|x-5|}-4\right)(|x-4|+|x-6|-2)$ имеет смысл,
если $|x-5| \neq 0$, т. е. $x-5 \neq 0$, $x \neq 5$.

$$\frac{(x-5)^2+4}{|x-5|}-4 = \frac{(x-5)^2-4|x-5|+4}{|x-5|} = \frac{(|x-5|-2)^2}{|x-5|}.$$

$$\text{Если } x < 4, \text{ то } |x-4|+|x-6|-2 = 4-x+6-x-2 = 8-2x > 8-2 \cdot 4 = 0.$$

$$\text{Если } x > 6, \text{ то } |x-4|+|x-6|-2 = x-4+x-6-2 = 2x-12 > 12-12 = 0.$$

$$\text{Если } x \in [4; 5) \cup (5; 6], \text{ то } |x-4|+|x-6|-2 = x-4+6-x-2 = 0.$$

$$(|x-5|-2)^2 \geq 0, |x-5| \geq 0, \text{ зн. } \frac{(|x-5|-2)^2}{|x-5|} \geq 0, |x-4|+|x-6|-2 \geq 0, \text{ т. е.}$$

$\left(\frac{(x-5)^2+4}{|x-5|}-4\right)(|x-4|+|x-6|-2) \leq 0$ тогда и только тогда, когда

$$\frac{(|x-5|-2)^2}{|x-5|} = 0 \text{ или } |x-4|+|x-6|-2 = 0$$

$$\begin{cases} (|x-5|-2)^2 = 0 & x \in [4; 5) \cup (5; 6] \\ |x-5| \neq 0 \end{cases}$$

$$|x-5| \neq 0$$

$$|x-5|-2 = 0$$

$$|x-5| = 2$$

$$x-5 = 2 \text{ или } 5-x = 2$$

$$x = 7$$

$$x = 3$$

Ответ: $x = 3$ или $x = 7$ или $x \in [4; 5) \cup (5; 6]$.

№2.

$$- \begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 25y^2} = 50 \\ 5y + \sqrt{x^2 - 25y^2} = 1 \end{cases}$$

Выражение $\sqrt{x^2 - 25y^2}$ имеет смысл, если $x^2 - 25y^2 \geq 0$

$$(x - 5y)(x + 5y) \geq 0$$

$$- \begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 25y^2} = 50 \\ 5y + \sqrt{x^2 - 25y^2} = 1 \end{cases}$$

$$x - 5y = 50 - 1$$

$$x - 5y = 49, \text{ т. е. } x - 5y > 0, \text{ зн. } (x + 5y) \geq 0.$$

$$x = 5y + 49$$

$$+ \begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 25y^2} = 50 \\ 5y + \sqrt{x^2 - 25y^2} = 1 \end{cases}$$

$$x + 5y + 2\sqrt{x^2 - 25y^2} = 51$$

$$(\sqrt{x+5y})^2 + 2\sqrt{x+5y} \cdot \sqrt{x-5y} + (\sqrt{x-5y})^2 - (\sqrt{x-5y})^2 = 51$$

$$((x+5y) + (x-5y)) - (x-5y) = 51$$

$$(2x)^2 - 49 = 51$$

$$4x^2 = 100$$

$$x^2 = 25$$

$$\underline{x = 5} \text{ или } \underline{x = -5}$$

$$5y + 49 = 5 \quad 5y + 49 = -5$$

$$5y = -44 \quad 5y = -54$$

$$\underline{y = -8,8} \quad \underline{y = -10,8}$$

Проверка:

$$5 + 5 \cdot (-8,8) = 5 - 44 = -39 < 0 \text{ - не подходит}$$

$$-5 + 5 \cdot (-10,8) = -5 - 54 = -59 < 0 \text{ - не подходит}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Ответ: решений нет.

$$x - 5y = 49$$

$$\sqrt{x-5y} = 7$$

$$+ \begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 25y^2} = 50 \\ 5y + \sqrt{x^2 - 25y^2} = 1 \end{cases}$$

$$x + 5y + 2\sqrt{x^2 - 25y^2} = 51$$

$$(\sqrt{x+5y})^2 + 2\sqrt{x+5y}(\sqrt{x-5y}) + (\sqrt{x-5y})^2 - (\sqrt{x-5y})^2 = 51$$

$$((\sqrt{x+5y})^2 + 2\sqrt{x+5y} \cdot \sqrt{x-5y} + (\sqrt{x-5y})^2) - (x-5y) = 51$$

$$(\sqrt{x+5y} + \sqrt{x-5y})^2 - 49 = 51$$

$$(\sqrt{x+5y} + 7)^2 = 100$$

$$\sqrt{x+5y} \geq 0, \text{ зн. } \sqrt{x+5y} + 7 \geq 7, \text{ т. е.}$$

$$\sqrt{x+5y} + 7 = 10$$

$$\sqrt{x+5y} = 3$$

$$x + 5y = 9$$

$$+ \begin{cases} x - 5y = 49 \\ x + 5y = 9 \end{cases}$$

$$2x = 58$$

$$\underline{x = 29}$$

$$- \begin{cases} x - 5y = 49 \\ x + 5y = 9 \end{cases}$$

$$-10y = 40$$

$$\underline{y = -4}$$

Ответ: (29; -4),

№5.

Среди ~~каждое десятое~~ из записанных чисел кратны^е 10, т. е. заканчиваются на 0, $\frac{10n}{10} = n$ чисел. Столько же чисел оканчиваются на 5. Всего среди записанных чисел $\frac{10n}{2} = 5n$ чётных, из них $5n - n = 4n$ не оканчиваются на 0, т. е. не кратны 5. Остальные $10n - n - 4n$ чисел не кратны ни 5, ни 2.

Для составления тройки чисел, удовлетворяющей условию, надо выбрать либо 1 число, кратное 10, и 2 различных, не кратных ни 5, ни 2, либо 1 число, оканчивающееся на 5, 1 чётное, не оканчивающееся на 0, и 1 число, не кратное ни 5, ни 2, т. е. всего таких троек $n \cdot C_{4n}^2 + n \cdot 4n \cdot 4n = \frac{n \cdot 4n \cdot (4n-1)}{2} + 16n^3 = 8n^3 - 2n^2 + 16n^3 = 24n^3 - 2n^2$, зн.

$$24n^3 - 2n^2 = 5112$$

$$12n^3 - n^2 = 2556$$

$$12n^3 - 72n^2 + 71n^2 - 426n + 426n - 2556 = 0$$

$$(n-6)(12n^2 + 71n + 426) = 0$$

$$n-6=0 \quad \text{или} \quad 12n^2 + 71n + 426 = 0$$

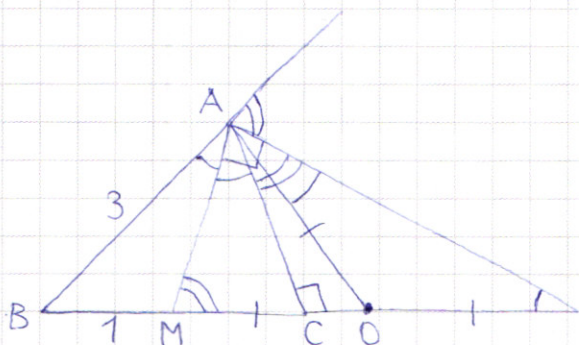
$$\underline{n=6} \quad D = 71^2 - 4 \cdot 12 \cdot 426$$

$$D < 0, \text{ корней нет}$$

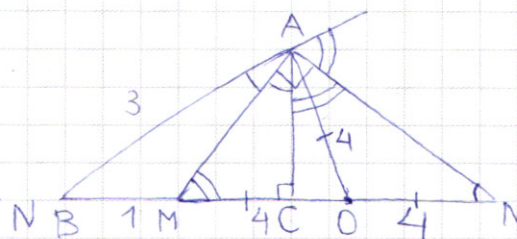
Ответ: $n=6$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3.



$$\frac{BN}{AB} = \frac{AB}{BM} \Rightarrow BN = \frac{AB^2}{BM} = 9$$



$$\frac{1}{MC} = \frac{3}{AC} \Rightarrow AC = 3MC$$

$$(1+MC)^2 + (3MC)^2 = 9$$

$$1 + 2MC + 10MC^2 = 9$$

$$5MC^2 + MC - 4 = 0$$

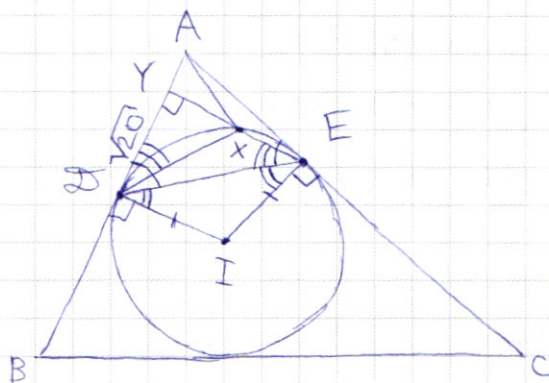
$$5x^2 + x - 4 = 0$$

$$D = 1 - 4 \cdot 5 \cdot (-4) = 1 + 80 = 81$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 9}{10}$$

$$\underline{x_1 = 0,8}, \quad \underline{x_2 = -1}$$

4.



$$AD \cdot XY = 24$$

$$5AD = 6EY$$

$$EY \cdot XY = 20$$

$$DY = \sqrt{20}$$

$$\frac{EY}{DY} = \frac{DY}{XY} \Rightarrow EY = \frac{DY^2}{XY} = \frac{20}{XY}$$

$$2. \quad x + 5y + 2\sqrt{(x-5y)(x+5y)} = 51$$

$$4x^2 - (x-5y)^2 = 51$$

$$4x^2 - (x^2 - 10xy + 25y^2) = 51$$

$$4x^2 - x^2 - 10xy + 25y^2 = 51$$

$$3x^2 - 10xy + 25y^2 = 51$$

$$4x^2 - 2401 = 51$$

$$4x^2 = 2452$$

$$1. \left(\frac{(|x-5|-2)^2}{|x-5|} \right) (|x-4| + |x-6| - 2) \leq 0$$

$$|x-5|=2$$

$$x=7 \text{ или } x=3$$

$$x-5y=49$$

$$x+5y \geq 0$$

$$x=5y+49$$

$$3(5y+49)^2 - 10(5y+49)y + 25y^2 - 51 = 0$$

$$3(25y^2 + 490y + 2401) - 50y^2 - 490y + 25y^2 - 51 = 0$$

$$75y^2 + 1470y + 7203 - 25y^2 - 490y - 51 = 0$$

$$50y^2 + 980y + 7152 = 0$$

$$25y^2 + 490y + 3576 = 0$$

$$D = \frac{D}{4} = 245^2 - 25 \cdot 3576 = 60025$$

$$x^2 = 613$$

$$(\sqrt{x+5y} + \sqrt{x-5y})^2 - (x-5y) = 51$$

$$\sqrt{x-5y} = a, \sqrt{x+5y} = b$$

$$a^2 = 49$$

$$a = 7$$

$$b^2 + 2ab = 51$$

$$(a+b)^2 = 100$$

$$a+b = 10$$

$$(a; b) = (7; 3), (7; -17) \quad a=7, b=3$$

$$\begin{cases} x+5y=49 \\ -10y=40 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+5y=9 \\ y=-4 \end{cases}$$

$$2x=58$$

$$x=29$$

$$5112 = 71 \cdot 9 \cdot 8 = 71 \cdot 3^2 \cdot 2^3$$

$$5112 \mid 2$$

$$2556 \mid 2$$

$$1278 \mid 2$$

$$639 \mid 3$$

$$213 \mid 3$$

$$71 \mid$$

а ^{не на 0} чётн., в зак. на 5, с на 0, d остатки.

4n чётн. не на 0, n на 5, n^2 на 0, 4n остатки.

$$16n^3 + 8n^3 - 2n^2 = 24n^3 - 2n^2 = 5112$$

$$12n^3 - n^2 - 2556 = 0$$

$$n^2(12n-1) = 2556$$

$$\begin{array}{r} \times 196 \\ 167 \\ \hline \times 169 \\ 155 \\ \hline 845 \\ 845 \end{array}$$

$$12n^3 - 72n^2 + 71n^2 - 426n + 426n - 2556 = 0$$

$$(n-6)(12n^2 + 71n + 426) = 0$$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР (заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

--

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)